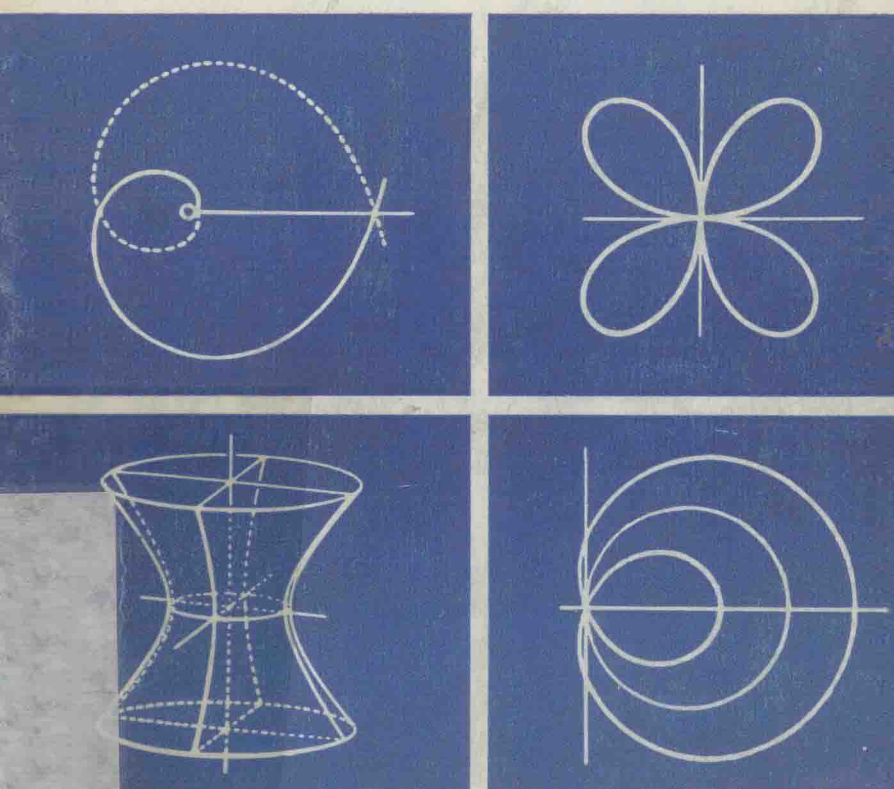
Д. В. КЛЕТЕНИК

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ



Д. В. КЛЕТЕНИК

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под редакцией проф. Н. В. ЕФИМОВА

ИЗДАНИЕ ТРИНАДЦАТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено*
*Министерством высшего и среднего*
*специального образования СССР*
*в качестве учебного пособия*
*для студентов высших учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1980

22.151.5
К 48
УДК 516

*От издательства*

Настоящее (тринадцатое) издание книги не отличается от предыдущего (1975 г.)

***Давид Викторович Клетеник***

**Сборник задач по аналитической геометрии**

М., 1980 г., 240 стр. с илл.

Редакторы *Ф. И. Кизнер, В. В. Донченко*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11596

Печать с матриц. Подписано к печати 06.03.80. Бумага 84×108 1/32, тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 14,73. Тираж 200 000 экз. (2-й завод 100 001—200 000). Заказ № 2952.
Цена книги 55 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Измайловский проспект, 29 в типографии № 2 изд-ва «Наука», Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

К $\frac{20203-030}{053(02)-80}$ 11-80. 1702040000

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## ГЛАВА 1

# ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

### § 1. Ось и отрезок оси. Координаты на прямой

Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется осью. Отрезок оси, ограниченный какими-нибудь точками $A$ и $B$, называется направленным, если сказано, какая из этих точек считается началом отрезка, какая — концом. Направленный отрезок с началом $A$ и концом $B$ обозначается символом $\overline{AB}$. Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком плюс, если направление отрезка (т. е. направление от начала к концу) совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, если это направление противоположно положительному направлению оси. Величина отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом $AB$, его длина — символом $|AB|$. Если точки $A$ и $B$ совпадают, то, определяемый ими отрезок называется нулевым; очевидно, в этом случае $AB = BA = 0$ (направление нулевого отрезка следует считать неопределенным).

