Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

783

Alexander Dinghas

Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten

Herausgegeben von
R. Nevanlinna und C. Andreian Cazacu

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

783

Alexander Dinghas

Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten

Herausgegeben von
R. Nevanlinna und C. Andreian Cazacu

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Autor

Alexander Dinghas († 1974)
Dr. phil. habil.,
o. Professor für Mathematik
an der Freien Universität
Berlin

Herausgeber

Rolf Nevanlinna
Bulevardi 9A
00120 Helsinki 12
Finnland

Cabiria Andreian Cazacu
Facultatea de Matematică
Universitatea din Bucureşti
Str. Academiei 14
78015 Bucureşti
Rumänien

AMS Subject Classifications (1980): 30D35

ISBN 3-540-09759-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09759-7 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Dinghas, Alexander:
Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten /
Alexander Dinghas. Hrsg. von R. Nevanlinna u. C. Andreian Cazacu. –
Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.
(Lecture notes in mathematics; 783)
ISBN 3-540-09759-7 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-09759-7 (New York, Heidelberg, Berlin)

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

Für

F R I T H I O F und R O L F

N E V A N L I N N A

Aus Dankbarkeit für das

was ich von ihnen gelernt habe

und aus Freundschaft

Zur Person des Verfassers

Geboren am 9. Februar 1908 in Smyrna.
Studium der Mathematik und Theoretischen Physik: Berlin 1931-34.
Promotion Friedrich-Wilhelms-Universität 1936. Dr. phil. habil. 1939.
O. Professor für Mathematik Humboldt-Universität 1947. O. Professor Freie Universität Berlin 1949. Mitglied der Kongl. Vidensk. Selskab Trondheim, ausw. Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mitglied von Sigma-Xi, Chapter Fordham New York, auswärtiges Mitglied der Finnischen Akademie der Wissenschaften.
Hauptarbeitsgebiete: Komplexe Analysis und Theorie der konvexen Körper.
Gestorben am 19. April 1974 in Berlin.

Vorwort der Herausgeber

Professor Alexander Dinghas war während seiner letzten Lebensjahre mit der Aufgabe beschäftigt, eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der Wertverteilung zu verfassen. Sein Ziel war, die bei dieser Lehre verwendeten verschiedenen Methoden einheitlich zu behandeln, wobei auch seine eigenen Beiträge in diesem Gebiet, die bisher nur in einzelnen Publikationen erschienen waren und einem größeren Leserkreis weniger bekannt sind, weitgehend berücksichtigt werden sollten. Besonders ist zu betonen, daß das letzte Kapitel seines Werkes der Wertverteilung von Funktionen gewidmet ist, die in mehrfach zusammenhängenden Gebieten meromorph sind. Diese von G. af Hällström entwickelte Theorie ist bis jetzt ebenfalls nur durch Einzelpublikationen zugänglich gewesen.

Vor seinem unerwarteten Tod im April 1974 hatte Professor Dinghas die Arbeit an seinem Buch fast zu Ende geführt. Während seiner letzten schweren Erkrankung äußerte er den Wunsch, daß die Unterzeichneten das Manuskript in druckfertige Form und dann zur Veröffentlichung bringen sollten.

Diese Aufgabe hat mehr Zeit in Anspruch genommen, als vorgesehen war. Es hat sich herausgestellt, daß es nötig war, Verdeutlichungen, Ergänzungen und Korrekturen vorzunehmen, vor allem in den zwei letzten Kapiteln des Werkes. Die Herausgeber möchten an dieser Stelle nicht verabsäumen, Herrn H. Begehr für die Mühe bei der Korrektur des gesamten Werkes sowie für seine wertvolle Mitarbeit bei der Neuerstellung des fünften Kapitels aufrichtig zu danken. Herrn L. Volkmann sind wir für die Korrektur der zwei ersten Kapitel, für die Arbeit bei der Herstellung des Literaturverzeichnisses sowie für die Redigierung der letzten Reinschrift zu Dank verpflichtet.

Die letzte Maschinenschrift hat Frau Christa Siewert mit großer Sorgfalt angefertigt. Wir danken ihr, sowie Frau Ursula Stolze, die das unvollendete Manuskript noch für Professor Dinghas mit Maschine geschrieben hatte, und allen Sekretärinnen des I. Mathematischen Institutes der Freien Universität Berlin, die bei der Herstellung des Buches mitgeholfen haben.

