

(5)
S 119
012
(5)

8192

e 22 m

0172
210
(2)

Heidelberger Taschenbücher Band 36

Hans Grauert • Wolfgang Fischer

Differential- und Integralrechnung II

2 Auflage



Hans Grauert · Wolfgang Fischer

Differential- und Integralrechnung II

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen
Differentialgleichungen

172
Zweite, verbesserte Auflage

Mit 25 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973

5710
EIO
(S)

Professor Dr. HANS GRAUERT
Mathematisches Institut der Universität
34 Göttingen, Bunsenstrasse 3—5

Professor Dr. WOLFGANG FISCHER
Fachsektion Mathematik der Universität Bremen
28 Bremen, Achterstrasse

AMS Subject Classifications (1970):

26-01, 26 A 54, 26 A 57, 34-01

ISBN 3-540-06135-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-06135-5 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

ISBN 3-540-04180-X 1. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-04180-X 1st edition Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist. © by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1968, 1973. Library of Congress Catalog Card Number 72-96045. Printed in Germany. Herstellung: Konrad Tritsch, Graphischer Betrieb, 87 Würzburg

Vorwort zur zweiten Auflage

Wir haben in der Neuauflage einige Unklarheiten beseitigt und den Text durch Beispiele über unendlich oft differenzierbare Funktionen (Partition der Eins) und über differenzierbare Abbildungen (mit konstantem Rang) ergänzt.

H. GRAUERT

W. FISCHER

Februar 1973

Vorwort zur ersten Auflage

Der nun vorliegende zweite Teil der dreibändigen Darstellung der Differential- und Integralrechnung ist der Differentialrechnung der Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen und den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Er ist gedacht etwa für Studenten im zweiten bis dritten Semester — dementsprechend wird vom Leser nur die Kenntnis des wesentlichen Teils des Stoffs von Band I und darüber hinaus Bekanntschaft mit dem Begriff des Vektorraums erwartet.

Die Autoren haben sich wieder um einen strengen und systematischen Aufbau der Theorie bemüht. Dabei waren sie bestrebt, unnötige Abstraktionen und Verallgemeinerungen zu vermeiden, sie haben jedoch gleichzeitig versucht, Definitionen und Methoden so zu bringen, daß sie sich möglichst unmittelbar auf allgemeinste Fälle übertragen lassen. Beispielsweise besagt die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit (in anderen Worten): Eine reelle Funktion f , die in einer offenen Umgebung U eines Punktes x_0 in einem Zahlenraum \mathbb{R}^n erklärt ist, heißt in x_0 differenzierbar, wenn es eine in x_0 stetige Abbildung $x \rightarrow \Delta_x$ von U in den dualen Raum $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt, so daß $f(x) = f(x_0) + \Delta_x(x - x_0)$ gilt. Diese Definition überträgt sich auf den Fall, wo x_0 Punkt eines separierten topologischen Vektorraumes E ist und die Werte von f in einem ebensolchen Vektorraum F liegen.

Man hat dazu den Raum $\text{Hom}(E, F)$ der stetigen linearen Abbildungen von E in F mit einer Pseudotopologie zu versehen¹: Man

¹ Vgl. FRÖHLICHER/BUCHER: Calculus in Vector Spaces without Norm. Lecture Notes, Springer, Berlin 1966.

betrachtet z. B. genau die Filter \mathcal{Q} auf $\text{Hom}(E, F)$ als gegen 0 konvergent, die folgende Eigenschaft haben: Für jeden Filter \mathcal{A} auf E mit $\mathfrak{N} \cdot \mathcal{A} \rightarrow 0$ gilt $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) \rightarrow 0$ in F . Dabei ist \mathfrak{N} der Filter der Nullumgebungen in \mathbb{R} , $\mathfrak{N} \cdot \mathcal{A}$ wird von den NA mit $N \in \mathfrak{N}$ und $A \in \mathcal{A}$ erzeugt, $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ von den $L(A) = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda(A)$ mit $L \in \mathcal{Q}$ und $A \in \mathcal{A}$. Man kann nun die Differenzierbarkeit genau wie oben definieren, nur ist unter $x \rightarrow \Delta_x$ jetzt eine in x_0 stetige Abbildung von U in $\text{Hom}(E, F)$ zu verstehen. Man zeigt: Da die natürliche Abbildung $\text{Hom}(E, F) \times E \rightarrow F$ stetig ist, ist Δ_{x_0} eindeutig bestimmt und kann als Ableitung von f im Punkt x_0 bezeichnet werden. Auch jetzt folgt aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit; es gilt die Kettenregel. Um zu zeigen, daß die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, muß man noch voraussetzen, daß in E zu jedem eindimensionalen Unterraum ein abgeschlossener Supplementarraum existiert (das ist z. B. bei lokalkonvexen Vektorräumen der Fall). — Die Pseudotopologie auf $\text{Hom}(E, F)$ wird nur dann zu einer Topologie, wenn man es mit normierten Vektorräumen zu tun hat; dann ergibt sich die starke oder Norm-Topologie auf $\text{Hom}(E, F)$. In der Tat scheint die Klasse der Banachräume die größte Klasse von topologischen Vektorräumen zu sein, auf die sich die tieferen Sätze der Differentialrechnung übertragen lassen.

Es sollen noch einige Angaben über den Inhalt des Buches folgen.

