Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1235

Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 8

Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny

Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1235

Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 8

Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editeurs

Francis Hirsch
E.N.S. Cachan
61, avenue du Président Wilson, 94230 Cachan, France

Gabriel Mokobodzki
Université Paris VI, Equipe d'Analyse, Tours 46-0, 4ème étage
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

AMS Subject Classification (1980): 31A15, 31C05, 31C15, 31C25, 31D05, 35K22, 47D05, 47D07, 47F05, 60J25, 60J35, 60J45

ISBN 3-540-17210-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-17210-6 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to "Verwertungsgesellschaft Wort", Munich.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

TABLE DES MATIERES

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THEORIE DU POTENTIEL PAR RAPPORT A UN NOYAU

Thomas BARTH
Fachbereich Mathematik
Universität Essen - GHS
D - 4300 ESSEN 1
République Fédérale d'Allemagne

Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel par rapport à un noyau ont été établis par Deny [4] sous forme axiomatique. La théorie elle même repose sur le fait que le noyau potentiel d'une résolvante est essentiellement un noyau élémentaire au sens de Deny [3]. C'est ainsi que Deny [5] a montré qu'un noyau de Hunt continu satisfait au principe de domination, et au principe complet du maximum si la résolvante associée est sous-markovienne. Il est donc important de savoir si un noyau donné est le noyau potentiel d'une résolvante. Or on connaît depuis les travaux de Hunt [6] le rôle fondamental que joue le principe complet du maximum dans la construction de résolvantes sous-markoviennes à partir d'un noyau-diffusion donné. Ces résultats ont été généralisés par Taylor [8] au cas d'un noyau propre sur un espace mesurable, et ainsi placés dans un cadre relatant purement de théorie de la mesure.

Dans ce travail nous introduisons des principes faibles de domination et du maximum nécessaires pour l'existence d'une résolvante, respectivement d'une résolvante sous-markovienne, associée à un noyau donné, et aussi suffisants dans le cas d'un noyau borné. Après avoir caractérisé le principe de domination par une propriété analogue au principe du maximum positif de Hunt et Meyer, nous étendons les méthodes de Taylor [8] pour construire des résolvantes non nécessairement sous-markoviennes associées à un noyau non borné qui satisfait au principe de domination. Ceci met en évidence le rôle essentiel du principe de domination pour la construction de résolvantes. Tandis qu'en théorie des processus de Markov on ne s'occupe que du cas sous-markovien, du point de vue de la théorie du potentiel le cas général est intéressant. C'était d'ailleurs déjà une préoccupation de Deny [5] d'atteindre le cas non sous-markovien.

Une partie des résultats présentés ici a été obtenue pendant un

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

séjour de recherche à l'Université de Hull, Grande Bretagne. L'auteur remercie le Département de Mathématiques Pures de son acceuil chaleureux et le British Science Research Council de son support financier. Enfin, je remercie M. Brelot de m'avoir encouragé à la rédaction définitive de ce travail.

1. LE PRINCIPE FAIBLE DE DOMINATION.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable et V un noyau sur $(E,\mathcal{E})$. Nous désignerons par $\mathcal{E}^+$ le cône convexe des fonctions numériques positives mesurables sur E, et par $\mathcal{L}^1(V)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles mesurables f sur E telles que $V|f| < \infty$. Le plus souvent nous considérons V comme application de $\mathcal{E}^+$ dans $\mathcal{E}^+$ ou comme opérateur linéaire de $\mathcal{L}^1(V)$ dans l'espace des fonctions réelles mesurables sur E. Le noyau V est déterminé par ses valeurs sur $\mathcal{E}^+$. On dit que V est <u>propre</u> si l'ensemble E est réunion d'une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables, tels que $V 1_{A_n} < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas le noyau V est déterminé par ses valeurs sur $\mathcal{L}^1(V)$ puisque toute fonction $f \in \mathcal{E}^+$ est égale à la limite de la suite croissante $(f \wedge n 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{L}^1(V)$. En outre nous utiliserons les définitions et notations de Meyer [7], Ch. IX et X.

<u>DEFINITION 1.1.</u> Une fonction $u \in \mathcal{E}^+$ est appelée <u>V-surmédiane</u> si pour tout nombre réel $\lambda > 0$ et pour tout couple de fonctions $f,g \in \mathcal{L}^1(V)$ la relation

$$V f = g + \lambda V g \quad \text{et} \quad u \geq f \quad \text{entraine} \quad u \geq \lambda g .$$

Le noyau V satisfait au <u>principe faible de domination</u> (resp. au <u>principe faible du maximum</u>) si la fonction constante 0 (resp. 1) est V-surmédiane.

