Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

802

Jacques Bair
René Fourneau

Géometrique
Espaces Vectoriels II
èdres et Polytopes Convexes

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

802

Jacques Bair
René Fourneau

Etude Géometrique des Espaces Vectoriels II

Polyèdres et Polytopes Convexes

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Auteurs

Jacques Bair
Institut de Mathématique, Université de Liège
4000 Liège/Belgique

René Fourneau
Institut de Mathématique, Université de Liège et
Institut Supérieur Industriel Liégeois
4000 Liège/Belgique

AMS Subject Classifications (1980): 15A39, 52-02, 52A05, 52A25, 52A40

ISBN 3-540-09993-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09993-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Bair, Jacques
Etude géométrique des espaces vectoriels / Jacques Bair; René Fourneau.
– Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
2. Polyèdres et polytopes convexes. – 1980.
(Lecture notes in mathematics; 802)
ISBN 3-540-09993-X (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-09993-X (New York, Heidelberg, Berlin)

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1980
Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

Vol. 640: J. L. Dupont, Curvature and Characteristic Classes. X, 175 pages. 1978.

Vol. 641: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Proceedings Paris 1976–1977. Edité par M. P. Malliavin. IV, 367 pages. 1978.

Vol. 642: Theory and Applications of Graphs, Proceedings, Michigan 1976. Edited by Y. Alavi and D. R. Lick. XIV, 635 pages. 1978.

Vol. 643: M. Davis, Multiaxial Actions on Manifolds. VI, 141 pages. 1978.

Vol. 644: Vector Space Measures and Applications I, Proceedings 1977. Edited by R. M. Aron and S. Dineen. VIII, 451 pages. 1978.

Vol. 645: Vector Space Measures and Applications II, Proceedings 1977. Edited by R. M. Aron and S. Dineen. VIII, 218 pages. 1978.

Vol. 646: O. Tammi, Extremum Problems for Bounded Univalent Functions. VIII, 313 pages. 1978.

Vol. 647: L. J. Ratliff, Jr., Chain Conjectures in Ring Theory. VIII, 133 pages. 1978.

Vol. 648: Nonlinear Partial Differential Equations and Applications, Proceedings, Indiana 1976–1977. Edited by J. M. Chadam. VI, 206 pages. 1978.

Vol. 649: Séminaire de Probabilités XII, Proceedings, Strasbourg, 1976–1977. Edité par C. Dellacherie, P. A. Meyer et M. Weil. VIII, 805 pages. 1978.

Vol. 650: C*-Algebras and Applications to Physics. Proceedings 1977. Edited by H. Araki and R. V. Kadison. V, 192 pages. 1978.

Vol. 651: P. W. Michor, Functors and Categories of Banach Spaces. VI, 99 pages. 1978.

Vol. 652: Differential Topology, Foliations and Gelfand-Fuks-Cohomology, Proceedings 1976. Edited by P. A. Schweitzer. XIV, 252 pages. 1978.

Vol. 653: Locally Interacting Systems and Their Application in Biology. Proceedings, 1976. Edited by R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov and A. L. Toom. XI, 202 pages. 1978.

Vol. 654: J. P. Buhler, Icosahedral Golois Representations. III, 143 pages. 1978.

Vol. 655: R. Baeza, Quadratic Forms Over Semilocal Rings. VI, 199 pages. 1978.

Vol. 656: Probability Theory on Vector Spaces. Proceedings, 1977. Edited by A. Weron. VIII, 274 pages. 1978.

Vol. 657: Geometric Applications of Homotopy Theory I, Proceedings 1977. Edited by M. G. Barratt and M. E. Mahowald. VIII, 459 pages. 1978.

Vol. 658: Geometric Applications of Homotopy Theory II, Proceedings 1977. Edited by M. G. Barratt and M. E. Mahowald. VIII, 487 pages. 1978.

Vol. 659: Bruckner, Differentiation of Real Functions. X, 247 pages. 1978.

Vol. 660: Equations aux Dérivées Partielles. Proceedings, 1977. Edité par Pham The Lai. VI, 216 pages. 1978.

Vol. 661: P. T. Johnstone, R. Paré, R. D. Rosebrugh, D. Schumacher, R. J. Wood, and G. C. Wraith, Indexed Categories and Their Applications. VII, 260 pages. 1978.

Vol. 662: Akin, The Metric Theory of Banach Manifolds. XIX, 306 pages. 1978.

Vol. 663: J. F. Berglund, H. D. Junghenn, P. Milnes, Compact Right Topological Semigroups and Generalizations of Almost Periodicity. X, 243 pages. 1978.

Vol. 664: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1977. Edited by K. C. Millett. XI, 240 pages. 1978.

Vol. 665: Journées d'Analyse Non Linéaire. Proceedings, 1977. Edité par P. Bénilan et J. Robert. VIII, 256 pages. 1978.

Vol. 666: B. Beauzamy, Espaces d'Interpolation Réels: Topologie et Géometrie. X, 104 pages. 1978.

Vol. 667: J. Gilewicz, Approximants de Padé. XIV, 511 pages. 1978.

Vol. 668: The Structure of Attractors in Dynamical Systems. Proceedings, 1977. Edited by J. C. Martin, N. G. Markley and W. Perrizo. VI, 264 pages. 1978.