Пусть дана произвольная прямая $a$. Выберем некоторый отрезок в качестве единицы измерения длин, назначим на прямой $a$ положительное направление (после чего она становится осью) *) и отметим на этой прямой буквой $O$ какую-нибудь точку. Тем самым на прямой $a$ будет введена система координат.

Координатой любой точки $M$ прямой $a$ (в установленной системе координат) называется число $x$, равное величине отрезка $OM$:

$$x = OM.$$

Точка $O$ называется началом координат; ее собственная координата равна нулю. В дальнейшем символ $M(x)$ означает, что точка $M$ имеет координату $x$.

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две произвольные точки прямой $a$, то формула

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

выражает величину отрезка $\overline{M_1M_2}$, формула

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

выражает его длину.

---

*) Обычно на чертежах у горизонтальных осей положительным назначается направление слева направо.

**1.** Построить точки $A(3)$, $B(5)$, $C(-1)$, $D\left(\frac{2}{3}\right)$, $E\left(-\frac{3}{7}\right)$, $F(\sqrt{2})$, $H(-\sqrt{5})$.

**2.** Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: 1) $|x| = 2$; 2) $|x-1| = 3$; 3) $|1-x| = 2$; 4) $|2+x| = 2$.

**3.** Охарактеризовать геометрически расположение точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: 1) $x > 2$; 2) $x-3 \leqslant 0$; 3) $12-x < 0$; 4) $2x-3 \leqslant 0$; 5) $3x-5 > 0$; 6) $1 < x < 3$; 7) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 8) $\frac{2-x}{x-1} > 0$; 9) $\frac{2x-1}{x-2} > 1$; 10) $\frac{2-x}{x-1} < 0$; 11) $\frac{2x-1}{x-2} < 1$; 12) $x^2-8x+15 \leqslant 0$; 13) $x^2-8x+15 > 0$; 14) $x^2+x-12 > 0$; 15) $x^2+x-12 \leqslant 0$.

**4.** Определить величину $AB$ и длину $|AB|$ отрезка, заданного точками: 1) $A(3)$ и $B(11)$; 2) $A(5)$ и $B(2)$; 3) $A(-1)$ и $B(3)$; 4) $A(-5)$ и $B(-3)$; 5) $A(-1)$ и $B(-3)$; 6) $A(-7)$ и $B(-5)$.

**5.** Вычислить координату точки $A$, если известны: 1) $B(3)$ и $AB = 5$; 2) $B(2)$ и $AB = -3$; 3) $B(-1)$ и $BA = 2$; 4) $B(-5)$ и $BA = -3$; 5) $B(0)$ и $|AB| = 2$; 6) $B(2)$ и $|AB| = 3$; 7) $B(-1)$ и $|AB| = 5$; 8) $B(-5)$ и $|AB| = 2$.

**6.** Охарактеризовать геометрически расположение точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:
1) $|x| < 1$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x| \leqslant 2$; 4) $|x| \geqslant 3$; 5) $|x-2| < 3$; 6) $|x-5| \leqslant 1$; 7) $|x-1| \geqslant 2$; 8) $|x-3| \geqslant 1$; 9) $|x+1| < 3$; 10) $|x+2| > 1$; 11) $|x+5| \leqslant 1$; 12) $|x+1| \geqslant 2$.

**7.** Определить отношение $\lambda = \frac{AC}{CB}$, в котором точка $C$ делит отрезок $\overline{AB}$ при следующих данных: 1) $A(2)$, $B(6)$ и $C(4)$; 2) $A(2)$, $B(4)$ и $C(7)$; 3) $A(-1)$, $B(5)$ и $C(3)$; 4) $A(1)$, $B(13)$ и $C(5)$; 5) $A(5)$, $B(-2)$ и $C(-5)$.