La fonction constante ∞ est toujours V-surmédiane. Avec u toutes les fonctions λu sont V-surmédianes où $\lambda > 0$. L'enveloppe inférieure d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de fonctions V-surmédianes est V-surmédiane si elle est mesurable. Alors le noyau V satisfait au principe faible de domination si et seulement s'il existe une fonction V-surmédiane partout finie. En particulier, le principe faible du maximum entraine le principe faible de domination.

<u>*PROPOSITION 1.2.*</u> *Si V satisfait au principe faible de domination, alors pour tout $\lambda > 0$ le noyau $I + \lambda V$ est injectif sur*

$L^1(I + \lambda V)$ où I désigne le noyau identité sur $(E, \mathcal{E})$.

Démonstration. On a $L^1(I + \lambda V) = L^1(V)$. Soient $\lambda > 0$ et $g \in L^1(V)$ tels que $g + \lambda V g = 0 = V 0$. Alors $0 \geq \lambda g$ et de même $0 \geq \lambda(-g)$, donc $g = 0$.

On appelle noyau potentiel d'une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $(E, \mathcal{E})$ le noyau $V_0 := \lim_{\lambda\downarrow 0} V_\lambda$ sur $(E, \mathcal{E})$.

PROPOSITION 1.3. Soit V un noyau propre qui satisfait au principe faible de domination. Alors il existe au plus une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ telle que l'on ait $V_0 = V$.

Démonstration. Soient $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ et $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ deux résolvantes telles que l'on ait $V_0 = W_0 = V$, et soit $f \in L^1(V)$. On a d'après l'équation résolvante

$$V f = (I + \lambda V) V_\lambda f = (I + \lambda V) W_\lambda f$$

pour tout $\lambda > 0$, et les mêmes égalités pour $|f|$ avec $V|f| < \infty$. On a donc $V_\lambda f, W_\lambda f \in L^1(I + \lambda V)$ et $V_\lambda f = W_\lambda f$ par la Proposition 1.2. Le noyau V étant propre, toute fonction $g \in \mathcal{E}^+$ est égale à la limite d'une suite croissante de fonctions de $L^1(V)$. On a donc aussi $V_\lambda g = W_\lambda g$, ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 1.4. Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une résolvante sur $(E, \mathcal{E})$. Une fonction $u \in \mathcal{E}^+$ est appelée surmédiane (par rapport à $(V_\lambda)_{\lambda>0}$) si l'on a

$$u \geq \lambda V_\lambda u \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0 .$$

Evidemment l'ensemble des fonctions surmédianes est un sous-cône convexe de $\mathcal{E}^+$ contenant les fonctions constantes 0 et ∞ , et stable pour les enveloppes inférieures de familles finies et les enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes pourvu que ces enveloppes soient mesurables. D'après l'équation résolvante les fonctions Vf avec $f \in \mathcal{E}^+$ sont surmédianes.

PROPOSITION 1.5. Soit $V = V_0$ le noyau potentiel d'une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$. Alors toute fonction surmédiane est V-surmédiane. De plus, si V est propre on a la réciproque, et les deux notions coïncident.

Démonstration. Soit u une fonction surmédiane. Considérons $\lambda > 0$ et $f, g \in L^1(V)$ tels que $V f = g + \lambda V g$ et $u \geq f$. D'après l'équation résolvante pour $V f$ et $V g$ nous avons

$$V_\lambda f = (I - \lambda V_\lambda) V f = (I - \lambda V_\lambda) g + (I - \lambda V_\lambda) \lambda V g = g$$

puisque tous les termes sont partout finis. Donc $u \geqq \lambda V_\lambda u \geqq \lambda V_\lambda f = \lambda g$, et u est bien V-surmédiane.

Si V est propre, toute fonction V-surmédiane u est égale à la limite d'une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L^1(V)$. On a d'après l'équation résolvante

$$V u_n = V_\lambda u_n + \lambda V V_\lambda u_n \quad \text{et} \quad u \geqq u_n ,$$

donc $u \geqq \lambda V_\lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$. Il en résulte $u \geqq \lambda V_\lambda u$, et u est surmédiane.