Es war der Wunsch von Professor Dinghas, daß sein Werk in englischer Sprache erscheinen sollte. Herr R. Zavodnik hatte sich freundlichst bereit erklärt, die Übersetzung des Manuskriptes ins Englische vorzunehmen. Um eine weitere Verzögerung des Erscheinens zu vermeiden, haben sich die Unterzeichneten entschlossen, das Werk in deutscher Sprache zu veröffentlichen. Eine Möglichkeit dafür hat sich auch ergeben, als Professor B. Eckmann und Professor A. Dold das Werk in die Lecture Notes des Springer-Verlags aufgenommen haben.

Helsinki und Bukarest, im November 1978

Rolf Nevanlinna   Cabiria Andreian Cazacu

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Einführung in die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie ist, ähnlich wie meine im Bibliographischen Institut erschienene Einführung in die Cauchy-Weierstraßsche Funktionentheorie und die in der gelben Springer-Sammlung vor mehreren Jahren gedruckten Vorlesungen über Funktionentheorie, aus Seminaren und Vorlesungen hervorgegangen, die ich verschiedentlich an der Freien Universität Berlin gehalten habe. Maßgebend für die Gestaltung des Buches und die Stoffauswahl waren jedoch neben einer einsemestrigen Vorlesung an der Freien Universität über Wertverteilung und Uniformisierungstheorie 1969 und Anfang 1970 eine Vorlesungsreihe über Special Topics on Complex Functions im Akademischen Jahr 1970-71 an der Fordham University New York, und die unter Dinghas [14],[15] und [16] im Literaturverzeichnis angeführten Aufsätze über die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie.

Riemann war wohl der erste Mathematiker gewesen, der mit tiefem Blick für differentialgeometrische Zusammenhänge nachdrücklich darauf hingewiesen und dies zur Grundlage seiner Konzeption einer allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen gemacht hat, daß sämtliche, durch direktes Operieren auf die komplexe Veränderliche z erhaltenen Ergebnisse, mehr oder weniger verborgene Eigenschaften des Euler-Clairaut-d'Alembert-Cauchyschen (jetzt Cauchy-Riemannschen) Differentialgleichungssystems wiederspiegeln. Somit wurde er zum Begründer eines neuen Gebietes der Mathematik, nämlich der Funktionentheorie auf Flächen mit konformer Struktur. Riemanns Methoden und Begriffsbildungen, insbesondere die Auffassung des Wertbereiches einer analytischen Funktion als einer die komplexe Ebene mehrfach überdeckenden Fläche, haben die Entwicklung der Funktionentheorie nachhaltig und richtungbestimmend beeinflußt.

Historisch betrachtet entwickelte sich die Wertverteilungstheorie aus der logarithmischen Methode. Letztere kann wiederum bis Riemann (Benutzung einer Randwertformel vom Greenschen Typus), Cauchy (Formel über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion), Jensen (Jensensche Formel) und Carleman (harmonische Majoranten) zurückverfolgt werden. Als geschlossene Theorie und in deren allgemeinster Form wurde erstmalig die logarithmische Methode von F. und R. Nevanlinna in der groß angelegten Abhandlung: "Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie" aus dem Jahre 1922 entwickelt. Hier und in den bald darauf einsetzenden Arbeiten von R. Nevanlinna über den Picard-Borelschen Satz wurde nicht nur eine Reihe klassischer Sätze der Funktionentheorie einheitlich bewiesen und wesentlich verallgemeinert, sondern neben den Grundlagen der Wertverteilungstheorie meromorpher Funktionen in der komplexen Ebene auch das Rüstzeug einer allgemeinen Theorie der Abbildung (Ahlfors, Chern, Noshiro, Sario) von geeignet punktierten Riemannschen Flächen beliebigen Geschlechts in Riemannsche Flächen geschaffen.

Überraschenderweise haben sowohl die logarithmische Methode als auch die Wertverteilungstheorie trotz augenscheinlicher Erfolge und der Tatsache, daß der größte Teil der funktionentheoretischen Forschung begrifflich und methodisch von ihr wesentlich und nachhaltig beeinflußt wurde, noch keinen festen, gesicherten Platz im Universitäts-Unterrichtsplan gefunden. Das liegt nicht nur an Verschiebungen der Schwerpunkte im Unterrichtsplan vieler Universitäten, sondern auch an begrifflichen Schwierigkeiten, die dem heutzutage auf allgemeine Strukturen und Kategorien gedrillten Anfänger den Kontakt mit den Grundgedanken der Theorie erschweren.