Im ersten Kapitel wird der n -dimensionale Raum \mathbb{R}^n eingeführt. Dann werden Wege im \mathbb{R}^n behandelt, insbesondere die Bogenlänge und der ausgezeichnete Parameter, und zwar so, daß im dritten Band Kurvenintegrale längs rektifizierbarer Wege erklärt werden können.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Topologie des \mathbb{R}^n . Die grundlegenden Begriffe wie „Umgebung“ werden so formuliert, daß sie für allgemeine topologische Räume sinnvoll bleiben. Besonders betont werden der Begriff der kompakten Menge und die verschiedenen Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen.

Kapitel III beginnt mit der Definition der Differenzierbarkeit und führt bis zur Taylorschen Formel und Taylorschen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

In Kapitel IV werden zunächst kontra- und kovariante Tangentialvektoren (Differenziale) sowie Pfaffsche Formen auf exakte Weise definiert. Die dabei benutzten Sätze der linearen Algebra werden ohne Beweis angegeben. Dann werden reguläre Abbildungen und implizite Funktionen eingehend untersucht. Schließlich wird in der Sprache der Differenziale die Auffindung lokaler Extrema mit Nebenbedingungen durch die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren dargestellt.

Bei der Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichungen in der zweiten Hälfte des Buches konnte natürlich namentlich bei den Lösungsmethoden keine Vollständigkeit angestrebt werden. Es werden aber einerseits die für den Physiker wichtigen Differentialgleichungen

ausführlich und exakt diskutiert, andererseits werden auch die für den Mathematiker wichtigen Existenz-, Eindeutigkeits- und Stabilitätssätze gebracht. Kapitel V führt in Problemstellung und Methoden ein. Hier wird auch die Schwingungsgleichung eingehend studiert.

Der Peanosche Existenzsatz wird in Kapitel VI hergeleitet. Anschließend werden Eindeutigkeit und globales Verhalten der Lösungen auf Grund der (lokalen) Lipschitz-Bedingung untersucht. Die wichtigsten Stabilitätsaussagen und Sätze über Definitionsbereich und Differenzierbarkeit der allgemeinen Lösung $\varphi(x, \xi, \eta)$, d. h. der Lösung in Abhängigkeit von den Anfangswerten, beschließen dieses Kapitel.

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Pfaffschen Formen. Die letzteren erweisen sich wegen ihrer Koordinatenunabhängigkeit als angemessen zur geometrischen Untersuchung der Integralkurvenscharen einer Differentialgleichung in der Nähe einer isolierten Singularität. Schließlich werden das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren und die Potenzreihenmethode dargestellt.

Das achte Kapitel enthält die Untersuchung der Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und der Differentialgleichungen höherer Ordnung. Insbesondere werden lineare Systeme behandelt; bis auf den Satz über die Jordansche Normalform einer Matrix werden alle benötigten Tatsachen über die Eigenwerte und -vektoren sowie über die Matrixexponentialfunktion hier bewiesen. Kapitel und Buch enden mit der Lösung einiger für die Anwendungen wichtigen speziellen Differentialgleichungen: der Besselschen, der Legendreschen und der Schrödingerschen (d. h. der radialen Komponente der Schrödinger-Gleichung des Wasserstoffatoms). Diese Gleichungen werden als Randwertaufgaben betrachtet; bei der letztgenannten ergibt sich das interessante Phänomen, daß nur für eine diskrete Folge von Werten des Parameters (d. i. im wesentlichen die Energie) Lösungen existieren, die den Randbedingungen genügen — entsprechend der von der Quantentheorie geforderten diskreten Folge von Energieniveaus des Atoms.

Göttingen, im November 1967

H. GRAUERT
W. FISCHER

Inhaltsverzeichnis

<i>Erstes Kapitel. Wege im \mathbb{R}^n</i>	1
§ 1. Der n -dimensionale Raum	1
§ 2. Wege	5
§ 3. Bogenlänge	8
§ 4. Der ausgezeichnete Parameter	12
§ 5. Spezielle Kurven	16
§ 6. Tangente und Krümmung	20
<i>Zweites Kapitel. Topologie des \mathbb{R}^n</i>	25
§ 1. Umgebungen	25
§ 2. Kompakte Mengen	30
§ 3. Punktfolgen	33
§ 4. Funktionen. Stetigkeit	35
§ 5. Funktionenfolgen	39
§ 6. Abbildungen	43
<i>Drittes Kapitel. Differentialrechnung mehrerer Veränderlichen</i>	49
§ 1. Differenzierbarkeit	49
§ 2. Elementare Regeln	53
§ 3. Ableitungen höherer Ordnung	55
§ 4. Die Taylorsche Formel	59
§ 5. Die Taylorsche Reihe	64
§ 6. Lokale Extrema	70
§ 7. Einige unendlich oft differenzierbare Funktionen	74
<i>Viertes Kapitel. Tangentialvektoren und reguläre Abbildungen</i>	78
§ 0. Einiges aus der linearen Algebra	78
§ 1. Derivationen	80
§ 2. Transformation von Tangentialvektoren	84
§ 3. Pfaffsche Formen	87
§ 4. Reguläre Abbildungen	89
§ 5. Umkehrabbildungen	95
§ 6. Gleichungssysteme und implizite Funktionen	96
§ 7. Extrema bei Nebenbedingungen	103
<i>Fünftes Kapitel. Einige Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen</i>	107
§ 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	107
§ 2. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	109
§ 3. Weitere Lösungsmethoden	113
§ 4. Die Riccatische Differentialgleichung	116
§ 5. Allgemeine Klassen von Differentialgleichungen	119
§ 6. Komplexwertige Funktionen	122
§ 7. Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	125
<i>Sechstes Kapitel. Existenzsätze</i>	133
§ 1. Gleichartig stetige Funktionen	134