Vol. 669: Higher Set Theory. Proceedings, 1977. Edited by G. H. Müller and D. S. Scott. XII, 476 pages. 1978.

Vol. 670: Fonctions de Plusieurs Variables Complexes III, Proceedings, 1977. Edité par F. Norguet. XII, 394 pages. 1978.

Vol. 671: R. T. Smythe and J. C. Wierman, First-Passage Perculation on the Square Lattice. VIII, 196 pages. 1978.

Vol. 672: R. L. Taylor, Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces. VII, 216 pages. 1978.

Vol. 673: Algebraic Topology, Proceedings 1977. Edited by P. Hoffman, R. Piccinini and D. Sjerve. VI, 278 pages. 1978.

Vol. 674: Z. Fiedorowicz and S. Priddy, Homology of Classical Groups Over Finite Fields and Their Associated Infinite Loop Spaces. VI, 434 pages. 1978.

Vol. 675: J. Galambos and S. Kotz, Characterizations of Probability Distributions. VIII, 169 pages. 1978.

Vol. 676: Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II, Proceedings, 1977. Edited by K. Bleuler, H. R. Petry and A. Reetz. VI, 626 pages. 1978.

Vol. 677: Séminaire Bourbaki, vol. 1976/77, Exposés 489–506. IV, 264 pages. 1978.

Vol. 678: D. Dacunha-Castelle, H. Heyer et B. Roynette. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour. VII-1977. Edité par P. L. Hennequin. IX, 379 pages. 1978.

Vol. 679: Numerical Treatment of Differential Equations in Applications, Proceedings, 1977. Edited by R. Ansorge and W. Törnig. IX, 163 pages. 1978.

Vol. 680: Mathematical Control Theory, Proceedings, 1977. Edited by W. A. Coppel. IX, 257 pages. 1978.

Vol. 681: Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 3, Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki. VII, 294 pages. 1978.

Vol. 682: G. D. James, The Representation Theory of the Symmetric Groups. V, 156 pages. 1978.

Vol. 683: Variétés Analytiques Compactes, Proceedings, 1977. Edité par Y. Hervier et A. Hirschowitz. V, 248 pages. 1978.

Vol. 684: E. E. Rosinger, Distributions and Nonlinear Partial Differential Equations. XI, 146 pages. 1978.

Vol. 685: Knot Theory, Proceedings, 1977. Edited by J. C. Hausmann. VII, 311 pages. 1978.

Vol. 686: Combinatorial Mathematics, Proceedings, 1977. Edited by D. A. Holton and J. Seberry. IX, 353 pages. 1978.

Vol. 687: Algebraic Geometry, Proceedings, 1977. Edited by L. D. Olson. V, 244 pages. 1978.

Vol. 688: J. Dydak and J. Segal, Shape Theory. VI, 150 pages. 1978.

Vol. 689: Cabal Seminar 76–77, Proceedings, 1976–77. Edited by A.S. Kechris and Y. N. Moschovakis. V, 282 pages. 1978.

Vol. 690: W. J. J. Rey, Robust Statistical Methods. VI, 128 pages. 1978.

Vol. 691: G. Viennot, Algèbres de Lie Libres et Monoïdes Libres. III, 124 pages. 1978.

Vol. 692: T. Husain and S. M. Khaleelulla, Barrelledness in Topological and Ordered Vector Spaces. IX, 258 pages. 1978.

Vol. 693: Hilbert Space Operators, Proceedings, 1977. Edited by J. M. Bachar Jr. and D. W. Hadwin. VIII, 184 pages. 1978.

Vol. 694: Séminaire Pierre Lelong – Henri Skoda (Analyse) Année 1976/77. VII, 334 pages. 1978.

Vol. 695: Measure Theory Applications to Stochastic Analysis, Proceedings, 1977. Edited by G. Kallianpur and D. Kölzow. XII, 261 pages. 1978.

Vol. 696: P. J. Feinsilver, Special Functions, Probability Semigroups, and Hamiltonian Flows. VI, 112 pages. 1978.

Vol. 697: Topics in Algebra, Proceedings, 1978. Edited by M. F. Newman. XI, 229 pages. 1978.

Vol. 698: E. Grosswald, Bessel Polynomials. XIV, 182 pages. 1978.

Vol. 699: R. E. Greene and H.-H. Wu, Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole. III, 215 pages. 1979.

Vol. 700: Module Theory, Proceedings, 1977. Edited by C. Faith and S. Wiegand. X, 239 pages. 1979.

Vol. 701: Functional Analysis Methods in Numerical Analysis, Proceedings, 1977. Edited by M. Zuhair Nashed. VII, 333 pages. 1979.

Vol. 702: Yuri N. Bibikov, Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations. IX, 147 pages. 1979.

Vol. 703: Equadiff IV, Proceedings, 1977. Edited by J. Fábera. XIX, 441 pages. 1979.

Vol. 704: Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 1977, I. Proceedings, 1977. Edited by R. Glowinski and J. L. Lions. VI, 391 pages. 1979.

Vol. 705: O. Forster und K. Knorr, Konstruktion verseller Familien kompakter komplexer Räume. VII, 141 Seiten. 1979.

Vol. 706: Probability Measures on Groups, Proceedings, 1978. Edited by H. Heyer. XIII, 348 pages. 1979.

Vol. 707: R. Zielke, Discontinuous Čebyšev Systems. VI, 111 pages. 1979.

