

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

Paul APPELL

TOME DEUXIÈME
DYNAMIQUE DES SYSTÈMES. — MÉCANIQUE ANALYTIQUE

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL

MÈMBRE DE L'INSTITUT
RECTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

SIXIÈME ÉDITION, ENTIÈREMENT REFONDUE

TOME DEUXIÈME
DYNAMIQUE DES SYSTÈMES. — MÉCANIQUE ANALYTIQUE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1953

PRÉFACE

DE LA QUATRIÈME ÉDITION

Dans cette nouvelle édition, le chapitre XXIV, qui est d'une importance capitale, puisqu'il est consacré aux équations générales de la Dynamique, a été complété par l'exposé d'une théorie nouvelle, celle de l'*asservissement*, telle qu'elle a été donnée dans une thèse soutenue, en 1923, devant la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, par M. Beghin.

Dans tout le cours de l'Ouvrage, les citations ont été tenues à jour, de façon à faire connaître, autant que possible, les travaux récents publiés sur les diverses questions traitées.

Je dois, en terminant, remercier M. Véronnet, maître de conférences à l'Université de Strasbourg, du concours si utile qu'il m'a prêté dans cette publication.

Klingelthal (Bas-Rhin), 21 septembre 1923.

P. APPELL.

AVERTISSEMENT

Dans cette sixième édition, le tome II du *Traité de Mécanique* a été modifié de la même façon que le Tome I : l'orientation du trièdre de référence est celle adoptée aujourd'hui ; l'emploi des notations vectorielles a été développé, on a ajouté quelques références nouvelles. Mais on a conservé à peu près sans modifications le magistral exposé de la mécanique analytique donné aux chapitres XXIV et XXV.

G. VALIRON.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES. — MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE XVII. MOMENTS D'INERTIE.

313. *Géométrie des masses.* — La théorie des moments d'inertie, la théorie du centre de gravité et celle de l'attraction empruntent à la Mécanique la seule notion de masse. Plusieurs auteurs, notamment Carnot (*Géométrie de position*) et Chasles (*Aperçu historique*, p. 220), ont proposé de rattacher ces théories à la Géométrie. Mais on fait actuellement rentrer ces questions dans un chapitre spécial de la Mécanique, auquel on a donné le nom de *Géométrie des masses* (voir HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e cahier, et *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 4^e année, 1893, p. 337).

Les théories qui constituent la Géométrie des masses ont toutes pour objet l'étude de sommes de la forme $\sum m f(x, y, z)$, étendues à un ensemble de points matériels de masses m et de coordonnées

x, y, z . Par exemple, dans la théorie du centre de gravité, figurent les sommes obtenues en prenant pour $f(x, y, z)$ une fonction linéaire des coordonnées, sommes qui se ramènent à trois $\Sigma mx, \Sigma my, \Sigma mz$.

La théorie des moments d'inertie, créée par Huygens, se rapporte aux sommes obtenues en prenant pour $f(x, y, z)$ une fonction entière du second degré des coordonnées, sommes qui se ramènent à six $\Sigma mx^2, \Sigma my^2, \Sigma mz^2, \Sigma mxy, \Sigma mzx, \Sigma myz$.

I. — DÉFINITIONS ET EXEMPLES.

314. **Définitions des moments d'inertie.** — Quoique, dans les applications, on ne rencontre que les moments d'inertie par rapport à des axes, il est utile d'introduire les définitions suivantes. Étant donné un système de points matériels, on appelle :

1° *Moment d'inertie du système par rapport à un plan*, la somme des produits obtenus en multipliant la masse m de chaque point par le carré de sa distance δ au plan, $\Sigma m\delta^2$.

2° *Moment d'inertie par rapport à un axe*, la somme des produits obtenus en multipliant la masse m de chaque point par le carré de sa distance r à l'axe, Σmr^2 ; on désigne ordinairement ce moment par Mk^2 où M est la masse totale du système : k est alors appelé le *rayon de gyration* du système autour de l'axe considéré.

3° *Moment d'inertie par rapport à un point*, la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance au point.