§ 2. Der Existenzsatz von PEANO	136
§ 3. Die Lipschitz-Bedingung	141
§ 4. Verlauf der Integralkurven im Großen	143
§ 5. Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen	146
§ 6. Die allgemeine Lösung	151
§ 7. Die Stammfunktion einer Differentialgleichung	161
<i>Siebtes Kapitel. Lösungsmethoden</i>	163
§ 1. Pfaffsche Formen	163
§ 2. Reguläre Punkte einer Pfaffschen Form	165
§ 3. Der Eulersche Multiplikator	167
§ 4. Differenzierbare Transformationen	170
§ 5. Singularitäten Pfaffscher Formen	171
§ 6. Das Iterationsverfahren von PICARD und LINDELÖF	178
§ 7. Lösung durch Potenzreihenansatz	181
<i>Achtes Kapitel. Systeme von Differentialgleichungen, Differentialgleichungen höherer Ordnung</i>	184
§ 1. Systeme von expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung — Existenz- und Eindeutigkeitssätze	184
§ 2. Lineare Systeme erster Ordnung	187
§ 3. Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	191
§ 4. Explizite gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung	200
§ 5. Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	206
A. Die Besselsche Differentialgleichung	206
B. Die Legendresche Differentialgleichung	207
C. Die Schrödinger-Gleichung	211
Literatur	217
Wichtige Bezeichnungen	218
Namen- und Sachverzeichnis	219

I. Kapitel

Wege im \mathbb{R}^n

§ 1. Der n -dimensionale Raum

Es sei n eine natürliche Zahl. Unter dem n -dimensionalen reellen Zahlenraum (in Zeichen: \mathbb{R}^n) wollen wir die Menge aller geordneten n -tupel (x_1, \dots, x_n) von reellen Zahlen verstehen:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in \mathbb{R} \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}.$$

Ein Element des \mathbb{R}^n nennen wir auch *Punkt* und bezeichnen es abkürzend durch einen Frakturbuchstaben, z. B. $(x_1, \dots, x_n) = \xi$.

Auf der Menge \mathbb{R}^n läßt sich die algebraische Struktur eines *Vektorraums* über dem Körper \mathbb{R} (kurz: eines reellen Vektorraums) einführen: Zu zwei Elementen $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\eta = (y_1, \dots, y_n)$ werde als Summe definiert

$$\xi + \eta = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n;$$

zu einer reellen Zahl a und einem Element $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ werde als Produkt definiert

$$a\xi = (ax_1, \dots, ax_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Hilfe der Additionsaxiome für den reellen Zahlkörper prüft man leicht nach, daß \mathbb{R}^n unter der eben eingeführten Addition eine kommutative Gruppe bildet. Das neutrale Element ist das n -tupel $(0, \dots, 0)$, der „Nullvektor“ oder „Nullpunkt des \mathbb{R}^n “, den wir der Einfachheit halber auch mit 0 bezeichnen, sofern Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. — Ebenso verifiziert man unter Hinzuziehung der Multiplikations- und Distributivitätsaxiome von \mathbb{R} folgende Regeln:

$$\begin{aligned} (a+b)\xi &= a\xi + b\xi, & a(\xi + \eta) &= a\xi + a\eta, \\ a(b\xi) &= (ab)\xi, & 1 \cdot \xi &= \xi \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Steht bei einer Betrachtung die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^n im Vordergrund, so wird man die Elemente des \mathbb{R}^n als *Vektoren* bezeichnen.

Analog zur Veranschaulichung von \mathbb{R} durch die Zahlengerade läßt sich ein anschauliches Modell des \mathbb{R}^2 konstruieren: In der Ebene betrachte man zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden. Ihr Schnittpunkt heiße O . Auf einer der Geraden lege man einen Punkt E_1 fest, auf der anderen dann einen Punkt E_2 , und zwar so, daß E_2 von O denselben Abstand hat wie E_1 und daß die Punkte O, E_1, E_2 im „positiven“, d. h. dem Uhrzeigersinn entgegengesetzten Drehsinn aufeinander folgen. Die Gerade durch O, E_1 heiße x_1 -Achse ($v = 1, 2$). Man trage nun auf jeder dieser Achsen die reellen Zahlen proportional zu ihrer Gre so ab, daß die Zahl 0 über dem Punkt O liegt, die Zahl 1 über dem Punkt E_v , und die negativen Zahlen über den Punkten des von O ausgehenden, E_v nicht enthaltenden Strahls dieser Achse.

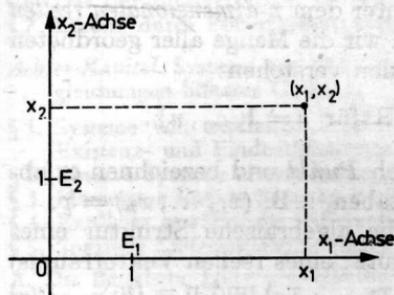


Fig. 1. Koordinaten in der Ebene

Jedem Element $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ordnen wir nun den Punkt der Ebene zu, über dessen Projektion auf die x_1 -Achse (parallel zur andern Achse genommen) die Zahl x_1 liegt. Damit wird eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von \mathbb{R}^2 und allen Punkten der Ebene hergestellt.