Vol. 708: J. P. Jouanolou, Equations de Pfaff algébriques. V, 255 pages. 1979.

Vol. 709: Probability in Banach Spaces II. Proceedings, 1978. Edited by A. Beck. V, 205 pages. 1979.

Vol. 710: Séminaire Bourbaki vol. 1977/78, Exposés 507–524. IV, 328 pages. 1979.

Vol. 711: Asymptotic Analysis. Edited by F. Verhulst. V, 240 pages. 1979.

Vol. 712: Equations Différentielles et Systèmes de Pfaff dans le Champ Complexe. Edité par R. Gérard et J.-P. Ramis. V, 364 pages. 1979.

Vol. 713: Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris No. 4. Edité par F. Hirsch et G. Mokobodzki. VII, 281 pages. 1979.

Vol. 714: J. Jacod, Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. X, 539 pages. 1979.

Vol. 715: Inder Bir S. Passi, Group Rings and Their Augmentation Ideals. VI, 137 pages. 1979.

Vol. 716: M. A. Scheunert, The Theory of Lie Superalgebras. X, 271 pages. 1979.

Vol. 717: Grosser, Bidualräume und Vervollständigungen von Banachmoduln. III, 209 pages. 1979.

Vol. 718: J. Ferrante and C. W. Rackoff, The Computational Complexity of Logical Theories. X, 243 pages. 1979.

Vol. 719: Categorial Topology, Proceedings, 1978. Edited by H. Herrlich and G. Preuß. XII, 420 pages. 1979.

Vol. 720: E. Dubinsky, The Structure of Nuclear Fréchet Spaces. V, 187 pages. 1979.

Vol. 721: Séminaire de Probabilités XIII. Proceedings, Strasbourg, 1977/78. Edité par C. Dellacherie, P. A. Meyer et M. Weil. VII, 647 pages. 1979.

Vol. 722: Topology of Low-Dimensional Manifolds. Proceedings, 1977. Edited by R. Fenn. VI, 154 pages. 1979.

Vol. 723: W. Brandal, Commutative Rings whose Finitely Generated Modules Decompose. II, 116 pages. 1979.

Vol. 724: D. Griffeath, Additive and Cancellative Interacting Particle Systems. V, 108 pages. 1979.

Vol. 725: Algèbres d'Opérateurs. Proceedings, 1978. Edité par P. de la Harpe. VII, 309 pages. 1979.

Vol. 726: Y.-C. Wong, Schwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Products. VI, 418 pages. 1979.

Vol. 727: Y. Saito, Spectral Representations for Schrödinger Operators With Long-Range Potentials. V, 149 pages. 1979.

Vol. 728: Non-Commutative Harmonic Analysis. Proceedings, 1978. Edited by J. Carmona and M. Vergne. V, 244 pages. 1979.

Vol. 729: Ergodic Theory. Proceedings, 1978. Edited by M. Denker and K. Jacobs. XII, 209 pages. 1979.

Vol. 730: Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Proceedings, 1978. Edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walther. XV, 503 pages. 1979.

Vol. 731: Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras. IX, 139 pages. 1979.

Vol. 732: Algebraic Geometry. Proceedings, 1978. Edited by K. Lønsted. IV, 658 pages. 1979.

Vol. 733: F. Bloom, Modern Differential Geometric Techniques in the Theory of Continuous Distributions of Dislocations. XII, 206 pages. 1979.

Vol. 734: Ring Theory, Waterloo, 1978. Proceedings, 1978. Edited by D. Handelman and J. Lawrence. XI, 352 pages. 1979.

Vol. 735: B. Aupetit, Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach. XII, 192 pages. 1979.

Vol. 736: E. Behrends, M-Structure and the Banach-Stone Theorem. X, 217 pages. 1979.

Vol. 737: Volterra Equations. Proceedings 1978. Edited by S.-O. Londen and O. J. Staffans. VIII, 314 pages. 1979.

Vol. 738: P. E. Conner, Differentiable Periodic Maps. 2nd edition, IV, 181 pages. 1979.

Vol. 739: Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie II. Proceedings, 1976–78. Edited by P. Eymard et al. VI, 646 pages. 1979.

Vol. 740: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil. Proceedings, 1977–78. Edited by M.-P. Malliavin. V, 456 pages. 1979.

Vol. 741: Algebraic Topology, Waterloo 1978. Proceedings. Edited by P. Hoffman and V. Snaith. XI, 655 pages. 1979.

Vol. 742: K. Clancey, Seminormal Operators. VII, 125 pages. 1979.

Vol. 743: Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis. Proceedings, 1976. Edited by C. Andreian Cazacu et al. XVI, 713 pages. 1979.

Vol. 744: I. Reiner and K. W. Roggenkamp, Integral Representations. VIII, 275 pages. 1979.

Vol. 745: D. K. Haley, Equational Compactness in Rings. III, 167 pages. 1979.

Vol. 746: P. Hoffman, τ-Rings and Wreath Product Representations. V, 148 pages. 1979.

Vol. 747: Complex Analysis, Joensuu 1978. Proceedings, 1978. Edited by I. Laine, O. Lehto and T. Sorvali. XV, 450 pages. 1979.

Vol. 748: Combinatorial Mathematics VI. Proceedings, 1978. Edited by A. F. Horadam and W. D. Wallis. IX, 206 pages. 1979.