Der Leser, der irgendwie Nutzen vom Lesen des vorliegenden Buches ziehen will, muß außer dem guten Willen zur unablässigen Mitarbeit und der Fähigkeit, allzu kurz entwickelte Beweise durchzugehen und nach Beispielen zu suchen, auch eine gute Kenntnis der elementaren klassischen Analysis, insbesondere die Kenntnis des reellen und komplexen Linienintegrals, mitbringen. Daß er auch irgendwann eine Vorlesung über klassische Funktionentheorie gehört oder zumindest ein Buch darüber gelesen haben muß, bedarf hier ebenfalls keiner eingehenden Begründung.

Über die Gliederung des Buches sei hier folgendes gesagt:

Kapitel 1 bringt sowohl als Hilfe für den Anfänger als auch aus dem Wunsch heraus, den Zusammenhang mit der historischen Entwicklung zu wahren, die grundlegenden Eigenschaften der harmonischen und der stetigen subharmonischen Funktionen sowie das Maximumprinzip für diese beiden Klassen und den Hauptgedanken der Carlemanschen Methode der harmonischen Majoranten. Entwickelt werden noch die dem Anfänger nicht allzu geläufigen Hilfsmittel, sofern diese für das Verständnis von späteren Zusammenhängen notwendig sind. Ergänzt werden diese Hilfsmittel durch klassische Sätze der Potentialtheorie (Gedankenkreis von Gauß-Ostrogradski-Green) und Indexsätze vom (Cauchy-)Jensen-Nevanlinnaschen Typus. Zur vollen Geltung kommen allerdings diese Entwicklungen erst in den Kapiteln 4 und 5.

Die Kapitel 2 und 3 haben den Zweck, den Leser mit denjenigen Funktionen vertraut zu machen, die später in den Kapiteln 4 und 5 eine grundlegende Rolle spielen werden. Diese Funktionen sind an erster Stelle die Greensche Funktion, die Evans-Selbergsche Kapazitätsfunktion und die klassische Poincarésche automorphe Invariante. F. Nevanlinnas Entdeckung, daß diese Funktion nicht nur mit dem Picardschen Satz, sondern auch mit der gesamten Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie auf das engste verknüpft ist, bedeutet einen wesentlichen Fortschritt in der Entwicklung der Wertverteilungstheorie und leitet in methodischer Hinsicht, zusammen mit den weiterführenden Arbeiten von Ahlfors (Heranziehung der Gauß-Bonnetschen Formel), die Geometrisierung der Nevanlinnaschen Theorie der meromorphen Funktionen ein.

Die Kapitel 4 und 5 bringen die klassische Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie und wesentliche Teile der späteren Verallgemeinerungen durch Ahlfors, G. af Hällström und Chern. Daß hier sämtliche bekannte Beweisanordnungen (R. Nevanlinna 1925, F. Nevanlinna 1927, Ahlfors 1936 und Dinghas 1973) des zweiten Nevanlinnaschen Fundamentalsatzes unter Hervorhebung gemeinsamer Berührungspunkte und Hinweis auf methodische Unterschiede zur Darstellung kamen, lag wiederum an meinem Wunsch, das Interesse des Lesers für funktionentheoretische Zusammenhänge zu erwecken.

Aus Raumersparnis und aus dem Gefühl heraus, daß die ausgezeichnete Monographie von Sario-Noshiro eine vollständige (wenn auch für die Anfänger etwas zu hohe), kaum zu verbessernde Darstellung der Fortschritte der Wertverteilungstheorie nach R. Nevanlinna und G. af Hällström liefert, sind die Entwicklungen des Kapitels 5 kurz gehalten. Was ausführlich gebracht werden konnte, war die G. af Hällströmsche Theorie der meromorphen Funktionen und die Ahlforssche differentialgeometrische Methode. Außer kurzer Hinweise in den Ergänzungen wurden nicht gebracht die H. Selbergsche Theorie der Wertverteilung algebroider Funktionen, die Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen und die Chernsche Verallgemeinerung der Nevanlinnaschen Wertverteilungstheorie. Bei der Einführung der Nevanlinnaschen Begriffsbildungen, wie etwa die charakteristische Funktion, die Anzahlfunktion und die Schmiegungsfunktion (die hier allgemeiner als sonst definiert wird), habe ich mich bemüht, so wenig wie möglich Änderungen an den klassischen Bezeichnungen vorzunehmen. Vereinzelte Versuche, besonders jüngerer Mathematiker, für jede mehr oder weniger wichtige Verallgemeinerung eines Begriffes gleichzeitig ein neues, an die alte Bezeichnung kaum erinnerndes Symbol durchzusetzen, erinnern an die (erfolglosen) Bemühungen Echnatons, den Namen seines Vaters Amenophis III von jeder Säule und aus jeder Inschrift auszumeißeln. Andererseits war es notwendig gewesen, auch hier bei der Einführung der Nevanlinnaschen charakteristischen Funktion (in lokaler Form) Verallgemeinerungen und

Präzisierungen vorzunehmen und - zur Umgehung von singulären Integralen - klassische Konvexitätseigenschaften auf direktem Wege zu beweisen.