Par un point O faisons passer trois axes rectangulaires x, y, z . Les moments d'inertie par rapport aux trois plans coordonnés sont

$$\Sigma mx^2, \Sigma my^2, \Sigma mz^2;$$

les moments d'inertie par rapport aux axes,

$$\Sigma m(y^2 + z^2), \Sigma m(z^2 + x^2), \Sigma m(x^2 + y^2);$$

enfin, le moment d'inertie par rapport au point O a pour valeur

$$\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Des expressions ci-dessus résultent les théorèmes suivants :

a. Le moment d'inertie, par rapport à un axe, est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires, passant par cet axe.

b. Le moment d'inertie, par rapport à un point, est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires passant par ce point, ou à la somme des moments d'inertie par rapport à un plan et à une droite rectangulaires passant par ce point.

4^e Produits d'inertie. — Les géomètres anglais appellent ainsi les sommes $\Sigma m yz$, $\Sigma m zx$, $\Sigma m xy$, qui se ramènent immédiatement aux moments d'inertie. Menons en effet les plans bissecteurs P et P' des dièdres formés par les plans zOx et xOy , plans qui ont pour équations $x + y = 0$, $x - y = 0$, puis appelons δ et δ' les distances du point de masse m et de coordonnées x, y, z à ces deux plans. Nous avons

$$\delta^2 = \frac{1}{2}(x + y)^2, \quad \delta'^2 = \frac{1}{2}(x - y)^2,$$

$$\Sigma m xy = \frac{1}{2}(\Sigma m \delta^2 - \Sigma m \delta'^2),$$

relation dans laquelle les deux termes du second membre sont des moments d'inertie.

315. Systèmes continus. — Pour calculer les moments d'inertie d'un corps continu, d'une masse métallique, par exemple, on la suppose décomposée en éléments de volumes infiniment petits dv dont les coordonnées sont x, y, z et la masse $m = \rho dv$, ρ désignant la densité du volume élémentaire dv . Alors, une somme telle que Σmx^2 , ou Σmyz devient une intégrale triple $\iiint \rho x^2 dv$ ou $\iiint \rho yz dv$ étendue au volume considéré.

316. EXEMPLES. — 1^o *Moments d'inertie d'une sphère homogène.* — Soit ρ la densité. Cherchons d'abord le moment d'inertie μ de la sphère par rapport à son centre; ce moment est une fonction du rayon R; son accroissement $d\mu$, lorsque R prend un accroissement infiniment petit dR ,

est le moment d'inertie d'une couche sphérique de masse $4\pi R^2 \rho dR$, par rapport à un point qui en est à la distance constante R (fig. 179) : c'est donc

$$d\mu = 4\pi R^2 \rho dR \times R^2,$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et R ,

$$\mu = \frac{4}{5} \pi \rho R^5.$$

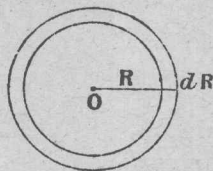


Fig. 179.

Le moment d'inertie par rapport à un plan diamétral est

$$\frac{1}{3} \mu = \frac{4}{15} \pi \rho R^5,$$

puisque le moment d'inertie par rapport à tous les plans diamétraux est le même, et que le moment d'inertie par rapport au centre est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans diamétraux rectangulaires. De là résulte que le moment d'inertie par rapport à un diamètre, somme des moments d'inertie par rapport à deux plans diamétraux rectangulaires, a pour valeur

$$I = \frac{2}{3} \mu = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = M \frac{2}{5} R^2,$$

M désignant la masse totale $\frac{4}{3} \pi \rho R^3$; le rayon de gyration autour d'un diamètre est donc

$$k = R \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

2° Moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène. — Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde. Son moment d'inertie par rapport au plan des xy est, en appelant ρ la densité,

$$\Sigma m z^2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume de l'ellipsoïde.