Vol. 749: V. Girault and P.-A. Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. VII, 200 pages. 1979.

Vol. 750: J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht. III, 195 Seiten. 1979.

Vol. 751: Number Theory, Carbondale 1979. Proceedings. Edited by M. B. Nathanson. V, 342 pages. 1979.

Vol. 752: M. Barr, *-Autonomous Categories. VI, 140 pages. 1979.

Vol. 753: Applications of Sheaves. Proceedings, 1977. Edited by M. Fourman, C. Mulvey and D. Scott. XIV, 779 pages. 1979.

Vol. 754: O. A. Laudal, Formal Moduli of Algebraic Structures. III, 161 pages. 1979.

Vol. 755: Global Analysis. Proceedings, 1978. Edited by M. Grmela and J. E. Marsden. VII, 377 pages. 1979.

Vol. 756: H. O. Cordes, Elliptic Pseudo-Differential Operators – An Abstract Theory. IX, 331 pages. 1979.

Vol. 757: Smoothing Techniques for Curve Estimation. Proceedings, 1979. Edited by Th. Gasser and M. Rosenblatt. V, 245 pages. 1979.

Vol. 758: C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen; Graded and Filtered Rings and Modules. X, 148 pages. 1979.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

INTRODUCTION

Ce livre fait suite à notre ouvrage "Etude géométrique des espaces vectoriels - Une introduction" (Lecture Notes in Mathematics, vol. 489). La matière qu'il contient a fait l'objet d'un séminaire que nous avons tenu à l'Université de Liège durant le premier semestre 1976.

Notre but était d'exposer de façon rigoureuse l'essentiel de la théorie des polyèdres convexes. Nous n'avons cependant pas perdu de vue les convexes quelconques, donnant à chaque proposition son champ d'application le plus large.

A l'exemple de Černikov, nous avons étudié les polyèdres en dimension quelconque (finie ou non), mais d'un point de vue géométrique, permettant un traitement plus maniable et plus intuitif que celui, algébrique, de cet auteur.

En dehors de passages où l'originalité n'est pas compatible avec la concision, tel le paragraphe consacré aux polytopes particuliers, nous nous sommes éloignés des traités existants. Ainsi, nous ne nous sommes nullement confinés à l'étude des polytopes, englobant dans notre travail les polyèdres jusqu'aux dimensions infinies. Ceci nous a conduit à présenter des preuves débarrassées des raisonnements à l'emporte-pièce qu'inspire la connaissance trop physique que nous possédons des polytopes convexes de $\mathbb{R}^3$.

Nous avons aussi traité de façon originale les diagrammes de Gale, grâce à la théorie des représentations de Mc Mullen, et les systèmes d'inéquations linéaires.

Certains résultats nouveaux émaillent notre texte, tels la caractérisation des polyèdres convexes de dimension infinie, divers critères de séparation de polyèdres (notamment une démonstration, que nous a communiquée Klee, d'un de ses théorèmes dont aucune preuve n'avait encore été publiée), et une description des simplexes de Choquet sans droites de $\mathbb{R}^d$.

Nous remercions vivement le Fonds National Belge de la Recherche Scientifique (F.N.R.S.) qui a subsidié notre séminaire.

Nos remerciements vont aussi à Peter Mc Mullen qui nous a aidés à mettre au point certaines parties de notre ouvrage.

Que les nombreuses personnes qui, à la récente rencontre d'Oberwolfach consacrée à la convexité, nous ont encouragés à écrire ce livre, trouvent ici l'expression de notre gratitude.

Messieurs les Professeurs Jongmans, Valette et Varlet, nos collègues et nos élèves qui ont participé à notre séminaire, nous ont apporté une aide précieuse, qu'ils en soient remerciés!

Enfin, Madame Streel a tout mis en oeuvre pour que ces notes se présentent sous l'aspect le meilleur, grâce à son excellente dactylographie.

Liège, octobre 1976.

Jacques Bair René Fourneau

Depuis l'époque où nous avons tenu ce séminaire, la matière dont il traitait a évolué. Nous avons pris en considération les diverses améliorations et nouveautés connues à ce jour. Elles ont été regroupées, pour l'essentiel, dans "compléments et guide bibliographique " en fin de volume sauf lorsque l'insertion dans le corps du texte apporte un éclairage nouveau et utile à la matière exposée. Nous avons également tenté d'actualiser la bibliographie, qui couvre l'essentiel du sujet.