Sowohl die Ergänzungen als auch die Aufgaben gehören eigentlich zum Text und unterscheiden sich von ihm lediglich durch die Kürze der Darstellung bzw. der Anleitung. Die historischen Notizen am Ende jedes Kapitels, insbesondere diejenigen am Ende des Kapitels 5, sind unvollständig und beziehen sich vorwiegend auf den hier behandelten Stoff. Das gleiche gilt für die Literaturangaben.

Bei der Benennung von Sätzen durch zwei oder drei Namen bedeutet der Bindestrich eine allgemein akzeptierte Bezeichnung. Dagegen soll ein Punkt dazwischen wesentliche Mitwirkung bei der (endgültigen) Gestaltung des betreffenden Satzes zum Ausdruck bringen.

Die Wahl der Ergänzungen sowie der Übungsaufgaben wurde derart getroffen, daß der Leser, besonders der Studierende, einen möglichst breiten Eindruck von der Leistungsfähigkeit der logarithmischen Methode und, wie bereits erwähnt, so viel wie möglich neue Methoden übermittelt erhält.

Zu danken habe ich Herrn Professor Dr. R. Nevanlinna für sein Interesse an meiner Forschung und seine Ermunterung, dieses Buch zu Ende zu schreiben.

Berlin, Freie Universität, September 1970, und
Städtisches Behring-Krankenhaus, Januar 1974,
New York, Fordham University, April 1971 und August 1972,
Baden-Baden, März 1973

Alexander Dinghas

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Zweiter Teil

Kapitel 4

Erster Teil

DIE LOGARITHMISCHE METHODE UND DIE ANALYTISCH-POTENTIALTHEORETISCHEN GRUNDLAGEN DER NEVANLINNASCHEN WERTVERTEILUNGSTHEORIE

Kapitel 1

Harmonische Funktionen. Das Maximumprinzip für harmonische und stetige subharmonische Funktionen. Klassische Integralidentitäten. Die Grundformel der logarithmischen Methode. Anwendungen

1. Allgemeine Definitionen. Der Begriff der harmonischen und der stetigen subharmonischen Funktion. Das Maximumprinzip. Übergang zu komplexwertigen Abbildungen. Im folgenden soll bedeuten:

(i) $\mathbb{C}$ die (offene) komplexe Ebene.

(ii) $z = x+iy$ $(x,y$ reell) einen Punkt von $\mathbb{C}$.

(iii) $\overline{z} = x-iy$ den zu z konjugierten Punkt.

(iv) $\hat{}$ die Abschlußoperation bei Punktmengen von $\mathbb{C}$.

(v) G, G_0 Gebiete von $\mathbb{C}$ bzw. $\hat{\mathbb{C}}$.

(vi) γ bzw. (γ) Kurven bzw. Kurvensysteme $(\gamma_0,-\gamma_1,\dots,-\gamma_n)$ von sich nicht überschneidenden einfach geschlossenen, stückweise zweimal stetig differenzierbaren Kurven γ_0 (als äußere Kurve), $\gamma_1,\dots,\gamma_n$. Jede Kurve wird als positiv orientiert vorausgesetzt und auf die Bogenlänge bezogen.

(vii) $d\sigma$ bzw. $d\sigma(z)$ (auch $d\sigma_z$ oder $dx\,dy$) das euklidische Flächenelement von $\mathbb{C}$ in z.

(viii) ds bzw. $ds(\zeta)$ (auch ds_ζ oder $|d\zeta|$) das Bogenelement einer Kurve γ in $\zeta \in \gamma$.

(ix) Bei gegebenem (auf s bezogenem) Kurvenbogen γ, $\frac{\partial}{\partial s}$ den Operator

$$(1.1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{ds} \qquad \left(\text{besser: } \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(x) $\frac{\partial}{\partial n}$ den Operator

$$(1.2)\qquad -\frac{\partial}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dx}{ds} \qquad \left(\text{besser: } -\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Offenbar gilt, falls z, $\overline{z}$ als unabhängige Veränderliche aufgefaßt werden,

$$(1.3)\qquad \frac{\partial}{\partial s}\,ds = \frac{\partial}{\partial z}\,dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$$

und

$$(1.4)\qquad \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial n}\,ds = \frac{\partial}{\partial z}\,dz - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}\,.$$