Si l'on fait le changement de variables

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz',$$

on aura

$$\Sigma m z^2 = abc^3 \iiint \rho z'^2 dx' dy' dz';$$

la nouvelle intégrale triple, étant étendue au volume de la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

représente le moment d'inertie de cette sphère de rayon 1 par rapport à un plan diamétral, et a pour valeur $\frac{4}{15} \pi \rho$; on a donc

$$\Sigma m z^2 = \frac{4}{15} \pi \rho abc^3;$$

cette quantité peut s'écrire enfin

$$\Sigma m z^2 = M \frac{c^2}{5},$$

M étant la masse $\frac{4}{3} \pi \rho abc$ de l'ellipsoïde.

On trouvera de même que les moments d'inertie de l'ellipsoïde sont : par rapport au plan des xz ,

$$M \frac{b^2}{5};$$

par rapport au plan des yz ,

$$M \frac{a^2}{5};$$

et, par suite : par rapport aux axes Ox , Oy , Oz ,

$$M \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad M \frac{a^2 + b^2}{5};$$

et, par rapport au centre,

$$M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}.$$

3^o *Moment d'inertie, par rapport à son axe, d'un solide homogène de révolution limité par les plans de deux parallèles.* — Prenons d'abord le cas d'un cylindre de révolution de hauteur h et de rayon R . Comme dans le cas de la sphère, en donnant un accroissement dR au rayon, le moment d'inertie du cylindre, par rapport à son axe, prend un accroissement

$$d\mu = R^2(2\pi R h \rho dR),$$

puisque tous les points de la couche cylindrique dont s'accroît le solide sont à la distance R de l'axe et que l'accroissement de masse est $2\pi R h \rho dR$.

En intégrant l'égalité ci-dessus, nous aurons

$$\mu = \frac{1}{2} \pi R^4 h \rho,$$

ce qu'on peut écrire

$$\mu = \pi R^2 h \rho \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2};$$

le rayon de gyration est donc $R \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit, en général (*fig. 180*), $z = \varphi(x)$ l'équation de la méridienne de la surface de révolution donc l'axe est Oz . Décomposons le solide en cylindres

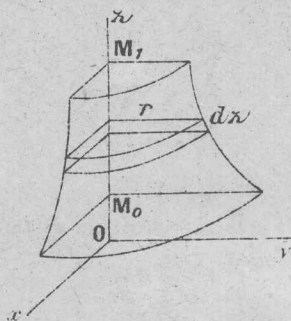


Fig. 180.

élémentaires par des plans perpendiculaires à l'axe; le moment d'inertie d'un de ces cylindres, de rayon r et de hauteur dz , sera, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2} \pi r^4 \rho dz,$$

et, si z_0 et z_1 sont les cotes des parallèles extrêmes, le moment d'inertie du solide aura pour expression

$$Mk^2 = \frac{\pi \rho}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^4 dz,$$

r étant lié à z par relation

$$z = \varphi(r);$$

on voit que, dans ce cas, le moment d'inertie se calcule par une intégrale simple.

II. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

317. Variation du moment d'inertie d'un système par rapport à un axe se déplaçant parallèlement à lui-même. — Cette variation est donnée par le théorème suivant :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux axes.

Soit AB un axe quelconque donné; prenons pour axe des z l'axe parallèle Gz passant par le centre de gravité, et soient $x = a$, $y = b$ les équations de l'axe donné AB. Le moment d'inertie par rapport à cet axe est

$$\Sigma m[(x - a)^2 + (y - b)^2];$$

ce qu'on peut écrire

$$\Sigma m(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\Sigma m - 2a\Sigma mx - 2b\Sigma my;$$

mais les sommes Σmx , Σmy sont nulles, puisque le centre de gravité se trouve sur l'axe des z ; il reste alors, pour expression du moment d'inertie par rapport à AB,

$$\Sigma m(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)\Sigma m,$$

ce qui démontre la proposition; car $\Sigma m(x^2 + y^2)$ est le moment d'inertie par rapport à Gz et $(a^2 + b^2)$ le carré de la distance des deux axes.

Soient I le moment d'inertie par rapport à AB, I_G le moment par rapport à l'axe parallèle passant par G , d la distance de ces deux axes; on a $I = I_G + M d^2$. Soit de même I' le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à la même direction, mais situé à une distance d' du centre de gravité; on a $I' = I_G + M d'^2$; d'où, en retranchant,

$$I - I' = M(d^2 - d'^2),$$

formule qui permet de calculer I' , connaissant I et la position du centre de gravité.