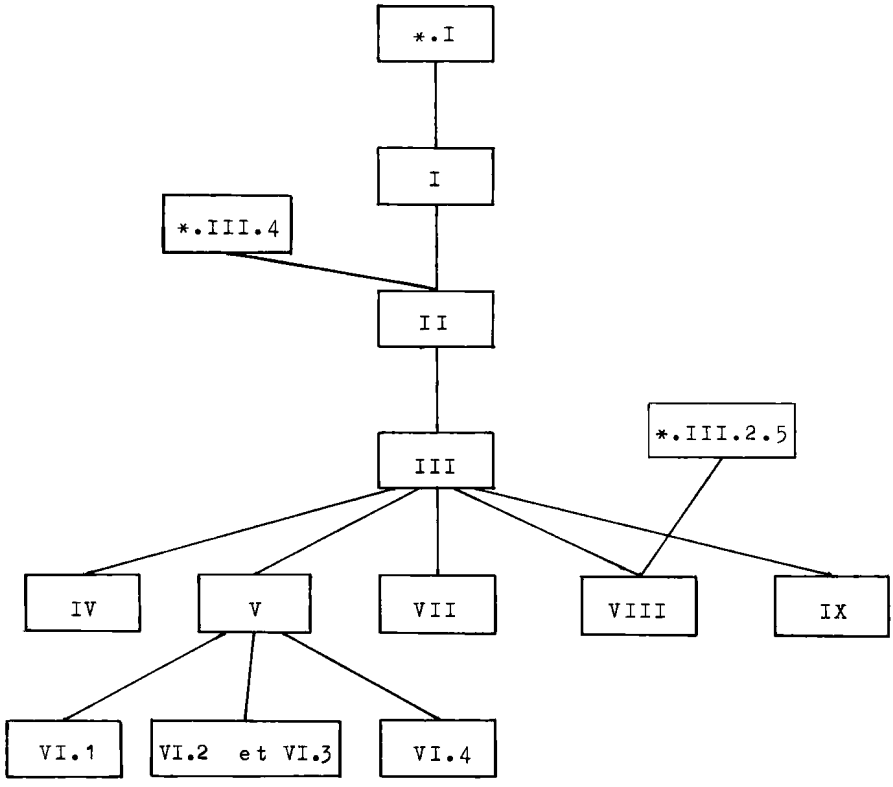
Nous tenons à remercier ici les personnes qui nous soutiennent moralement par leur considération scientifique et leurs encouragements pendant la période difficile que nous vivons.

Liège, février 1980.

Jacques Bair René Fourneau

GUIDE POUR LE LECTEUR

La table des dépendances des divers chapitres est représentée ci-dessous. Nous y avons inclus les relations avec certains chapitres du tome I de cet ouvrage (les numéros de ces chapitres sont précédés de *).



Des commentaires bibliographiques relatifs à chaque chapitre se trouvent en fin de volume.

TABLE DES MATIERES

GUIDE POUR LE LECTEUR VII
NOTATIONS ET TERMINOLOGIE 1

CHAPITRE I : SEPARATION DE DEUX ENSEMBLES CONVEXES

I.1. Séparation franche de deux ensembles convexes 2
I.2. Hyperplans, fonctions d'appui et ensembles cernés 8
I.3. Séparation forte de deux ensembles convexes 19

CHAPITRE II : FACES ET FACETTES DES CONVEXES

II.1. Définition des faces 22
II.2. Propriétés des faces en dimension quelconque ... 22
II.3. Propriétés des faces des convexes de dimension finie 27
II.4. Facettes et poonems 30
II.5. Variétés et demi-variétés extrêmes, facettes irréductibles 36
II.6. Polarité et faces 40

CHAPITRE III : LES POLYEDRES CONVEXES

III.1. Généralités sur les polyèdres convexes 52
III.2. Faces et facettes des polyèdres convexes 60
III.3. Caractérisations des polyèdres convexes de dimension finie 69
III.4. Polarité des polyèdres convexes 78
III.5. Dualité des polyèdres-type combinatoire 85
III.6. Quotients et configurations sommitales 93
III.7. Types combinatoires forts 95

CHAPITRE IV : LES POLYTOPES

IV.1. Généralités sur les polytopes 99
IV.2. Faces des polytopes 104
IV.3. Polytopes particuliers 107
IV.4. Equation d'Euler 123
IV.5. Diagrammes de Schlegel 129
IV.6. Les lattis $\mathcal{F}(P)$ et $\mathcal{F}^*(P)$ 131

CHAPITRE V : REPRESENTATIONS DE POLYEDRES

V.1. Représentations associées à $\mathcal{N}(U)$ 134
V.2. Point associé à un élément de $\mathcal{N}(U)$ 136
V.3. Représentations linéaires de U 136
V.4. Propriétés des représentations associées à $\mathcal{N}(U)$ et des points associés aux éléments de $\mathcal{N}(U)$ 141
V.5. Représentations de $\mathcal{N}(U)$ 145
V.6. Cônes-types 150

CHAPITRE VI : APPLICATIONS DE LA THEORIE DES REPRESENTATIONS

VI.1. Diagrammes de Gale 161
VI.2. Décomposition de polytopes convexes 172
VI.3. Adaptabilité homothétique et cônes-type 176
VI.4. Quelques propriétés du volume des polytopes ... 178
VI.5. Un écart sur $\mathcal{N}_T(U)$ 182
VI.6. Métrisation des quotients de types combinatoires forts et l'espace $(\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^d), D)$ 184

CHAPITRE VII : APPLICATIONS DES POLYEDRES A LA SEPARATION

VII.1. Ensembles quasi-polyédraux 192
VII.2. Séparation de polyèdres convexes 195
VII.3. Séparation de plusieurs ensembles 202
VII.4. Théorème de Hahn-Banach pour des polyèdres convexes 209

CHAPITRE VIII : RETOUR AUX SIMPLEXES DE CHOQUET

VIII.1. Simplexes de Choquet algébriquement fermés 213
VIII.2. Quasi-simplexes et simplexes de Choquet ouverts 216
VIII.3. Les simplexes de Choquet sans droites 225

CHAPITRE IX : SYSTEMES D'INEQUATIONS LINEAIRES

IX.1. Généralités 236
IX.2. Critères de résolubilité 237
IX.3. Inéquations conséquences d'un système d'inéquations 243
IX.4. Stabilité 248

COMPLEMENTS ET GUIDE BIBLIOGRAPHIQUE 251

BIBLIOGRAPHIE 262

INDEX TERMINOLOGIQUE 281

INDEX DES SYMBOLES 283

INDEX DES SYMBOLES

Cet index est un complément à celui de [*] .