<u>COROLLAIRE 1.6</u>. *Le noyau potentiel* V_o *d'une résolvante* $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ *satisfait au principe faible de domination. Si la résolvante est sous-markovienne, alors* V_o *satisfait au principe faible du maximum. De plus, si* V_o *est propre on en a la réciproque.*

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de Hunt [6] sur l'existence d'une résolvante sous-markovienne associée à un noyau uniforme. Les résolvantes que nous construisons ici ne sont plus sous-markoviennes en général, mais toujours composées de noyaux bornés. Nous nous inspirons de la démonstration donnée par Constantinescu-Cornea [2], Proposition 10.2.2, pour l'existence d'une résolvante sous-markovienne sur un espace harmonique.

On dit que le noyau V est <u>borné</u> si la fonction $V1$ est bornée.

<u>THEOREME 1.7</u>. *Soit* V *un noyau borné. Pour que* V *soit le noyau potentiel d'une résolvante* $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ *sur* $(E, \mathcal{E})$ *il faut et il suffit que* V *satisfasse au principe faible de domination. Cette résolvante est alors unique et composée de noyaux bornés.*

<u>Démonstration</u> : Il reste à montrer que la condition est suffisante. Considérons V comme opérateur linéaire continu sur l'espace de Banach $\mathcal{E}_b$ des fonctions mesurables bornées, muni de la norme uniforme, et notons $L(\mathcal{E}_b)$, avec norme $\|.\|$, l'espace de Banach de tels opérateurs. Soit A l'ensemble des nombres $\lambda \geqq 0$ tels qu'il existe un opérateur $V_\lambda \in L(\mathcal{E}_b)$ avec les propriétés

$$V = (I + \lambda V) V_\lambda \quad \text{et} \quad V V_\lambda = V_\lambda V .$$

Alors nous avons $0 \in A$ et $V_o = V$. Comme $\mathcal{E}_b$ est contenu dans $L^1(V)$ et $I + \lambda V$ est injectif sur $L^1(V)$ par Proposition 1.2, l'opérateur V_λ est unique pour tout $\lambda \in A$. Comme on a

$V f = V_\lambda f + \lambda V V_\lambda f$ pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_b$ telle que $0 \geqq f$ et pour tout $\lambda \in A$, le principe faible de domination entraine $0 \geqq \lambda V_\lambda f$. Par conséquent V_λ est un opérateur positif sur $\mathcal{E}_b$. Il résulte donc de la relation $V 1 = V_\lambda 1 + \lambda V V_\lambda 1$ que $\| V_\lambda \| \leqq \| V \| < \infty$ pour tout $\lambda \in A$.

Nous allons montrer que $A = \mathbb{R}_+$. Soient $\lambda \in A$ et $\mu \geqq 0$ un nombre tel que $|\mu-\lambda| < \| V_\lambda \|^{-1}$. La série

$$U := \Sigma_{n=0}^{\infty} (\lambda-\mu)^n V_\lambda^{n+1}$$

converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_b)$, et nous avons $U V_\lambda = V_\lambda U$, $U V = V U$ et $U + (\mu-\lambda) V_\lambda U = V_\lambda$. De plus,

$$\begin{aligned} V = (I + \lambda V) V_\lambda &= (I + \mu V + (\lambda-\mu) V)(U + (\mu-\lambda) V_\lambda U) \\ &= (I + \mu V) U + (\lambda-\mu)(V - V_\lambda - \mu V V_\lambda - (\lambda-\mu) V V_\lambda) U \\ &= (I + \mu V) U , \end{aligned}$$

donc $\mu \in A$ et $V_\mu = U$. Puisqu'on a $0 < \| V \|^{-1} \leqq \| V_\lambda \|^{-1}$, on peut couvrir $\mathbb{R}_+$, en partant de $0 \in A$, par une suite d'intervalles de longueur fixe où l'on sait construire des opérateurs V_λ, et on a bien $A = \mathbb{R}_+$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}_b$, décroissante vers 0 en tout point $x \in E$. On a alors

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} V_\lambda f_n(x) \leqq \lim_{n\to\infty} V f_n(x) = 0 .$$

Les applications $f \to V_\lambda f(x)$ sur $\mathcal{E}_b$ définissent donc des mesures, et les opérateurs V_λ s'étendent à des noyaux bornés sur $(E,\mathcal{E})$. On vérifie aisément l'équation résolvante, et on a bien une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ à noyau potentiel $V_0 = V$ et unique d'après Proposition 1.3.