Il résulte du théorème $I = I_G + M d^2$ que, de tous les axes

parallèles à une direction donnée, celui pour lequel le moment d'inertie est *minimum* passe par le centre de gravité. Les axes de direction fixe par rapport auxquels ce moment a une valeur constante engendrent un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de gravité.

On démontre de même que :

Le moment d'inertie d'un système, par rapport à un plan, est égal au moment d'inertie par rapport à un plan parallèle mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux plans ;

Le moment d'inertie d'un système, par rapport à un point O, est égal au moment d'inertie par rapport au centre de gravité G, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux points $\overline{OG}^2$.

318. Variation du moment d'inertie par rapport à des axes passant par un même point. Ellipsoïde d'inertie (Poinsot). — Étudions maintenant les variations du moment d'inertie pris par rapport aux diverses droites issues d'un point O (fig. 181). Prenons

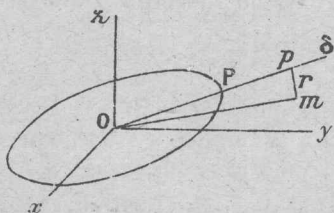


Fig. 181.

ce point pour origine et soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite O δ . Le carré de la distance mp d'un point x, y, z à cette droite a pour valeur $\overline{Om}^2 - \overline{Op}^2$, c'est-à-dire

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

ou, en développant,

$$r^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy,$$

d'où résulte pour le moment d'inertie la valeur

$$\Sigma mr^2 = \alpha^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m(z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma \Sigma m yz - 2\gamma\alpha \Sigma m zx - 2\alpha\beta \Sigma m xy.$$

En désignant par A, B, C, D, E, F les sommes constantes qui entrent dans la formule ci-dessus, nous obtenons

$$(1) \quad \Sigma mr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Les constantes A, B, C sont les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées : D, E, F sont les produits d'inertie.

Pour interpréter géométriquement le résultat auquel nous venons d'arriver, portons de part et d'autre de O, sur chaque droite O*δ*, une longueur OP, telle que $\frac{1}{OP} = \sqrt{\Sigma mr^2}$, et cherchons le lieu du point P(X, Y, Z). Nous avons tout d'abord

$$\alpha = \frac{X}{OP}, \quad \beta = \frac{Y}{OP}, \quad \gamma = \frac{Z}{OP} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{OP^2} = \Sigma mr^2;$$

en portant ces valeurs dans l'équation (1), il nous vient

$$(2) \quad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY,$$

équation d'une surface du second ordre. Cette surface, qui a l'origine pour centre, est nécessairement un ellipsoïde; le rayon vecteur OP est, en effet, toujours réel et fini, puisqu'il a pour valeur

$\frac{1}{\sqrt{\Sigma mr^2}}$ et que le moment d'inertie est toujours positif. Il n'y aurait exception que pour le cas où tous les points matériels du système seraient en ligne droite avec le point O : dans ce cas, le moment d'inertie par rapport à cette droite serait nul, et l'ellipsoïde se réduirait à un cylindre de révolution autour de cette droite.

L'ellipsoïde dont l'équation vient d'être établie a reçu le nom d'*ellipsoïde d'inertie relatif au point O*; ses plans et ses axes de symétrie se nomment *plans principaux* et *axes principaux d'inertie* relatifs au point considéré. L'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité est l'*ellipsoïde central d'inertie*. En général,

il n'y a donc que trois axes principaux d'inertie relatifs à un point; si l'ellipsoïde d'inertie relatif au point est de révolution, il y en a une infinité dans le plan de l'équateur; s'il est une sphère, tout axe passant par le point est principal pour ce point.

Une fois l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O tracé, le moment d'inertie par rapport à un axe $O\delta$ est $\frac{I}{OP^2}$, P désignant le point où $O\delta$ perce l'ellipsoïde. De tous les axes menés par O , celui qui donne le plus petit moment d'inertie est donc le grand axe de l'ellipsoïde.