$\mathcal{B}(P)$ 129
$\operatorname{codim}_L A$ 66
$C(v,d)$ 120
d_H 1
$\exp A$ 22
$f(P)$ 127
f_k 54
f'_k 54
$\mathcal{F}(A)$ 22
$\mathcal{F}^*(P)$ 131
F_2/F_1 93
$F(P,u)$ 95
$\Gamma(A)$ 36
h_A 12
$\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ 1
$L(U)$ 137
$N(A)$ 8
$N^*(A)$ 8
$\mathcal{N}(U)$ 134
$\mathcal{N}_T(U)$ 148
$\mathcal{P}(A)$ 31
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 184
$\mathcal{P}_T(\mathbb{R}^d)$ 184
$\operatorname{pos} A$ 1
$r_{\bar{U}}$ 145
$\bar{r}_{\bar{U}}$ 146
ρ 147
ρ^* 148
$s(\mathbb{K})$ 12
$\sigma(E,E^*)$ 40
$\sigma(E^*,E)$ 40
$.^*$ 40
$.^\perp$ 43
$.^+$ 44
$\hat{.}$ 45
$\tilde{.}$ 45,142
$\approx$ 85

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

Nous reprenons les notations et la terminologie du tome I de cet ouvrage (auquel il sera fait référence par [*]).

Nous y ajouterons quelques notions.

Si A est une partie de l'espace vectoriel réel E, l'enveloppe positive de A, notée pos A, est le plus petit cône convexe pointé de sommet 0 incluant A. Si A n'est pas vide, pos A est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients non négatifs de points de A; de plus pos $\emptyset = \{0\}$.

Si $A \subset E$ est un convexe d'internat non vide, nous dirons que A est une cellule convexe. Si, de plus, ${}^{1}A = E$, nous parlerons de cellule proprement convexe.

De même, une cellule étoilée est un ensemble étoilé dont l'internat du mirador n'est pas vide.

Enfin, nous utiliserons la distance de Hausdorff définie sur l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ des compacts convexes de $\mathbb{R}^d$ par

$$d_H(K,L) = \inf \{\alpha > 0 : K \subset L + \alpha B \text{ et } L \subset K + \alpha B\} \quad \forall K,L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) ,$$

où B est la boule (euclidienne) unité fermée de $\mathbb{R}^d$. La topologie induite sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ par cette distance est appelée topologie de Hausdorff.

CHAPITRE I

SEPARATION DE DEUX ENSEMBLES CONVEXES

I.1. SEPARATION FRANCHE DE DEUX ENSEMBLES CONVEXES

I.1.1. Soient A une cellule proprement convexe et B un convexe non vide; A et B peuvent être séparés si et seulement si B ne rencontre pas ${}^{i}A$.

Si $B \cap {}^{i}A = \emptyset$, il existe deux ensembles convexes M et N, composant une partition de E, tels que ${}^{i}A \subset M$ et $B \subset N$; comme M possède un point proprement interne, l'intersection $P = {}^{a}M \cap {}^{a}N$ n'est pas E tout entier : elle est un hyperplan dont les deux demi-espaces fermés associés sont ${}^{a}M$ et ${}^{a}N$ [*;III.1.1,p.75]. L'hyperplan P sépare bien A et B.

La réciproque est évidente puisque ${}^{i}A$ est inclus dans le demi-espace ouvert complémentaire du demi-espace fermé incluant B.

I.1.2. Divers auteurs, dont Jongmans [2] et Klee [12], ont essayé, dans le théorème précédent, de réduire les hypothèses imposées à l'ensemble A, et notamment de supprimer la condition ${}^{l}A = E$. Mais le fait de supposer que les deux ensembles A,B à séparer sont de codimension non nulle ouvre la porte à l'éventualité de voir A,B situés dans un même hyperplan H; celui-ci sépare trivialement A,B même si, par exemple, A est inclus dans B. On est ainsi conduit à relever ses exigences et à examiner dans quelles conditions deux ensembles, contenus ou non dans un même hyperplan, peuvent être séparés franchement, c'est-à-dire séparés par un hyperplan qui ne les contient pas tous les deux.

Nous allons caractériser de façon très simple la séparation franche de deux cellules convexes; pour cela, nous avons besoin de deux résultats préliminaires.

Lemme 1. Deux parties non vides A, B de E peuvent être franchement séparées si et seulement si l'origine peut être franchement séparée de A-B.

Si l'hyperplan d'équation $f(.) = \alpha$ sépare franchement A et B, on peut supposer sans restriction $f(A) \subset [\alpha,+\infty[$, $f(B) \subset]-\infty,\alpha]$ et $f(A) \cup f(B) \neq \{\alpha\}$. Dès lors, $\{0\} \neq f(A-B) \subset [0,+\infty[$: le noyau de f sépare franchement $\{0\}$ de A-B.