Für den \mathbb{R}^3 kann in ähnlicher Weise ein anschauliches Modell konstruiert werden.

Die bei diesen Konstruktionen verwandten geometrischen Vorstellungen sind hier nicht mathematisch präzisiert worden. Daher sind die Modelle als Beweishilfsmittel untauglich, wohl aber sind sie von Wert als Hilfsmittel der Vorstellung.

Wir wollen nun den Begriff des Abstands zweier Punkte im \mathbb{R}^n erklären. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

Definition 1.1. Sind $\xi = (x_1, \dots, x_n)$, $\eta = (y_1, \dots, y_n)$ irgend zwei Vektoren des \mathbb{R}^n , so wird die reelle Zahl $\sum_{v=1}^n x_v y_v$ das Skalarprodukt von ξ und η genannt und mit $\xi \cdot \eta$ bezeichnet.

Mit Hilfe der Körperaxiome von \mathbb{R} erkennt man sofort die Richtigkeit von

Satz 1.1. Das Skalarprodukt genügt folgenden Regeln:

- $$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \xi \cdot \eta = \eta \cdot \xi, \\ \text{(b)} \quad (\xi_1 + \xi_2) \cdot \eta = \xi_1 \cdot \eta + \xi_2 \cdot \eta, \\ \text{(c)} \quad (a\xi) \cdot \eta = a(\xi \cdot \eta), \\ \text{(d)} \quad \xi \cdot \xi \geq 0, \quad \xi \cdot \xi = 0 \text{ gilt genau für } \xi = 0. \end{array} \right\} \text{ für alle } \xi, \xi_1, \xi_2, \eta \in \mathbb{R}^n, \\ a \in \mathbb{R}$$

Regel (b) folgt z.B. so: Es sei $\xi_\lambda = (x_\lambda^{(1)}, \dots, x_\lambda^{(n)})$ für $\lambda = 1, 2$ und $\eta = (y_1, \dots, y_n)$. Dann ist $\xi_1 + \xi_2 = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$, also

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \xi_2) \cdot \eta &= \sum_{\nu=1}^n (x_\nu^{(1)} + x_\nu^{(2)}) \cdot y_\nu = \sum_{\nu=1}^n (x_\nu^{(1)} y_\nu + x_\nu^{(2)} y_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^n x_\nu^{(1)} y_\nu + \sum_{\nu=1}^n x_\nu^{(2)} y_\nu = \xi_1 \cdot \eta + \xi_2 \cdot \eta. \end{aligned}$$

Regel (d) ergibt sich so: Ist $\xi = (x_1, \dots, x_n)$, so ist $\xi \cdot \xi = \sum_{\nu=1}^n x_\nu^2$ als Summe von Quadraten nicht negativ und verschwindet genau dann, wenn alle x_ν verschwinden. — Für $\xi \cdot \xi$ schreiben wir auch ξ^2 .

Mit Hilfe des Skalarproduktes definieren wir nun eine Norm genannte Abbildung des \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , indem wir jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ als Norm von ξ die Zahl $\|\xi\| = \sqrt{\xi^2}$ zuordnen.

Satz 1.2. Die Norm hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) $\|\xi\| \geq 0$; $\|\xi\| = 0$ gilt genau für $\xi = 0$,
 - (2) $\|a \cdot \xi\| = |a| \cdot \|\xi\|$,
 - (3) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$
- für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$.

Regel (1) ist die Übersetzung der Regel (d) für das Skalarprodukt, Regel (2) folgt sofort aus Regel (c). Um Regel (3) zu verifizieren, beweisen wir zuerst den

Satz 1.3 (Schwarzsche Ungleichung). Für zwei Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt stets $(\xi \cdot \eta)^2 \leq \xi^2 \cdot \eta^2$. Das Gleichheitszeichen steht hierbei genau dann, wenn ξ und η linear abhängig sind.

Beweis. Ist $\eta = 0$, so hat man $\xi \cdot 0 = \xi \cdot (0 + 0) = \xi \cdot 0 + \xi \cdot 0$, also $\xi \cdot 0 = 0$. In diesem Fall verschwinden beide Seiten der behaupteten Ungleichung.

Ist $\eta \neq 0$, so gilt wegen (1) auch $\|\eta\| \neq 0$. Wenn wir noch $\eta^2 = (\|\eta\|)^2$ bedenken, können wir für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ schreiben

$$0 \leq (\xi + t\eta)^2 = \left(\frac{\xi \cdot \eta}{\|\eta\|} + t \cdot \|\eta\| \right)^2 + \xi^2 - \frac{(\xi \cdot \eta)^2}{\eta^2}.$$

Nun kann man t so wählen, daß $\left(\frac{\xi \cdot \eta}{\|\eta\|} + t \|\eta\| \right) = 0$ ist. Dann erhält man $0 \leq \xi^2 - \frac{(\xi \cdot \eta)^2}{\eta^2}$, und daraus die Behauptung. Sind ξ und η linear unabhängig, so verschwindet $\xi + t\eta$ für kein t , also ist stets $0 < (\xi + t\eta)^2$, und damit wird die behauptete Ungleichung streng. Sind ξ und η linear abhängig, so gibt es wegen $\eta \neq 0$ ein t_0 so, daß $\xi + t_0\eta = 0$. Dann ist aber $\frac{\xi \cdot \eta}{\|\eta\|} + t_0 \|\eta\| = -t_0 \|\eta\| + t_0 \|\eta\| = 0$,

und wir bekommen das Gleichheitszeichen in der Schwarzischen Ungleichung.