**8.** Даны три точки $A(-7)$, $B(-1)$ и $C(1)$. Определить отношение $\lambda$, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

**9.** Определить отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором данная точка $M(x)$ делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

**10.** Определить координату $x$ точки $M$, делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ в данном отношении $\lambda\left(\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}\right)$.

**11.** Определить координату $x$ середины отрезка, ограниченного двумя данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

**12.** Определить координату $x$ середины отрезка, ограниченного двумя данными точками, в каждом из следующих случаев: 1) $A(3)$ и $B(5)$; 2) $C(-1)$ и $D(5)$; 3) $M_1(-1)$ и $M_2(-3)$; 4) $P_1(-5)$ и $P_2(1)$; 5) $Q_1(3)$ и $Q_2(-4)$.

**13.** Определить координату точки $M$, если известны:

1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ и $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 2$;

2) $A(2)$, $B(-5)$ и $\lambda = \frac{AM}{MB} = 3$;

3) $C(-1)$, $D(3)$ и $\lambda = \frac{CM}{MD} = \frac{1}{2}$;

4) $A(-1)$, $B(3)$ и $\lambda = \frac{AM}{MB} = -2$;

5) $A(1)$, $B(-3)$ и $\lambda = \frac{BM}{MA} = -3$;

6) $A(-2)$, $B(-1)$ и $\lambda = \frac{BM}{MA} = -\frac{1}{2}$.

**14.** Даны две точки $A(5)$ и $B(-3)$. Определить:

1) координату точки $M$, симметричной точке $A$ относительно точки $B$;

2) координату точки $N$, симметричной точке $B$ относительно точки $A$.

**15.** Отрезок, ограниченный точками $A(-2)$ и $B(19)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

**16.** Определить координаты концов $A$ и $B$ отрезка, который точками $P(-25)$ и $Q(-9)$ разделен на три равные части.

## § 2. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями. Первая из координатных осей называется осью абсцисс, а вторая — осью ординат.

Начало координат обозначается буквой $O$, ось абсцисс — символом $Ox$, ось ординат — символом $Oy$.

Координатами произвольной точки $M$ в заданной системе называют числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y$$

(рис. 1), где $M_x$ и $M_y$ суть проекции точки $M$ на оси $Ox$ и $Oy$, $OM_x$ обозначает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси абсцисс, $OM_y$ — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси ординат. Число $x$ называется абсциссой точки $M$, число $y$ называется ординатой этой же точки. Символ $M(x; y)$ обозначает, что точка $M$ имеет абсциссой число $x$, а ординатой число $y$.

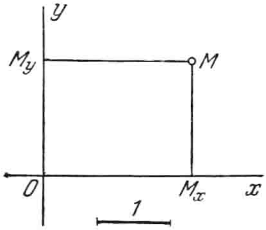


Рис. 1.

Ось $Oy$ разделяет всю плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси $Ox$, называется правой, другая — левой. Точно так же ось $Ox$ разделяет плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси $Oy$, называется верхней, другая нижней.

Обе координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре четверти, которые нумеруют по следующему правилу: первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и в верхней полуплоскости, второй — лежащая в левой и в верхней полуплоскости, третьей — лежащая в левой и в нижней полуплоскости, четвертой — лежащая в правой и в нижней полуплоскости.

**17.** Построить точки $A(2; 3)$, $B(-5; 1)$, $C(-2; -3)$, $D(0; 3)$, $E(-5; 0)$, $F\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

**18.** Найти координаты проекций на ось абсцисс точек $A(2; -3)$, $B(3; -1)$, $C(-5; 1)$, $D(-3; -2)$, $E(-5; -1)$.

**19.** Найти координаты проекций на ось ординат точек $A(-3; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -2)$, $D(-1; 1)$, $E(-6; -2)$.

**20.** Найти координаты точек, симметричных относительно оси $Ox$ точкам: 1) $A(2; 3)$; 2) $B(-3; 2)$; 3) $C(-1; -1)$; 4) $D(-3; -5)$; 5) $E(-4; 6)$; 6) $F(a; b)$.