Réciproquement, si un hyperplan de niveau d'une forme linéaire f non nulle sur E sépare franchement $\{0\}$ de A-B, on peut admettre que $\{0\} \neq f(A-B) \subset [0,+\infty[$, de sorte que $f(a) \geq f(b)$ quels que soient $a \in A$, $b \in B$. Si donc $\mu = \inf f(A)$ et $\nu = \sup f(B)$, alors $\mu \geq \nu$; l'hyperplan de niveau μ de f sépare franchement A de B, sinon $f(A-B) = \{0\}$.

Lemme 2. Soit A une cellule convexe contenue dans un demi-espace fermé Σ; A n'est pas inclus dans l'hyperplan H associé à Σ si et seulement si H et ${}^{i}A$ sont disjoints.

Lorsque A n'est pas inclus dans H, supposons l'existence d'un point z dans $H \cap {}^{i}A$. Pour tout point x appartenant à $A \setminus H$, la droite (x:z) insère z dans A et, dès lors, possède des points de A dans les deux demi-espaces ouverts associés à H; cette dernière affirmation contredit l'inclusion de A dans Σ.

La réciproque est immédiate.

I.1.3. Deux cellules convexes A et B peuvent être franchement séparées si et seulement si ${}^{i}A$ et ${}^{i}B$ sont disjoints.

Si A,B sont franchement séparés par l'hyperplan H, ils sont respectivement inclus dans les demi-espaces fermés Σ_1, Σ_2 associés à H. Un point commun à ${}^{i}A$, ${}^{i}B$ appartiendrait à $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = H$ et conduirait à la conclusion absurde que A et B sont inclus dans H (lemme 2).

Réciproquement, supposons ${}^{i}A$ et ${}^{i}B$ disjoints, de sorte que ${}^{i}(A-B) = {}^{i}A - {}^{i}B$ [*;I.8.4,c p.34] ne contient pas l'origine. Si l'enveloppe linéaire ${}^{l}D = {}^{l}A - {}^{l}B$ de $D = A-B$ ne contient pas non plus l'origine, un hyperplan homogène parallèle à ${}^{l}D$ sépare franchement $\{0\}$ de D; A et B peuvent donc être franchement séparés (lemme 1). Au contraire, si $0 \in {}^{l}D$, ${}^{i}D = {}^{i}A - {}^{i}B$ est l'internat

propre de D pour l'espace vectoriel ${}^{1}D$; il existe dans ${}^{1}D$ un hyperplan homogène G qui sépare (franchement) {0} de D (I.1.1). Un hyperplan F de E passant par G sans contenir ${}^{1}D$ sépare franchement {0} de D dans E, ce qui renvoie de nouveau au lemme 1.

En corollaire, on peut dire que deux ensembles convexes non vides de dimension finie admettent une séparation franche s'ils sont disjoints, puisque tout ensemble convexe de dimension finie est une cellule convexe [*;IV.1.1,p.138]; de plus, deux cellules convexes disjointes peuvent toujours être franchement séparées. Quand les deux cellules convexes se rencontrent, on peut obtenir un critère de séparation en faisant appel à la notion de contiguïté introduite par S.N. Černikov ([2;p.838]) : deux ensembles convexes non vides A et B sont <u>contigus</u> s'ils se rencontrent et s'il existe un point a distinct de l'origine tel que $(A+\lambda a) \cap B = \emptyset$ ou, ce qui revient au même, tel que $A \cap (B-\lambda a) = \emptyset$ pour tout réel λ positif. Moyennant cette définition, on obtient le critère suivant qui généralise un résultat de S.N. Černikov ([2;Theorem 3,p.838]).

<u>Deux cellules convexes</u> A,B <u>qui se rencontrent peuvent être séparées si et seulement si elles sont contigües</u>.

Si le sous-espace ${}^{1}(A-B) = {}^{1}A - {}^{1}B$ ne coïncide pas avec E, A et B sont inclus dans un même hyperplan, ce qui prouve que A,B sont séparés et contigus.

Nous pouvons donc supposer sans restriction que ${}^{1}(A-B) = E$.

Nous allons montrer que si A et B sont contigus, l'origine n'est pas interne à A-B, ce qui permettra d'affirmer la suffisance grâce aux résultats précédents. Soit a un point arbitraire, mais distinct de l'origine. Si $0 \in {}^{i}(A-B) = {}^{i}A - {}^{i}B$ [*;I.8.4,p.34], la droite (0;a) insère 0 dans A-B : il existe donc un réel λ_o positif tel que $-\lambda_o a$ appartient à A-B, ce qui entraîne que $A + \lambda_o a$ rencontre B, contrairement au fait que A et B sont contigus.

Réciproquement, si A et B sont séparés, il existe une forme linéaire f non nulle et un réel α tels que $B \subset \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ et $A \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$. Pour un point a de E tel que $f(a) = 1$, $A + \lambda a \subset \{x \in E : f(x) \geq \alpha + \lambda\}$, d'où $(A+\lambda a) \cap B = \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$: A et B sont donc contigus.