Folgerung. $|\xi \cdot \eta| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Das folgt durch Wurzelziehen aus der Schwarzischen Ungleichung. Zum Nachweis von (3) in Satz 1.2 betrachten wir

$$\begin{aligned} \|\xi + \eta\|^2 &= (\xi + \eta)^2 \\ &= \xi^2 + 2\xi \cdot \eta + \eta^2 && \text{nach (a) und (b)} \\ &\leq \xi^2 + 2|\xi \cdot \eta| + \eta^2 \\ &\leq \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \cdot \|\eta\| + \|\eta\|^2 && \text{nach der Folgerung} \\ &= (\|\xi\| + \|\eta\|)^2. \end{aligned}$$

Nach Wurzelziehen hat man (3).

Ist auf dem \mathbb{R}^n eine reellwertige Funktion gegeben, die den Regeln (1) bis (3) genügt, so nennen wir diese Funktion eine *Norm* und sprechen von einem *normierten reellen Vektorraum*. Die oben mittels des Skalarproduktes definierte Funktion wollen wir die *euklidische Norm* nennen.

Man kann dem \mathbb{R}^n auch andere Normen aufprägen. Bei späteren Untersuchungen werden wir oft für $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ setzen

$$|\xi| = \max_{\nu=1, \dots, n} |x_\nu|.$$

Man verifiziert leicht (1) und (2); (3) folgt so:

$$\begin{aligned} |\xi + \eta| &= \max_{\nu} |x_\nu + y_\nu| \leq \max_{\nu} (|x_\nu| + |y_\nu|) \leq \max_{\nu} |x_\nu| + \max_{\nu} |y_\nu| \\ &= |\xi| + |\eta|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der euklidischen Norm wollen wir jetzt den *euklidischen Abstand* (Distanz) zweier Punkte des \mathbb{R}^n definieren, indem wir für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ setzen

$$\text{dist}(\xi, \eta) = \|\eta - \xi\|.$$

Satz 1.4. Die Distanz hat folgende Eigenschaften:

(1') $\text{dist}(\xi, \eta) \geq 0$; $\text{dist}(\xi, \eta) = 0$ genau dann, wenn $\xi = \eta$,

(2') $\text{dist}(\xi, \eta) = \text{dist}(\eta, \xi)$,

(3') $\text{dist}(\xi, \zeta) \leq \text{dist}(\xi, \eta) + \text{dist}(\eta, \zeta)$

für alle $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n$.

(1') ist die Übersetzung der Regel (1) für die Norm; (2') folgt aus (2) für $a = -1$; (3') folgt aus (3) so:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\xi, \zeta) &= \|\zeta - \xi\| = \|\zeta - \eta + \eta - \xi\| \leq \|\zeta - \eta\| + \|\eta - \xi\| \\ &= \text{dist}(\eta, \zeta) + \text{dist}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Deutet man ξ, η, ζ anschaulich als Eckpunkte eines Dreiecks, so besagt (3'), daß die Länge einer Dreiecksseite nicht größer ist als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten. Man nennt (3') und auch die Ungleichung (3) daher die „Dreiecksungleichung“.

Ist zu einer beliebigen Menge $X = \{\xi, \eta, \dots\}$ eine Funktion gegeben, die jedem Paar (ξ, η) von Elementen von X eine reelle Zahl $\text{dist}(\xi, \eta)$ zuordnet, und genügt diese Funktion den Regeln (1') bis (3'), so sagt man, sie sei eine *Metrik* auf X und nennt X einen *metrischen Raum*.

In derselben Weise, wie der euklidische Abstand auf dem \mathbb{R}^n aus der euklidischen Norm gewonnen wurde, kann man aus jeder anderen Norm des \mathbb{R}^n eine Metrik auf dem \mathbb{R}^n gewinnen (aber nicht jede Metrik kommt von einer Norm).

§ 2. Wege

Es sei I ein offenes oder abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} . Auf I seien n reelle Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gegeben. Man kann dann jedem $t \in I$ den Punkt $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ zuordnen. Eine solche Zuordnung heißt eine *Abbildung* $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 2.1. Eine Abbildung $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stetig* bzw. *k-mal differenzierbar* bzw. *k-mal stetig differenzierbar*, wenn die Funktionen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ stetig bzw. *k-mal differenzierbar* bzw. *k-mal stetig differenzierbar* sind.

Ist Φ *k-mal differenzierbar*, so bezeichnen wir für jedes natürliche l mit $l \leq k$ den Vektor $(\varphi_1^{(l)}(t), \dots, \varphi_n^{(l)}(t))$ mit $\Phi^{(l)}(t)$.