319. Conditions pour que l'axe Oz soit principal pour le point O . — Cherchons les conditions pour que l'un des axes de coordonnées

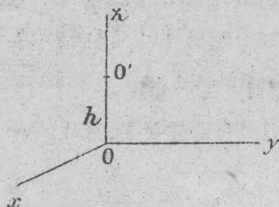


Fig. 182.

Oz soit axe principal d'inertie par rapport au point O . Il faut pour cela que l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O ne contienne pas de termes du premier degré en z , c'est-à-dire qu'on ait

$$D = 0, \quad E = 0$$

ou bien

$$(3) \quad \Sigma m y z = 0, \quad \Sigma m x z = 0.$$

L'axe des z étant axe principal d'inertie pour le point O ne le sera pas, en général, pour un autre point O' de sa direction, situé à une cote $OO' = h$. Pour exprimer que Oz est aussi un axe principal en O' on devrait, d'après ce qui précède, joindre aux équations (3) les conditions nouvelles

$$(4) \quad \Sigma m y (z - h) = 0, \quad \Sigma m x (z - h) = 0,$$

obtenues en portant l'origine en O' . En les combinant avec les premières, ces équations se réduisent à

$$\Sigma m y = 0, \quad \Sigma m x = 0,$$

équations qui expriment que Oz passe par le centre de gravité. Si cette condition géométrique est vérifiée, l'axe des z sera axe principal d'inertie pour un quelconque de ses points et en particulier pour le centre de gravité, car les conditions que nous venons de trouver sont alors vérifiées, quel que soit h ; d'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité est axe principal d'inertie pour l'un quelconque de ses points. Inversement, si un axe est principal pour deux de ses points, il l'est pour tous et passe par le centre de gravité.*

Il est évident que, si un solide homogène admet un plan de symétrie, ce plan est principal pour chacun de ses points, car, en prenant ce plan pour plan des xy , on a, quelle que soit l'origine,

$$\Sigma m xz = 0, \quad \Sigma m yz = 0,$$

z prenant des valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

320. Remarque. — Un ellipsoïde quelconque ne peut pas toujours être considéré comme un ellipsoïde d'inertie. Si l'on rapporte, en effet, à ses axes, un ellipsoïde d'inertie, son équation devient

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

où A, B, C sont les moment d'inertie

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

par rapport aux trois axes; et l'on voit immédiatement que l'un quelconque d'entre eux est au plus égal à la somme des deux autres. Par exemple, lorsque l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, il peut être aussi allongé qu'on le veut; mais, s'il est aplati, son aplatissement est au plus égal à $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

Si le solide est une plaque d'épaisseur infiniment petite, située dans le plan des xy , l'un de ses axes principaux est Oz par raison

de symétrie : soient Ox et Oy les deux autres. Alors, z étant nul, on a $C = A + B$.

On verra, à titre d'exercice, que, pour que l'ellipsoïde d'inertie puisse en quelque point de l'espace se réduire à une sphère, il faut que l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité soit un ellipsoïde de révolution aplati; il existe alors sur son axe de révolution deux points symétriques par rapport au centre de gravité, pour lesquels la condition est satisfaite.

321. Problème de Binet. — *Trouver l'enveloppe des plans par rapport auxquels le moment d'inertie d'un système a une valeur donnée Mk^2 .*

Rapportons le système aux axes principaux d'inertie Gx , Gy , Gz de l'ellipsoïde central, c'est-à-dire de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité, et soient Ma^2 , Mb^2 , Mc^2 les moments d'inertie par rapport aux trois plans coordonnés.

Le moment d'inertie par rapport au plan

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

a pour valeur

$$\Sigma mr^2 = \Sigma \frac{m(ux + vy + wz + 1)^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

En développant cette expression et remarquant que, d'après le choix des axes coordonnés, les six sommes Σmx , Σmy , Σmz , Σmyz , Σmzx , Σmxy sont nulles, on devra avoir la relation

$$Mk^2 = \frac{u^2 Ma^2 + v^2 Mb^2 + w^2 Mc^2 + M}{u^2 + v^2 + w^2},$$

qui devient sous forme entière

$$u^2(a^2 - k^2) + v^2(b^2 - k^2) + w^2(c^2 - k^2) + 1 = 0,$$

C'est l'équation tangentielle de la surface du second ordre

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} + 1 = 0.$$

Lorsqu'on fait varier le paramètre k , les surfaces représentées par cette équation restent homofocales. Comme elles doivent être réelles, il faut que k^2 soit supérieur à la plus petite des quantités a^2 , b^2 , c^2 : c^2 par exemple; il en résulte que le plan pour lequel le moment d'inertie est minimum est le plan des xy .