Signalons encore que l'énoncé principal de ce paragraphe est en défaut quand un des ensembles ${}^{i}A$ ou ${}^{i}B$ est vide; pour s'en convaincre, il suffit de prendre pour A un ensemble ubiquitaire dans un espace E de dimension infinie [*;IV.1.3,p.139] et pour B un convexe non vide disjoint de A; A et B ne peuvent pas être séparés puisque A ne peut être inclus dans aucun demi-espace fermé. Pour ce cas, on dispose toutefois d'une propriété de rechange :

I.1.4. Si A est une cellule convexe de codimension finie et B un ensemble convexe non vide disjoint de ${}^{i}A$, il existe une séparation franche de A,B.

Ce théorème est connu lorsque la codimension de A est nulle (I.1.1).

Etendons-le de la codimension m-1 à m. Soit a un point non situé dans le sous-espace vectoriel parallèle à ${}^{1}A$. Les convexes $C = A + [0:a]$ et $D = A - [0:a]$, de codimension m-1, ont des internats non vides ${}^{i}C = {}^{i}A +]0:a[$ et ${}^{i}D = {}^{i}A -]0:a[$, qui ne peuvent tous deux rencontrer B; car si $c \in B \cap {}^{i}C$, $d \in B \cap {}^{i}D$, on pourrait écrire $c = x + \gamma a$ ($x \in {}^{i}A$, $0 < \gamma < 1$), $d = y - \delta a$ ($y \in {}^{i}A$, $0 < \delta < 1$); par suite, $\frac{1}{\gamma+\delta}(\delta c + \gamma d) = \frac{1}{\gamma+\delta}(\delta x + \gamma y)$ serait commun à ${}^{i}A$ et B. Admettons en conséquence que B soit disjoint de ${}^{i}C$; par l'hypothèse de récurrence, un hyperplan H sépare franchement B de C, donc sépare B de A. Si cette séparation n'est pas franche, la codimension de A au sein de H est m-1 : il existe à nouveau dans H un hyperplan G qui sépare franchement A,B. Un hyperplan de E qui passe par G sans contenir H répond à la question.

I.1.5. Version géométrique du théorème de Hahn-Banach. Si A est une cellule convexe, toute variété linéaire non vide B disjointe de ${}^{i}A$ est incluse dans un hyperplan disjoint de ${}^{i}A$.

Les deux ensembles A,B peuvent être franchement séparés par un hyperplan H(I.1.3). Ou bien H contient B et $H \cap {}^{i}A = \emptyset$ (I.1.2, lemme 2). Ou bien B n'est pas inclus dans H : l'hyperplan parallèle à H mené par un point quelconque de B répond à la question.

I.1.6. Le théorème de Hahn-Banach admet de nombreuses extensions et variantes : nous en toucherons quelques mots plus loin. Voici un résultat dont va découler très simplement une version analytique de ce théorème, ainsi qu'une généralisation du théorème de Krein-Rutman. Rappelons avant tout qu'une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe non vide C est dite convexe sur C lorsque $f[\lambda x+(1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ pour tous points x,y de C et tout réel λ de $]0,1[$ [*;p.118].

Soient f une forme linéaire sur un sous-espace vectoriel F de E, g une fonction convexe sur une cellule convexe G dont l'internat rencontre F. Si f est majorée par g sur $F \cap {}^{i}G$, elle admet une extension linéaire l à E majorée par g sur G.

Considérons dans l'espace vectoriel $E \times \mathbb{R}$, les ensembles

$$A = \{(x,\alpha) \in G \times \mathbb{R} : \alpha > g(x)\} \text{ et } B = \{(x,\alpha) \in F \times \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$$

qui sont respectivement l'épigraphe de g et le graphe de f.

Il est facile de démontrer que A est une cellule convexe (adapter la preuve de [*;III.3.1.3,p.119]) dont l'internat est disjoint du sous-espace B de $E \times \mathbb{R}$ puisque f est majorée par g sur $F \cap {}^{i}G$. La version géométrique du théorème de Hahn-Banach (I.1.5) garantit l'existence d'une forme linéaire non nulle φ sur $E \times \mathbb{R}$, dont le noyau $\varphi^{-1}(\{0\})$ inclut B, et telle que ${}^{i}A \subset \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$. Pour tout point a de $F \cap {}^{i}G$, $\varphi(a,f(a)) = 0 < \varphi(a,1+g(a))$, par suite $\varphi(0,1+g(a)-f(a)) = [1+g(a)-f(a)]\,\varphi(0,1) > 0$, d'où $\varphi(0,1) > 0$.

Par ailleurs, $\varphi(x,\mu) = 0$ équivaut à $\varphi(x,0) + \mu\varphi(0,1) = 0$, ou encore à $\mu = -\frac{\varphi(x,0)}{\varphi(0,1)}$; ceci révèle instantanément l'existence et l'unicité de μ, de même que la linéarité de la forme l définie sur E par $l : x \to \mu$; de plus,

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) - \varphi(x,l(x)) = [\lambda-l(x)]\,\varphi(0,1).$$

Cette forme linéaire l sur E est majorée sur G par g; en effet, pour tout point x de G, le point $(x,g(x))$ appartient visiblement à ${}^{m}A$, d'où $\varphi(x,g(x)) = [g(x)-l(x)]\,\varphi(0,1) \geq 0$, ce qui entraîne $g(x) \geq l(x)$. De même, l est une extension linéaire de f à E, car, pour tout point y de F, $(y,f(y)) \in B$, d'où
$\varphi(y,f(y)) = [f(y)-l(y)]\,\varphi(0,1) = 0$ et $f(y) = l(y)$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com