(xi) Δ (auch Δ_z) den (zweidimensionalen) Laplaceschen Operator

$$(1.5)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\,.$$

(xii) $f \in C^\alpha$ (genauer: $f \in C^\alpha[G]$) eine (im allgemeinen reellwertige) Funktion mit der Eigenschaft:
(xiii) Für $\alpha > 0$ ganz, C^α (genauer: $C^\alpha[G]$) die Klasse derjenigen in G definierten reellwertigen Funktionen $f = \{f(x,y)\} = \{f(z,\bar{z})\}$ (kurz: $\{f(z)\}$), die stetige partielle Ableitungen in G nach x und y von der Ordnung α besitzen. Wie üblich soll C die Klasse der auf G definierten stetigen Funktionen bedeuten.
(xiv) $U(z)$ bzw. $U'(z)$ ($z \in \hat{C}$) eine Umgebung bzw. eine punktierte Umgebung von z . (Der Fall $z = \infty$ wird durch die Transformation $z' = z^{-1}$ ($z \neq 0,\infty$) auf den Fall $z' = 0$ zurückgeführt.)
(xv) Für $f \in C[G]$ ist $\mu(r,f(z))$ der durch die Gleichung

$$(1.6)\qquad \mu(r,f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} f(z+\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

definierte Mittelwert von f . Hierbei wird $z+\zeta$ aus einer Umgebung $U'(z)$ ($U(z) \subset G$) genommen, welche die punktierte Kreisscheibe $z + C'_r$,

$$(1.7)\qquad C'_r = C_r - \{0\} = \{\ \zeta :\ 0 < |\zeta| < r\ \}$$

und ihren Umkreis enthält. Ist $z = 0$, so wird $\mu(r,f)$ anstelle $\mu(r,f(0))$ geschrieben. Offenbar gilt

$$(1.8)\qquad \lim_{r\to 0} \mu(r,f(z)) = f(z)\,.$$

Die Eigenschaft

$$(1.9)\qquad \mu(r,f(z)) = f(z) \qquad \text{(kurz: } \mu f = f\text{)}$$

für sämtliche Punkte z eines Gebietes G von $\mathbb{C}$ ist für die Klasse der gleich zu definierenden harmonischen Funktionen charakteristisch.

Definition. Sei G ein Gebiet von $\mathbb{C}$. Dann wird jede reellwertige Funktion $\{u(z)\}$ mit den Eigenschaften

(1) $u \in C[G]$ und

(2) $\mu u = u$ in jedem Punkt von G

harmonisch in G genannt.

Genügt die stetige reellwertige Funktion $\{u(z)\}$ statt der Gleichheit (2) der Ungleichung

(2)' $\mu u \geq u$,

so wird u eine in G stetige subharmonische Funktion genannt.

Ist $\{-u(z)\}$ eine in G stetige subharmonische Funktion, so wird u eine in G stetige superharmonische Funktion genannt.

Satz (Maximumprinzip für harmonische und stetige subharmonische Funktionen). Sei

$$M_O = M_O u = \limsup_{z \to \partial G} u(z) \qquad (z \in G). \tag{1.10}$$

Dann gilt entweder $u < M_O$ oder $u \equiv M_O$ in jedem Punkt von G .

Das (ursprünglich auf Cauchy zurückgehende) Maximumprinzip ist Spezialfall des allgemeineren Satzes:

Satz (Carlemans Prinzip der harmonischen Majoranten). Sei u eine stetige subharmonische Funktion in einem Gebiet G . Man nehme an, die in G definierte harmonische Funktion $\{h(z)\}$ habe die Eigenschaft

$$\limsup_{z \to \partial G} \{u(z) - h(z)\} \leq 0 . \tag{1.11}$$

Dann gilt entweder $u < h$ oder $u \equiv h$ in jedem Punkt von G .

Beweis. Man setze $u_O = u-h$ und

$$Mu_O = \sup_{z \in G} u_O(z) . \tag{1.12}$$

Dann hat u_O die Eigenschaft $Mu_O \geq u_O$ in G , und es gilt entweder $u_O(z_O) = Mu_O$ mit einem $z_O \in G$ oder

$$\lim_{z_n \to z_O} u_O(z_n) = Mu_O \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n \to \infty} u_O(z_n) = Mu_O$$

für eine (Cauchy-)Folge $\{z_n\}_1^\infty$ in G . Im ersten Falle muß Mu_O endlich und somit (nach der Ungleichung $\mu u_O \geq u_O$) u_O konstant und gleich Mu_O in der Umgebung von z_O sein. Das hat wiederum zur