COROLLAIRE 1.8. *Soit V un noyau borné. Pour que V soit le noyau potentiel d'une résolvante sous-markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ sur $(E,\mathcal{E})$ il faut et il suffit que V satisfasse au principe faible du maximum. Cette résolvante est alors unique.*

Ceci est une conséquence immédiate du Corollaire 1.6 et du théorème précédent.

2. LE PRINCIPE DE DOMINATION.

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable et V un noyau sur $(E,\mathcal{E})$. Nous désignerons par $\mathcal{L}_+^1(V)$ le cône convexe des fonctions positives appartenant à $\mathcal{L}^1(V)$. Les définitions suivantes ont été données par Deny [4] dans le cas d'un noyau - diffusion sur un espace localement compact, et reformulées par Meyer pour des noyaux sur un espace mesurable (voir [7], X.D 1 et 2).

DEFINITION 2.1. On dit que le noyau V satisfait au principe de domination si pour tout couple de fonctions $f,g \in \mathcal{E}^+$, la relation

$$V f \geq V g \quad \text{sur} \quad \{g > 0\} \quad \text{entraine} \quad V f \geq V g ,$$

où $\{g > 0\}$ dénote l'ensemble $\{x \in E : g(x) > 0\}$. On dit que V satisfait au principe complet du maximum si pour toute constante $a \geq 0$, pour tout couple de fonctions $f,g \in \mathcal{E}^+$, la relation

$$a + V f \geq V g \quad \text{sur} \quad \{g > 0\} \quad \text{entraine} \quad a + V f \geq V g .$$

Evidemment le principe complet du maximum entraine celui de domination. La proposition suivante caractérise le principe de domination. La propriété (e) ci-dessous, propriété clé de la construction de résolvantes non bornées, est l'analogue du principe faible du maximum positif introduit par Meyer (voir [7], X.3), qui de son tour est un affaiblissement léger du principe du maximum positif de Hunt [6] (voir Deny [4]).

PROPOSITION 2.2. Pour les énoncés suivants nous avons les implications (a) $\Rightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e). De plus, si V est propre, ils sont tous équivalents.

a) V satisfait au principe de domination.

b) Pour tout couple de fonctions $f,g \in L^1_+(V)$, la relation
$V f \geq V g$ *sur* $\{g > 0\}$ *entraine* $V f \geq V g$.

c) Pour tout couple de fonctions $f,g \in L^1_+(V)$, la relation
$V f \geq V g$ *sur* $\{g > f\}$ *entraine* $V f \geq V g$.

d) Pour toute fonction $f \in L^1(V)$, la relation
$V f \geq 0$ *sur* $\{f < 0\}$ *entraine* $V f \geq 0$.

e) Pour toute fonction $f \in L^1(V)$, pour tout $x \in E$, la relation
$V f(x) > 0$ *entraine* $\sup_{y\in\{f>0\}} V f(y) > 0$.

Démonstration. L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est immédiate.

(b) $\Rightarrow$ (c). Soient $f,g \in L^1_+(V)$ telles que $V f \geq V g$ sur $\{g > f\}$. Posons $g' := g\, 1_{\{g>f\}}$, $g'' := g\, 1_{\{g\leq f\}}$ et $f' := f-g''$. Les fonctions g',g'',f' appartiennent à $L^1_+(V)$, et l'on a sur l'ensemble $\{g > f\} = \{g' > 0\}$

$$V f' = V f - V g'' \geq V g - V g'' = V g' ,$$

donc $V f' \geq V g'$ sur E par (b). Il en résulte $V f \geq V g$, donc (c).

(c) $\Rightarrow$ (d) résulte de la décomposition $f = f^+ - f^-$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Considérons $f \in L^1(V)$ et $x \in E$ tels que $V f(x) > 0$, et supposons $V f \leq 0$ sur $\{f > 0\}$. Nous avons alors $V(-f) \geq 0$ sur $\{-f < 0\}$. Par (d) il vient $V(-f) \geq 0$ sur E ce qui est une contradiction, donc (e).

(e) $\Rightarrow$ (b). Soient $f,g \in L^1_+(V)$ telles que $V f \geq V g$ sur $\{g > 0\}$. Posons $h := g - f$. L'ensemble $\{h > 0\}$ est contenu dans $\{g > 0\}$ et nous avons $0 \geq V h$ sur $\{h > 0\}$. Par (e) il vient $0 \geq V h$ sur E, donc (b).