Definition 2.2. Eine stetige Abbildung $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines Intervalls I in den \mathbb{R}^n heißt *parametrisierter Weg*, die Bildmenge $\Phi(I)$ heißt *Spur* des parametrisierten Weges. Ist I ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$, so sprechen wir von einem abgeschlossenen parametrisierten Weg und nennen $\Phi(a)$ seinen *Anfangspunkt*, $\Phi(b)$ seinen *Endpunkt*.

Ist $I = (a, b)$ oder $I = [a, b]$, so durchläuft, anschaulich gesprochen, der Punkt $\Phi(t)$ den „Weg“ $\Phi(I)$, wenn t von a nach b läuft. Unser Interesse richtet sich aber nicht so sehr auf die „Geschwindigkeit der Durchlaufung“ von $\Phi(I)$, die durch die Abbildung Φ gegeben wird, sondern mehr auf den „Durchlaufungssinn“. Im folgenden wollen wir den Begriff des Weges so fassen, daß wir nicht an die spezielle Parametrisierung Φ gebunden sind.

Definition 2.3. Es seien I und I^* Intervalle, die beide offen oder beide abgeschlossen sind. Eine Funktion $g: I^* \rightarrow I$ heißt *Parametertransformation* (von I^* auf I), wenn gilt:

- g ist stetig,
- g ist monoton wachsend,
- g bildet I^* auf I ab (g ist surjektiv).

Ist g Parametertransformation von $[a^*, b^*]$ auf $[a, b]$, so gilt $g(a^*) = a$ und $g(b^*) = b$ wegen (b) und (c).

Sind $g: I^* \rightarrow I$ und $h: I^{**} \rightarrow I^*$ Parametertransformationen, so ist auch $g \circ h: I^{**} \rightarrow I$ eine Parametertransformation. Der einfache Beweis soll dem Leser überlassen bleiben.

Ist $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter Weg und $g: I^* \rightarrow I$ eine Parametertransformation, so ist auch $\Phi^* = \Phi \circ g: I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter Weg, denn mit $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ist $\Phi^*(t^*) = (\varphi_1 \circ g(t^*), \dots, \varphi_n \circ g(t^*))$ für $t^* \in I^*$, und die zusammengesetzten Funktionen $\varphi_r \circ g$ sind stetig. Wegen $g(I^*) = I$ ist $\Phi^*(I^*) = \Phi(g(I^*)) = \Phi(I)$. Ist $I = [a, b]$ und $I^* = [a^*, b^*]$, so ist $\Phi^*(a^*) = \Phi(g(a^*)) = \Phi(a)$ und $\Phi^*(b^*) = \Phi(g(b^*)) = \Phi(b)$. Spur sowie Anfangs- und Endpunkt der durch Φ und $\Phi^* = \Phi \circ g$ parametrisierten Wege stimmen also überein.

Definition 2.4. Es seien $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Phi^*: I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei parametrisierte Wege. Sie heißen *stark äquivalent*, wenn es eine Parametertransformation $g: I^* \rightarrow I$ oder eine Parametertransformation $g^*: I \rightarrow I^*$ gibt, so daß $\Phi^* = \Phi \circ g$ bzw. $\Phi = \Phi^* \circ g^*$ gilt. Sie heißen *äquivalent*, wenn es parametrisierte Wege Φ_0, \dots, Φ_l mit $\Phi_0 = \Phi$ und $\Phi_l = \Phi^*$ gibt, so daß Φ_λ und $\Phi_{\lambda-1}$ für $\lambda = 1, \dots, l$ stark äquivalent sind.

Die dadurch auf der Menge der parametrisierten Wege im \mathbb{R}^n definierte Relation ist in der Tat eine *Äquivalenzrelation*: Sie ist offensichtlich *reflexiv* (d.h. jedes Φ ist zu sich selbst äquivalent) und *symmetrisch* (d.h. ist Φ_1 zu Φ_2 äquivalent, so auch Φ_2 zu Φ_1). Aus der Definition folgt sofort, daß die Relation auch *transitiv* ist (d.h. ist Φ_1 zu Φ_2 äquivalent und Φ_2 zu Φ_3 , so ist auch Φ_1 zu Φ_3 äquivalent).

Durch diese Äquivalenzrelation wird die Menge der parametrisierten Wege in Teilmengen, sogenannte *Äquivalenzklassen*, zerlegt: Zur Äquivalenzklasse eines parametrisierten Weges gehören genau die parametrisierten Wege, die zu ihm äquivalent sind. Jeder parametrisierte Weg gehört also zu einer Äquivalenzklasse, und der Durchschnitt zweier verschiedener Äquivalenzklassen ist leer.

Definition 2.5. Ein Weg ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Wegen.

Der Begriff „Spur eines Weges“ ist in eindeutiger Weise definiert, denn stark äquivalente parametrisierte Wege haben die gleiche Spur, also haben auch äquivalente parametrisierte Wege die gleiche Spur. Ebenso hängen die Begriffe „abgeschlossener Weg“, „Anfangs- und Endpunkt“ nicht von der Parametrisierung ab.