**21.** Найти координаты точек, симметричных относительно оси $Oy$ точкам: 1) $A(-1; 2)$; 2) $B(3; -1)$; 3) $C(-2; -2)$; 4) $D(-2; 5)$; 5) $E(3; -5)$; 6) $F(a; b)$.

**22.** Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам: 1) $A(3; 3)$; 2) $B(2; -4)$; 3) $C(-2; 1)$; 4) $D(5; -3)$; 5) $E(-5; -4)$; 6) $F(a; b)$.

**23.** Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла точкам: 1) $A(2; 3)$; 2) $B(5; -2)$; 3) $C(-3; 4)$.

**24.** Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы второго координатного угла точкам: 1) $A(3; 5)$, 2) $B(-4; 3)$; 3) $C(7; -2)$.

**25.** Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x; y)$, если: 1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$; 5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

## § 3. Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки $O$, называемой полюсом, луча $OA$, исходящего из этой точки, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки $O$ считаются положительными (на чертежах обычно положительными считаются повороты против часовой стрелки).

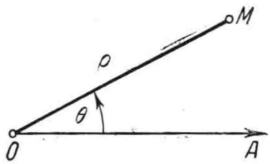


Рис. 2.

Полярными координатами произвольной точки $M$ (относительно заданной системы) называются числа $\rho = OM$ и $\theta = \sphericalangle AOM$ (рис. 2). Угол $\theta$ при этом следует понимать так, как принято в тригонометрии. Число $\rho$ называется первой координатой, или полярным радиусом, число $\theta$ — второй координатой, или полярным углом точки $M$ ($\theta$ называют также амплитудой) *).

Символ $M(\rho; \theta)$ обозначает, что точка $M$ имеет полярные координаты $\rho$ и $\theta$.

Полярный угол $\theta$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $\pm 2n\pi$, где $n$ — целое положительное число). Значение полярного угла, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \theta \leqslant +\pi$, называется главным.

В случаях одновременного рассмотрения декартовой и полярной систем координат условимся: 1) пользоваться одним и тем же масштабом, 2) при определении полярных углов считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось абсцисс, чтобы кратчайшим путем совместить ее с положительной полуосью ординат (таким образом, если оси декартовой системы находятся в обычном расположении, т. е. ось $Ox$ направлена вправо, а ось $Oy$ — вверх, то и отсчет полярных

*) Здесь $OM$ обозначает длину отрезка, понимаемую как в элементарной геометрии (т. е. абсолютно, без учета знака). Употреблять более громоздкий символ $|OM|$ в данном случае нет надобности, поскольку точки $O$ и $M$ рассматриваются как произвольные точки плоскости, а не как точки некоторой оси. Подобное упрощение символики в аналогичных случаях часто делается и дальше.

углов должен быть обычным, т. е. положительными следует считать те углы, которые отсчитываются против часовой стрелки).

При этом условии, если полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс, то переход от полярных координат произвольной точки к декартовым координатам той же точки осуществляется по формулам

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

В этом же случае формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

При одновременном рассмотрении в дальнейшем двух полярных систем координат условимся считать направление положительных поворотов и масштаб для обеих систем одинаковыми.

**26.** Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$, $B(2; \pi)$, $C\left(3; -\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(4; 3\frac{1}{7}\right)$, $E(5; 2)$ и $F(1; -1)$ (для точек $D$, $E$ и $F$ выполнить построение приближенно, пользуясь транспортиром).

**27.** Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $M_1\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4(1; 2)$ и $M_5(5; -1)$, заданным в полярной системе координат.

**28.** Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $M_1\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(4; \frac{5}{6}\pi\right)$ и $M_5(3; -2)$, заданным в полярной системе координат.

**29.** В полярной системе координат даны две вершины $A\left(3; -\frac{4}{9}\pi\right)$ и $B\left(5; \frac{3}{14}\pi\right)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

**30.** В полярной системе координат даны точки $A\left(8; -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки $A$ и $B$.