(b) $\Rightarrow$ (a). Supposons maintenant que V soit propre. Soient $f,g \in E^+$ telles que $V f \geq V g$ sur $\{g > 0\}$. Alors f et g sont égales aux limites de suites croissantes, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement, de fonctions appartenant à $L^1_+(V)$, et il suffit de montrer $V f \geq V g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et posons pour $m,n \in \mathbb{N}$

$$A_{mn} := \{(1+\varepsilon)\, V f_m \geq V g_n\} \subset E .$$

Pour n fixé, les ensembles A_{mn} croissent avec m et l'on a $\{g_n > 0\} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{mn}$ puisque $V f_m$ croit vers $V f$ et $\{g_n > 0\} \subset \{g > 0\}$. De la définition des ensembles A_{mn} il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$(1+\varepsilon)\, V f_m \geq V(g_n 1_{A_{mn}}) \quad \text{sur } A_{mn} ,$$

donc la même inégalité sur E par (b). Il en résulte $(1+\varepsilon) V f \geq V g_n$ ce qui achève la démonstration puisque ε et n étaient arbitraires.

La propriété (d) donne lieu à une interprétation du principe de domination : Considérons Vf comme potentiel d'une distribution de charges électriques à densité f. Si le potentiel des charges positives prévaut là où les charges négatives prévalent, alors il prévaut partout.

<u>*COROLLAIRE 2.3*</u>. *Le principe de domination entraine le principe faible de domination.*

<u>Démonstration</u> : Considérons $\lambda > 0$ et $f,g \in L^1(V)$ tels que la relation $V f = g + \lambda V g$ et $0 \geq f$ soit satisfaite. Supposons $0 < \lambda g(x)$ pour un $x \in E$. Nous avons $g = V(f - \lambda g)$ et la propriété (e) ci-dessus garantit $g(y) = V(f - \lambda g)(y) > 0$ pour au moins un point $y \in \{f - \lambda g > 0\}$. Mais alors $0 \geq f(y) > \lambda g(y)$ ce qui est une contradiction. Donc $0 \geq \lambda g$.

L'exemple suivant du à Meyer [7], X.67 montre qu'il n'y a pas d'équivalence entre les deux principes, même pas pour le noyau potentiel

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

d'une résolvante. Soit $E = \{a,b\}$ un espace composé de deux points, et posons pour tout $\lambda \geqq 0$ et pour tout $f \in \mathcal{E}^+$

$$V_\lambda f(a) := 0 \ , \ V_\lambda f(b) := f(a) \ .$$

Les noyaux composés $V_\lambda V_\mu$ sont identiquement nuls, de sorte que l'équation résolvante est bien vérifiée. Le noyau potentiel V_0 de la résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ satisfait donc au principe faible de domination d'après Corollaire 1.6. Il résulte du théorème de domination de Meyer [7], IX. T 68 que V_0 ne satisfait pas au principe de domination.

On pourrait caractériser le principe complet du maximum de façon analogue à la Proposition 2.2 où le principe faible du maximum positif de Meyer [7], X.3 entrerait comme propriété (e). Nous nous bornerons à l'énoncé suivant :

<u>PROPOSITION 2.4</u>. *Le principe complet du maximum entraine le principe faible du maximum. De plus, si V est propre et le noyau potentiel d'une résolvante nous en avons la réciproque.*

<u>Démonstration</u>. Soit V un noyau satisfaisant au principe complet du maximum. Considérons $\lambda > 0$ et $f,g \in L^1(V)$ tels que $V f = g + \lambda V g$ et $1 \geqq f$. Supposons $1 < \lambda g(x)$ pour un $x \in E$. Nous avons $g = V(f - \lambda g)$, et le principe faible du maximum positif de Meyer [7], X.3 entraine

$$\sup_{y \in E} g(y) = \sup_{y \in \{f-\lambda g>0\}} g(y) \ ,$$

donc $1 < \lambda g(y)$ pour au moins un point $y \in \{f - \lambda g > 0\}$. Mais alors $1 \geqq f(y) > \lambda g(y)$ et c'est la contradiction cherchée. La fonction constante 1 est bien V-surmédiane.

Supposons maintenant que V soit propre et le noyau potentiel d'une résolvante, et qu'il satisfasse au principe faible du maximum. La résolvante est alors sous-markovienne d'après Corollaire 1.6, les fonctions du type $a + V f$ où $a \geqq 0$ est une constante et $f \in \mathcal{E}^+$, sont surmédianes et V satisfait au principe complet du maximum par Meyer [7], X. T 69.