Als Beispiel betrachten wir im \mathbb{R}^2 die Menge

$$A = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0\},$$

anschaulich gesprochen die abgeschlossene obere Hälfte der Einheitskreislinie. Ist $I = [-1, 1]$, so wird durch $\Phi(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in I$, eine stetige Abbildung von I in den \mathbb{R}^2 definiert, es ist $\Phi(-1) = (1, 0)$, $\Phi(1) = (-1, 0)$ und $\Phi(I) = A$ (vgl. § 5). Φ erlaubt es also, A als parametrisierten Weg aufzufassen. — Mit $I^* = [0, \pi]$ wird durch $\Phi^*(t^*) = (\cos t^*, \sin t^*)$, $t^* \in I^*$, eine andere Parametrisierung

von A gegeben. Φ und Φ^* sind äquivalent, es ist nämlich $g(t^*) = -\cos t^*$ eine Parametertransformation von I^* auf I und es gilt $\Phi^* = \Phi \circ g$.

Ein Weg hat, anschaulich gesprochen, einen „Durchlaufungssinn“ (oder eine „Orientierung“). Wir wollen nun präzisieren, was man unter dem „im entgegengesetzten Sinn durchlaufenen Weg“ zu verstehen hat.

Zu einem Intervall I erklären wir nun das Intervall $-I = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$. Ist $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter Weg, so definieren wir einen parametrisierten Weg $\Phi^-: -I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\Phi^-(t) = \Phi(-t)$. Es gilt $\Phi^-(-I) = \Phi(I)$, also haben Φ^- und Φ die gleiche Spur. Ist $I = [a, b]$, so ist $-I = [-b, -a]$, und es gilt $\Phi^-(-b) = \Phi(b)$ und $\Phi^-(-a) = \Phi(a)$. Anfangs- und Endpunkt werden also beim Übergang von Φ zu Φ^- vertauscht.

Ist $g: I^* \rightarrow I$ eine Parametertransformation und $\Phi_* = \Phi \circ g$, so gilt $\Phi_*^-(t) = \Phi \circ g(-t) = \Phi^- \circ g^-(t)$ mit $g^-(t) = -g(-t)$ für jedes $t \in -I^*$. Die Abbildung $g^-: -I^* \rightarrow -I$ ist, wie man leicht nachprüft, eine Parametertransformation. Also sind Φ^- und Φ_*^- stark äquivalent. Daraus kann man schließen: Sind Φ_1 und Φ_2 äquivalent, so sind auch Φ_1^- und Φ_2^- äquivalent.

Durchläuft Φ eine Äquivalenzklasse W von parametrisierten Wegen, so liegen also die parametrisierten Wege Φ^- alle in einer Äquivalenzklasse, die wir mit $-W$ bezeichnen wollen. Wir sagen, $-W$ gehe aus W durch *Umkehrung der Orientierung* hervor.

Fällt der Endpunkt eines Weges W_1 mit dem Anfangspunkt eines zweiten Weges W_2 zusammen, so kann ein Punkt anschaulich beide Wege hintereinander durchlaufen. Wir wollen auch diesen Begriff präzisieren. Es sei $\Phi_\mu: I_\mu \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von W_μ ($\mu = 1, 2$), dabei sei $I_\mu = [a_\mu, b_\mu]$. Es gelte $\Phi_1(b_1) = \Phi_2(a_2)$. Wir setzen $I'_2 = [b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$ und definieren eine Parametertransformation $g: I'_2 \rightarrow I_2$ durch $g(t) = t - b_1 + a_2$. Es ist $I = I_1 \cup I'_2 = [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$. Wir definieren einen parametrisierten Weg $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi_1(t) & \text{für } t \in I_1 \\ \Phi_2 \circ g(t) & \text{für } t \in I'_2. \end{cases}$$

Φ ist wohldefiniert, denn in $I_1 \cap I'_2 = \{b_1\}$ gilt $\Phi_2 \circ g(b_1) = \Phi_2(a_2) = \Phi_1(b_1)$ nach Voraussetzung. Φ ist stetig: Das ist klar für $t \in [a_1, b_1]$ und $t \in (b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$, da Φ_1 bzw. $\Phi_2 \circ g$ dort stetig sind. Die Stetigkeit in b_1 folgt sofort aus der Stetigkeit von Φ_1 und $\Phi_2 \circ g$ dort und der Gleichung $\Phi_1(b_1) = \Phi_2 \circ g(b_1)$. — Der Anfangspunkt des parametrisierten Weges Φ ist $\Phi_1(a_1)$, also der Anfangspunkt von W_1 . Entsprechend ist der Endpunkt von Φ der Endpunkt von W_2 . Die Spur von Φ ist die Vereinigung der Spuren $\Phi_1(I_1)$ und $\Phi_2(I_2) = \Phi_2 \circ g(I'_2)$.

Ersetzt man Φ_1 und Φ_2 durch äquivalente Parametrisierungen Φ_1^* und Φ_2^* , so führt die obige Konstruktion, angewandt auf Φ_1^* und Φ_2^* , zu einem parametrisierten Weg Φ^* , der äquivalent zu Φ ist. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen. Die Äquivalenzklasse von Φ hängt also nur von W_1 und W_2 ab. Wir bezeichnen sie mit $W_1 + W_2$ und nennen sie die *Summe der Wege W_1 und W_2* .

Induktiv kann man nun die Summe von endlich vielen abgeschlossenen Wegen W_1, \dots, W_l definieren ($l \geq 2$), sofern für $\lambda = 1, \dots, l-1$ jedesmal der Endpunkt von W_λ mit dem Anfangspunkt von $W_{\lambda+1}$ übereinstimmt: Wir nehmen an, es sei $l \geq 3$ und die Summe von je $l-1$ solchen Wegen sei schon definiert. Dann setzen wir $W_1 + \dots + W_l = (W_1 + \dots + W_{l-1}) + W_l$.