**31.** В полярной системе координат даны точки $A\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$, $C(1; \pi)$, $D\left(5; -\frac{3}{4}\pi\right)$, $E(3; 2)$ и

$F(2;\ -1)$. Положительное направление полярной оси изменено на противоположное. Определить полярные координаты заданных точек в новой системе.

**32.** В полярной системе координат даны точки $M_1\left(3;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_3(2;\ 0)$, $M_4\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(3;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $M_6\left(1;\ \frac{11}{12}\pi\right)$. Полярная ось повернута так, что в новом положении она проходит через точку $M_1$. Определить координаты заданных точек в новой (полярной) системе.

**33.** В полярной системе координат даны точки $M_1\left(12;\ \frac{4}{9}\pi\right)$ и $M_2\left(12;\ -\frac{2}{9}\pi\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки $M_1$ и $M_2$.

**34.** В полярной системе координат даны точки $M_1(\rho_1;\ \theta_1)$ и $M_2(\rho_2;\ \theta_2)$. Вычислить расстояние $d$ между ними.

**35.** В полярной системе координат даны точки $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $M_2\left(8;\ -\frac{\pi}{12}\right)$. Вычислить расстояние $d$ между ними.

**36.** В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $M_1\left(12;\ -\frac{\pi}{10}\right)$ и $M_2\left(3;\ \frac{\pi}{15}\right)$. Определить его площадь.

**37.** В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P\left(6;\ -\frac{7}{12}\pi\right)$ и $Q\left(4;\ \frac{1}{6}\pi\right)$. Определить его площадь.

**38.** В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника $A\left(4;\ -\frac{1}{12}\pi\right)$ и $B\left(8;\ \frac{7}{12}\pi\right)$. Определить его площадь.

**39.** Одна из вершин треугольника $OAB$ находится в полюсе, две другие суть точки $A(\rho_1;\ \theta_1)$ и $B(\rho_2;\ \theta_2)$. Вычислить площадь этого треугольника.

**40.** Одна из вершин треугольника $OAB$ находится в полюсе $O$, две другие суть точки $A\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(4;\ \frac{\pi}{12}\right)$. Вычислить площадь этого треугольника.

**41.** Вычислить площадь треугольника, вершины которого $A\left(3;\ \frac{1}{8}\pi\right)$, $B\left(8;\ \frac{7}{24}\pi\right)$ и $C\left(6;\ \frac{5}{8}\pi\right)$ заданы в полярных координатах.

**42.** Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5; 0)$, $M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8; \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right)$. Определить декартовы координаты этих точек.

**43.** Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $M_1(0; 5)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(\sqrt{3}; 1)$, $M_4(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_5(1; -\sqrt{3})$. Определить полярные координаты этих точек.

## § 4. Направленный отрезок. Проекция отрезка на произвольную ось. Проекции отрезка на оси координат. Длина и полярный угол отрезка. Расстояние между двумя точками

Прямолинейный отрезок называется направленным, если указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, какая — концом. Направленный отрезок, имеющий точку $A$ своим началом и точку $B$ концом (рис. 3), обозначается символом $\overline{AB}$ (т. е. так же, как отрезок оси; см. § 1). Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ (при заданном масштабе) обозначается символом $|\overline{AB}|$ (или $AB$; см. сноску на стр. 13).


Рис. 3.

Проекцией отрезка $\overline{AB}$ на ось $u$ называется число, равное величине отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси $u$, где точка $A_1$ является проекцией на ось $u$ точки $A$, а $B_1$ — проекцией на эту же ось точки $B$.

Проекция отрезка $\overline{AB}$ на ось $u$ обозначается символом пр$_u$ $\overline{AB}$. Если на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат, то проекция отрезка на ось $Ox$ обозначается символом $X$, его проекция на ось $Oy$ — символом $Y$.

Если известны координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то проекции $X$ и $Y$ на оси координат направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ могут быть вычислены по формулам

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1.$$

Таким образом, чтобы найти проекции направленного отрезка на оси координат нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.