3. <u>LA CONSTRUCTION DE RESOLVANTES A NOYAU POTENTIEL NON BORNE</u>.

Soit V un noyau sur un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$. Si V n'est pas borné il n'existe pas toujours une résolvante à noyau potentiel V même si V est propre et satisfait au principe de domination.

Meyer [7], X.9 a donné l'exemple d'un noyau propre V satisfaisant au principe complet du maximum pour lequel il ne peut y avoir de résolvante sous-markovienne à noyau potentiel V, et il ne peut y avoir de résolvante autre que sous-markovienne d'après Corollaire 1.6. Il nous faut donc des hypothèses supplémentaires sur V. Remarquons encore que le noyau potentiel d'une résolvante markovienne $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, cas intéressant en théorie des processus de Markov, ne peut pas être borné. En effet, la relation $\lambda V_\lambda 1 = 1$ entraine $V 1 = \lim_{\lambda\downarrow 0} V_\lambda 1 = \infty$ partout.

<u>DEFINITION 3.1</u>. On dit que le noyau V est <u>strictement propre</u> si l'ensemble E est réunion d'une suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $V 1_{A_n} < c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où les c_n sont des nombres finis.

Dans ce cas il existe des fonctions bornées strictement positives $a \in \mathcal{E}^+$ telles que Va soit bornée. En effet, la fonction $a := \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} 2^{-n} 1_{A_n}$ répond à la question, avec $a < 1$ et $V a < 1$ si l'on choisit les $c_n > 1$.

Evidemment tout noyau strictement propre est propre. Il résulte d'un lemme de Hunt [6] que les deux notions sont équivalentes pour tout noyau satisfaisant au principe complet du maximum. Cet argument n'est plus valable si V ne satisfait qu'au principe de domination.

Soit V un noyau strictement propre satisfaisant au principe de domination, et soit $a \in \mathcal{E}^+$ une fonction bornée strictement positive telle que $V a$ soit bornée. Posons pour tout $f \in \mathcal{E}^+$

$$W f := V(af) .$$

Alors W est un noyau borné sur $(E,\mathcal{E})$ tel que $W 1 = V a$, et W satisfait au principe de domination. En effet, soient $f,g \in \mathcal{E}^+$ telles que $W f \geq W g$ sur $\{g > 0\}$. Alors $V(af) \geq V(ag)$ sur $\{ag > 0\}$, donc $V(af) \geq V(ag)$ partout puisque V satisfait au principe de domination. D'après Corollaire 2.3 et Théorème 1.7 il existe une résolvante unique $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ composée de noyaux bornés sur $(E,\mathcal{E})$ et telle que $W_0 = W$.

Il résulte de Meyer [7], IX.T 70 qu'une fonction $u \in \mathcal{E}^+$ est surmédiane par rapport à $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ si et seulement si pour tout couple de fonctions $f,g \in \mathcal{E}^+$ la relation

$$u + Wf \geq Wg \text{ sur } \{g > 0\} \text{ entraine } u + Wf \geq Wg .$$

On voit que l'on peut remplacer W par V dans cet énoncé. La notion de fonction surmédiane est donc indépendente de W et de la fonction a choisie, et ne dépend que de V.

Pour fonctions surmédianes u,v on dit que u est <u>spécifiquement plus grand</u> que v s'il y a une fonction surmédiane s telle que $u + s = v$. Ceci définit une relation d'ordre appelée <u>ordre spécifique</u>. La définition et le lemme suivant sont dus à Taylor [8].

<u>DEFINITION 3.2.</u> Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables croissante vers E. Une fonction surmédiane u est appelée <u>potentiel</u> (par rapport à $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$) si pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une fonction surmédiane s et un ensemble A_n tels que

$$s(x) < \varepsilon \quad \text{et} \quad u \leqq s \quad \text{sur} \quad \complement A_n \ .$$

Ceci revient à dire $\inf_{n \in \mathbb{N}} R_{\complement A_n} u = 0$ si l'on définit une fonction réduite

$$R_B u := \inf \{v \ \text{surmédiane}, \ v \geqq u \ \text{sur} \ B\}$$

pour tout ensemble $B \subset E$. Dans la suite nous ne considérons que des potentiels relatifs à une suite fixe d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'ensemble des potentiels est un sous-cône convexe de $\mathcal{E}^+$. Toute fonction surmédiane majorée par un potentiel est un potentiel.