Diese Addition ist assoziativ in folgendem Sinn: Ist die Summe $W_1 + \dots + W_l$ für eine Beklammerung definiert, so auch für jede andere, und sie stellt jedesmal den gleichen Weg dar.

Es sollen nun einige spezielle Klassen von Wegen eingeführt werden, die uns in späteren Betrachtungen begegnen werden.

Definition 2.6. *Ein abgeschlossener Weg heißt geschlossen, wenn sein Endpunkt mit dem Anfangspunkt übereinstimmt.*

Definition 2.7. *Ein Weg heißt einfach geschlossen, wenn er geschlossen ist und es eine Parametrisierung $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die auf $[a, b)$ eineindeutig ist.*

Definition 2.8. *Ein Weg W heißt glatt, wenn es eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von W gibt, für die $\Phi'(t) \neq 0$ ist für jedes $t \in I$. Eine solche Parametrisierung heißt glatt.*

Nicht jede stetig differenzierbare Parametrisierung eines glatten Weges ist glatt. Zum Beispiel ist $\Phi(t) = (t, t)$ für $t \in [-1, 1] = I$ eine glatte Parametrisierung von $\{(x, y): x = y, |x| \leq 1\}$. Durch $g(t) = t^3$ wird eine Parametertransformation von I auf sich gegeben, für die $\Phi^* = \Phi \circ g$ nicht glatt ist. Es ist nämlich $\Phi^*(t) = (t^3, t^3)$, $(\Phi^*)'(t) = (3t^2, 3t^2)$, also $(\Phi^*)'(0) = (0, 0)$.

Definition 2.9. *Ein Weg heißt stückweise glatt, wenn er als Summe von endlich vielen glatten Wegen dargestellt werden kann.*

§ 3. Bogenlänge

Die Länge eines abgeschlossenen Weges wird als Grenze der euklidischen Länge approximierender Streckenzüge (Sehnepolygone) erklärt. Präzise ausgedrückt:

Sei W ein Weg im \mathbb{R}^n , $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von W , $I = [a, b]$. Eine Zerlegung \mathcal{Z} von I ist ein $(l+1)$ -Tupel (t_0, \dots, t_l) reeller Zahlen (l beliebige natürliche Zahl), für die $a = t_0 < \dots < t_l = b$ gilt. Ist \mathcal{Z} gegeben, so setzen wir $\zeta_\lambda = \Phi(t_\lambda) \in \Phi(I)$ für

$\lambda = 0, \dots, l$. Die Länge des durch die ε_λ gelegten „Sehnenpolygons“¹ ist dann

$$L(W, \mathfrak{B}) = \sum_{\lambda=1}^l \text{dist}(\varepsilon_{\lambda-1}, \varepsilon_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^l \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\|.$$

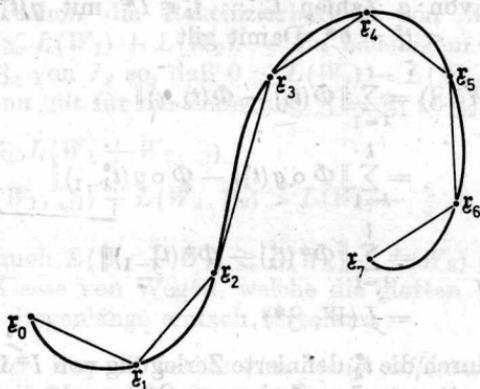


Fig. 2. Weg mit Sehnenpolygon

Wird \mathfrak{B} durch eine Zerlegung \mathfrak{B}' verfeinert, die außer den zu \mathfrak{B} gehörenden Teilpunkten t_λ noch einen weiteren Teilpunkt t' enthält, für den etwa $t_{\mu-1} < t' < t_\mu$ gilt, und ist $\varepsilon' = \Phi(t')$, so gilt

$$\begin{aligned} L(W, \mathfrak{B}) &= \sum_{\lambda=1}^l \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\| \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\| + \|\varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu-1}\| + \sum_{\lambda=\mu+1}^l \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\| \\ &\leq \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\| + \|\varepsilon' - \varepsilon_{\mu-1}\| + \|\varepsilon_\mu - \varepsilon'\| \\ &\quad + \sum_{\lambda=\mu+1}^l \|\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda-1}\| \\ &= L(W, \mathfrak{B}'). \end{aligned}$$

Durch mehrmalige Anwendung dieses Schlusses ergibt sich: Ist \mathfrak{B}' eine beliebige Verfeinerung von \mathfrak{B} , so ist $L(W, \mathfrak{B}) \leq L(W, \mathfrak{B}')$. Es ist daher sinnvoll, zu setzen:

Definition 3.1. Die Länge des abgeschlossenen Weges W ist $L(W) = \sup L(W, \mathfrak{B})$, wobei das Supremum über alle Zerlegungen \mathfrak{B} von I zu nehmen ist. W heißt rektifizierbar, wenn $L(W) < \infty$ ist¹.

Es genügt offenbar auch, das Supremum über alle Verfeinerungen einer festen Zerlegung zu nehmen.

¹ Wir schreiben statt $+\infty$ oft einfach ∞ .