Угол $\theta$, на который нужно повернуть положительную полуось $Ox$ так, чтобы ее направление совпало с направлением отрезка $\overline{M_1M_2}$, называется полярным углом отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Угол $\theta$ понимается, как в тригонометрии. Соответственно этому $\theta$ имеет бесконечно много возможных значений, которые отличаются друг от друга на величину вида $\pm 2n\pi$ (где $n$ — целое положительное число). Главным значением полярного угла называется то из его значений, которое удовлетворяет неравенствам $-\pi < \theta \leqslant +\pi$.

Формулы

$$X = d \cdot \cos\theta, \quad Y = d \cdot \sin\theta$$

выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и полярный угол. Отсюда же вытекают формулы

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

которые выражают длину и полярный угол отрезка через его проекции на оси координат.

Если на плоскости даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то расстояние $d$ между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**44.** Вычислить проекцию отрезка на ось $u$, если даны его длина $d$ и угол $\varphi$ наклона к оси: 1) $d = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 2) $d = 6$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; 3) $d = 7$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $d = 5$, $\varphi = 0$; 5) $d = 5$, $\varphi = \pi$; 6) $d = 4$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

**45.** Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная их проекции на координатные оси: 1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y = -5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$; 4) $X = -2$, $Y = 3$; 5) $X = 0$, $Y = 3$; 6) $X = -5$, $Y = -1$.

**46.** Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; -1)$, зная их проекции на координатные оси: 1) $X = 4$, $Y = 3$; 2) $X = 2$, $Y = 0$; 3) $X = -3$, $Y = 1$; 4) $X = -4$, $Y = -2$; 5) $X = 0$, $Y = -3$; 6) $X = 1$, $Y = -3$.

**47.** Даны точки $M_1(1; -2)$, $M_2(2; 1)$, $M_3(5; 0)$, $M_4(-1; 4)$ и $M_5(0; -3)$. Найти проекции на координатные оси следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_3M_1}$, 3) $\overline{M_4M_5}$, 4) $\overline{M_5M_3}$.

**48.** Даны проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на оси координат $X = 5$, $Y = -4$; зная, что его начало в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.

**49.** Даны проекции отрезка $\overline{AB}$ на оси координат $X = 4$, $Y = -5$; зная, что его конец в точке $B(1; -3)$, найти координаты его начала.

**50.** Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная длину $d$ и полярный угол $\theta$ каждого из них: 1) $d=5$, $\theta=\frac{\pi}{5}$; 2) $d=3$, $\theta=\frac{5}{6}\pi$; 3) $d=4$, $\theta=-\frac{\pi}{3}$; 4) $d=3$, $\theta=-\frac{4}{3}\pi$.

**51.** Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; 3)$, зная длину и полярный угол каждого из них: 1) $d=2$, $\theta=-\frac{\pi}{10}$; 2) $d=1$, $\theta=\frac{\pi}{9}$; 3) $d=5$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$ (координаты точки $M$ — декартовы).

**52.** Вычислить проекции на координатные оси отрезков, зная длину $d$ и полярный угол $\theta$ каждого из них: 1) $d=12$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$; 2) $d=6$, $\theta=-\frac{\pi}{6}$; 3) $d=2$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

**53.** Даны проекции отрезков на координатные оси: 1) $X=3$, $Y=-4$; 2) $X=12$, $Y=5$; 3) $X=-8$, $Y=6$. Вычислить длину каждого из них.

**54.** Даны проекции отрезков на координатные оси: 1) $X=1$, $Y=\sqrt{3}$; 2) $X=3\sqrt{2}$, $Y=-3\sqrt{2}$; 3) $X=-2\sqrt{3}$, $Y=2$. Вычислить длину $d$ и полярный угол $\theta$ каждого из них.

**55.** Даны точки $M_1(2; -3)$, $M_2(1; -4)$, $M_3(-1; -7)$ и $M_4(-4; 8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_1M_3}$, 3) $\overline{M_2M_4}$, 4) $\overline{M_4M_3}$.