Par un point $O'(x', y', z')$ de l'espace, il passe trois de ces surfaces : les valeurs du paramètre k^2 , relatives à ces trois surfaces, sont les racines α^2 , β^2 , γ^2 de l'équation du troisième degré

$$(2) \quad \frac{x'^2}{a^2 - k^2} + \frac{y'^2}{b^2 - k^2} + \frac{z'^2}{c^2 - k^2} + 1 = 0.$$

Les trois surfaces homofocales qui passent par O' se coupent à angle droit; on a alors le théorème suivant :

Les plans principaux d'inertie relatifs au point O' sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales (1) qui passent par ce point; et les moments d'inertie par rapport à ces trois plans principaux sont $M\alpha^2$, $M\beta^2$, $M\gamma^2$; α^2 , β^2 , γ^2 désignant les racines de l'équation (2).

La démonstration résulte du rapprochement des deux faits suivants :

1° L'enveloppe des plans passant par O' par rapport auxquels le moment d'inertie du système a une valeur donnée Mk^2 est le cône de sommet O' circonscrit à la surface (1). Cette enveloppe est un véritable cône tant que la surface (1) ne passe pas par O' , c'est-à-dire tant que k^2 n'a pas une des valeurs α^2 , β^2 , γ^2 . Mais, si k^2 a l'une de ces trois valeurs, la surface (1) passe par O' et le cône circonscrit de sommet O' devient un plan double confondu avec le plan tangent à cette surface en O' ;

2° Cherchons directement l'enveloppe de ces mêmes plans en prenant O' pour origine, et pour axes, $O'x_1, y_1, z_1$, les trois axes principaux d'inertie relatifs à O' . Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point du système,

$$M\alpha_1^2 = \Sigma m x_1^2, \quad M\beta_1^2 = \Sigma m y_1^2, \quad M\gamma_1^2 = \Sigma m z_1^2$$

les moments d'inertie par rapport aux trois plans principaux relatifs à O' . Le moment d'inertie du système par rapport au plan $ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$ passant par O' est

$$Mk^2 = \Sigma m \frac{(ux_1 + vy_1 + wz_1)^2}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{M(\alpha_1^2 u^2 + \beta_1^2 v^2 + \gamma_1^2 w^2)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Si k^2 doit rester constant, on a

$$u^2(\alpha_1^2 - k^2) + v^2(\beta_1^2 - k^2) + w^2(\gamma_1^2 - k^2) = 0;$$

le plan enveloppe alors un cône dont l'équation est

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - k^2} + \frac{y_1^2}{\beta_1^2 - k^2} + \frac{z_1^2}{\gamma_1^2 - k^2} = 0.$$

C'est là un véritable cône tant que k^2 n'a pas une des valeurs α_1^2 , β_1^2 , γ_1^2 , pour $k^2 = \alpha_1^2$ par exemple, le cône se réduit au plan double $x_1^2 = 0$, c'est-à-dire à l'un des plans principaux relatifs au point O' : de même pour $k^2 = \beta_1^2$, $k^2 = \gamma_1^2$, on a les deux autres plans principaux relatifs à O' .

Comme, dans la première façon de raisonner, nous avons trouvé que le même cône se réduit à des plans doubles seulement quand k^2 est égal à α^2 , β^2 ou γ^2 , il faut que α_1^2 , β_1^2 , γ_1^2 soient égaux à α^2 , β^2 , γ^2 ; comme nous avons trouvé, de même, que ces plans doubles coïncident avec les plans tangents aux trois surfaces homofocales passant par O' , il faut que ces plans tangents coïncident avec les plans principaux d'inertie relatifs au point O' , $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$.

Le théorème est donc démontré.