<u>*LEMME 3.3.*</u> *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite spécifiquement croissante de potentiels telle que la fonction $u := \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est finie. Alors u est un potentiel.*

<u>Démonstration.</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a une fonction surmédiane t_n telle que l'on ait $u_{n+1} = u_n + t_n$. Posons $s_n := \Sigma_{m \geq n} t_m$. Alors s_n est surmédiane et $u = u_n + s_n$. Etant donnés $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m(x) < \varepsilon$, et s et A_n tels que $s(x) < \varepsilon$ et $u_m \leqq s$ sur $\complement A_n$. Alors $t := s + s_m$ est surmédiane et nous avons $t(x) < 2\varepsilon$ et $u \leqq t$ sur $\complement A_n$. Donc u est un potentiel.

Dans la proposition suivante les hypothèses faites sur le noyau V n'interviennent que dans la notion de fonction surmédiane et son indépendance par rapport aux résolvantes $(W_\lambda)_{\lambda > 0}$ et aux fonctions a choisies, ainsi que dans l'implication (f) $\Rightarrow$ (a).

<u>*PROPOSITION 3.4.*</u> *Supposons que V soit strictement propre et qu'il satisfasse au principe de domination. Les énoncés suivants sont équivalents :*

a) il existe une suite d'ensembles mesurables $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *croissante vers* E *et telle que les fonctions* $V\,1_{B_n}$ *soient des potentiels bornés.*

b) Il existe une fonction bornée strictement positive $g \in E^+$ *telle que* $V\,g$ *soit un potentiel borné.*

c) Il existe une fonction finie strictement positive $g \in E^+$ *telle que* $V\,g$ *soit un potentiel fini.*

d) Il existe une suite d'ensembles mesurables $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *croissante vers* E *et telle que les fonctions* $V\,1_{B_n}$ *soient des potentiels finis.*

e) Pour toute fonction $f \in E^+$ *telle que* $V\,f$ *soit finie,* $V\,f$ *est un potentiel.*

f) Pour toute fonction $f \in E^+$ *telle que* f *et* $V\,f$ *soient bornées,* $V\,f$ *est un potentiel.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) . Soit $V\,1_{B_n} < c_n$ avec des nombres finis $c_n > 1$. La fonction $g := \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}\,2^{-n}\,1_{B_n}$ répond à la question d'après le Lemme 3.3.

(b) $\Rightarrow$ (c) est évident.

(c) $\Rightarrow$ (d). Les ensembles $B_n := \{g \geq 1/n\}$ répondent à la question puisque $V\,1_{B_n} \leq n\,V\,g$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Soit $f \in E^+$ telle que $V\,f$ soit finie. Les fonctions $f_n := f \wedge n\,1_{B_n}$ appartiennent à E^+ , et les $V\,f_n$ forment une suite de potentiels spécifiquement croissante vers $V\,f$ qui est donc un potentiel d'après Lemme 3.3.

(e) $\Rightarrow$ (f) est évident.

(f) $\Rightarrow$ (a) résulte du fait que V est strictement propre.

Maintenant nous sommes en mesure d'adapter la méthode de Taylor [8] pour construire des résolvantes non nécessairement sous-markoviennes à noyau potentiel non borné. Le théorème suivant contient le Théorème 2 de Taylor [8] puisque tout noyau propre satisfaisant au principe complet du maximum est strictement propre.

THEOREME 3.5. Soit V *un noyau strictement propre satisfaisant au principe de domination. Supposons que* E *soit réunion d'une suite croissante* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'ensembles mesurables tels que les fonctions* $V\,1_{A_n}$ *soient des potentiels finis par rapport à* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *. Alors il existe une résolvante unique* $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ *à noyau potentiel* $V_0 = V$ *.*

<u>Démonstration</u>. L'unicité résulte du Corollaire 2.3 et de la Proposition 1.3. Montrons l'existence de la résolvante associée à V.