**56.** Длина $d$ отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат: 1) острый угол, 2) тупой угол.

**57.** Длина отрезка $\overline{MN}$ равна 13; его начало в точке $M(3; -2)$, проекция на ось абсцисс равна $-12$. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат: 1) острый угол, 2) тупой угол.

**58.** Длина отрезка $\overline{MN}$ равна 17, его конец в точке $N(-7; 3)$, проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс: 1) острый угол, 2) тупой угол.

**59.** Зная проекции отрезка на координатные оси $X = 1$, $Y = -\sqrt{3}$, найти его проекцию на ось, которая составляет с осью $Ox$ угол $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

**60.** Даны две точки $M_1(1; -5)$ и $M_2(4; -1)$. Найти проекцию отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось, которая составляет с осью $Ox$ угол $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

**61.** Даны две точки $P(-5; 2)$ и $Q(3; 1)$. Найти проекцию отрезка $\overline{PQ}$ на ось, которая составляет с осью $Ox$ угол $\theta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

**62.** Даны две точки $M_1(2; -2)$ и $M_2(7; -3)$. Найти проекцию отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось, проходящую через точки $A(5; -4)$, $B(-7; 1)$ и направленную: 1) от $A$ к $B$, 2) от $B$ к $A$.

**63.** Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние $d$ между точками: 1) $A$ и $B$; 2) $B$ и $C$; 3) $A$ и $C$; 4) $C$ и $D$; 5) $A$ и $D$; 6) $D$ и $E$.

**64.** Даны две смежные вершины квадрата $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.

**65.** Даны две противоположные вершины квадрата $P(3; 5)$ и $Q(1; -3)$. Вычислить его площадь.

**66.** Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого суть $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.

**67.** Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого $D$ противоположна $B$. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

**68.** Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины суть точки $P(4; 9)$ и $Q(-2; 1)$. Вычислить площадь этого ромба.

**69.** Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины суть точки $P(3; -4)$ и $Q(1; 2)$. Вычислить длину высоты этого ромба.

**70.** Доказать, что точки $A(3; -5)$, $B(-2; -7)$ и $C(18; 1)$ лежат на одной прямой.

**71.** Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(1; 1)$, $A_2(2; 3)$ и $A_3(5; -1)$ прямоугольный.

**72.** Доказать, что точки $A(2; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(-5; 3)$ и $D(-2; -1)$ являются вершинами квадрата.

**73.** Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; -1)$ тупой угол.

**74.** Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$ и $P(0; 4)$ острые.

**75.** Вершины треугольника суть точки $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ и $C(3; 3)$. Вычислить его внутренние углы.

**76.** Вершины треугольника суть точки $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$ и $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Вычислить его внешний угол при вершине $A$.

**77.** На оси абсцисс найти такую точку $M$, расстояние которой до точки $N(2; -3)$ равнялось бы 5.

**78.** На оси ординат найти такую точку $M$, расстояние которой до точки $N(-8; 13)$ равнялось бы 17.

**79.** Даны две точки $M(2; 2)$ и $N(5; -2)$; на оси абсцисс найти такую точку $P$, чтобы угол $MPN$ был прямым.

**80.** Через точку $A(4; 2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр $C$ и радиус $R$.

**81.** Через точку $M_1(1; -2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси $Ox$. Определить центр $C$ окружности.

**82.** Определить координаты точки $M_2$, симметричной точке $M_1(1; 2)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1; 0)$ и $B(-1; -2)$.

**83.** Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 0)$ и $C(-4; 1)$. Найти две его другие вершины.

**84.** Даны две смежные вершины квадрата $A(2; -1)$ и $B(-1; 3)$. Определить две его другие вершины.

**85.** Даны вершины треугольника $M_1(-3; 6)$, $M_2(9; -10)$ и $M_3(-5; 4)$. Определить центр $C$ и радиус $R$ описанного около этого треугольника круга.

## § 5. Деление отрезка в данном отношении

Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, и дано отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором точка $M$ делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, то координаты точки $M$