D'après Proposition 3.4, l'ensemble E est réunion d'une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que les $V\,1_{K_n} < c_n$ soient des potentiels bornés par des nombres finis $c_n > 1$. La fonction $a := \Sigma_{n=1}^{\infty}\, c_n^{-1}\, 2^{-n}\, 1_{K_n}$ appartient à $\mathcal{E}^+$, est strictement positive, et vérifie $a < 1$ et $V\,a < 1$. Posons $a_n := 1 \wedge n\,a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 en croissant, les fonctions $V\,a_n$ sont bornées, et pour tout ensemble K_n il y a un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$K_n \subset \{a_m = 1\} = \{a \geq 1/m\} \quad .$$

Désignons par $\mathcal{E}_c$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables bornées $f \in \mathcal{E}_b$ telles que $\{f \neq 0\} \subset K_n$ pour un indice $n \in \mathbb{N}$, et par $\mathcal{E}_c^+$ le cône convexe des fonctions positives de $\mathcal{E}_c$. Alors pour tout $f \in \mathcal{E}_c$ les fonctions f/a_n sont bornées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$V^n f := V(a_n\, f) \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{E}^+$$

définit un noyau borné V^n sur $(E,\mathcal{E})$ qui satisfait au principe de domination. La suite $(V^n\, f)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $V\,f$ en croissant. D'après Corollaire 2.3 et Théorème 1.7 il existe des résolvantes $(V_\lambda^n)_{\lambda>0}$ sur $(E,\mathcal{E})$ à noyau potentiel $V_0^n = V^n$.

Fixons $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{E}_c^+$ et posons $k_n := V^n(f/a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions k_n appartiennent à $\mathcal{E}^+$, sont bornées, et $k_n = V_\lambda^n\, f$ dès que n est assez grand. De l'équation résolvante il vient

$$k_n = V^n((f/a_n) - \lambda\, k_n) = V(f - \lambda\, a_n\, k_n) \quad .$$

Nous allons montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Supposons, pour $m < n$, qu'il y ait un $x \in E$ tel que $k_m(x) < k_n(x)$. Nous avons $k_n - k_m = \lambda\, V(a_m k_m - a_n\, k_n)$, et la Proposition 2.2 (e) entraine $(k_n - k_m)(y) > 0$ pour au moins un point $y \in \{a_m k_m - a_n k_n > 0\}$. Mais alors $(k_m - k_n)(y) > 0$ puisque $0 < a_m \leq a_n$, et ceci est une contradiction.

Il en résulte que la limite $V_\lambda\, f := \lim_{n\to\infty} V_\lambda^n\, f$ existe pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in \mathcal{E}_c^+$, et qu'elle est mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}_c^+$, décroissante vers 0 en tout point $x \in E$. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} V_\lambda f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} V_\lambda^m f_n(x) = 0 .$$

D'après le théorème de Daniell-Stone les formes linéaires positives $f \to V_\lambda f(x)$ sur $\mathcal{E}_c$ définissent des mesures sur $(E,\mathcal{E})$, et les V_λ s'étendent à des noyaux sur $(E,\mathcal{E})$, non bornés en général, mais à restriction bornée sur tout ensemble K_n .

Il reste à montrer que $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est une résolvante à noyau potentiel $V_0 = V$. Ceci se fait de la même manière que dans Taylor [8]. On trouvera une exposition complète dans Barth [1].

Remarques 3.6. 1) Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ la résolvante construite sous les hypothèses du théorème précédent. En appliquant encore une fois le critère de Meyer [7], IX.T 70, on voit que les fonctions surmédianes par rapport à $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ coïncident avec les fonctions surmédianes par rapport aux résolvantes $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ qui ont été utilisées dans la Définition 3.2 pour définir la notion de potentiel.

2) Soit V un noyau borné satisfaisant au principe faible de domination. D'après Théorème 1.7 il existe alors une résolvante de noyau potentiel V permettant de définir les fonctions surmédianes. Posons $A_n := E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $V\,1 = V\,1_{A_n}$ est alors bornée et un potentiel par rapport à $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque la fonction constante 0 est surmédiane et la deuxième condition est vide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTH Th.

- Potential Theory : an Introduction.
  London - San Francisco - Melbourne ; Pitman (à paraître).

[2] CONSTANTINESCU C., CORNEA A.

- Potential Theory on Harmonic Spaces.
  Berlin - Heidelberg - New-York ; Springer 1972.

[3] DENY J.

- Les noyaux élémentaires.
  Séminaire de théorie du potentiel, 4e année, 1959/60, n° 4, 12 p. Paris ; Institut Henri Poincaré 1960.

[4] DENY J.

- Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel.
  Séminaire de théorie du potentiel, 5e année, 1960/61, n° 6, 9 p. Paris ; Institut Henri Poincaré 1961.

[5] DENY J.

- Eléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt.
  Séminaire de théorie du potentiel, 5e année, 1960/61, n° 8, 8 p. Paris ; Institut Henri Poincaré 1961.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com