Lecture Notes in Mathematics 1581

D. Bakry R.D. Gill S.A. Molchanov

Lectures on Probability Theory

Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXII-1992

Editor: P. Bernard

Springer-Verlag

D. Bakry R.D. Gill S.A. Molchanov

Lectures on Probability Theory

Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXII-1992

Editor: P. Bernard

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Authors

Dominique Bakry
Université Paul Sabatier
Laboratoire de Statistiques et Probabilités
118, route de Narbonne
F-31062 Toulouse, France

Richard D. Gill
University Utrecht
Mathematical Institute
Budapestlaan 6
NL-3584 Utrecht, Netherlands

Stanislav A. Molchanov
University of Southern California
Department of Mathematics
Los Angeles, CA 90089-1113, USA

Editor

Pierre Bernard
Université Blaise Pascal
Clermont Ferrand
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
F-63177 Aubière, France

Mathematics Subject Classification (1991): 47D07, 60G35, 60G60, 60H15, 60H20, 60J35, 60J60, 62-02, 62G05

ISBN 3-540-58208-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-58208-8 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

CIP-Data applied for

Printed in Germany

Typesetting: Camera ready by author
SPIN: 10130190 46/3140-543210 - Printed on acid-free paper

Editorial Policy

§ 1. Lecture Notes aim to report new developments - quickly, informally, and at a high level. The texts should be reasonably self-contained and rounded off. Thus they may, and often will, present not only results of the author but also related work by other people. Furthermore, the manuscripts should provide sufficient motivation, examples and applications. This clearly distinguishes Lecture Notes manuscripts from journal articles which normally are very concise. Articles intended for a journal but too long to be accepted by most journals, usually do not have this "lecture notes" character. For similar reasons it is unusual for Ph. D. theses to be accepted for the Lecture Notes series.

§ 2. Manuscripts or plans for Lecture Notes volumes should be submitted (preferably in duplicate) either to one of the series editors or to Springer- Verlag, Heidelberg . These proposals are then refereed. A final decision concerning publication can only be made on the basis of the complete manuscript, but a preliminary decision can often be based on partial information: a fairly detailed outline describing the planned contents of each chapter, and an indication of the estimated length, a bibliography, and one or two sample chapters - or a first draft of the manuscript. The editors will try to make the preliminary decision as definite as they can on the basis of the available information.

§ 3. Final manuscripts should preferably be in English. They should contain at least 100 pages of scientific text and should include

- a table of contents;
- an informative introduction, perhaps with some historical remarks: it should be accessible to a reader not particularly familiar with the topic treated;
- a subject index: as a rule this is genuinely helpful for the reader.

Further remarks and relevant addresses at the back of this book.

Lecture Notes in Mathematics 1581

Editors:
A. Dold, Heidelberg
B. Eckmann, Zürich
F. Takens, Groningen

INTRODUCTION

This volume contains lectures given at The Saint-Flour Summer School of Probability Theory during the period 9th - 25th July, 1992.

We thank the authors for all the hard work they accomplished. Their lectures are a work of reference in their domain.

The School brought together 57 participants, 28 of whom gave a lecture concerning their research work.

Below you will find the list of participants and their papers, a summary of which can be obtained on demand.

Finally, to facilitate research concerning previous schools we give here the number of the volume of "Lecture Notes" where they can be found :

Lecture Notes in Mathematics

1971 : n° 307 - 1973 : n° 390 - 1974 : n° 480 - 1975 : n° 539 -
1976 : n° 598 - 1977 : n° 678 - 1978 : n° 774 - 1979 : n° 876 -
1980 : n° 929 - 1981 : n° 976 - 1982 : n° 1097 - 1983 : n° 1117 -
1984 : n° 1180 - 1985 - 1986 et 1987 : n° 1362 - 1988 : n° 1427 -
1989 : n° 1464 - 1990 : n° 1527 - 1991 : n° 1541

Lecture Notes in Statistics

1986 : n° 50

TABLE OF CONTENTS

L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes.

Dominique Bakry

Dominique Bakry
Laboratoire de Statistiques et Probabilités
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne,
31062, TOULOUSE Cedex.
FRANCE

0— Introduction.

Un semigroupe markovien sur un espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$ est le noyau de transition d'un processus de MARKOV sur cet espace, qu'on considère comme une transformation agissant sur les fonctions boréliennes bornées. Dans certaines conditions, cet opérateur est hypercontractif, c'est à dire que, pour des valeurs assez grandes du paramètre t, il envoie $\mathbf{L}^2(\mu)$ dans $\mathbf{L}^4(\mu)$. Les valeurs 2 et 4 ne sont bien sûr choisies ici que pour fixer les idées. Cette propriété d'hypercontractivité, tout d'abord établie pour le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK, s'est avérée par la suite être une propriété partagée par de nombreux semigroupes et extrêmement utile dans l'étude de ceux-ci.

L'article fondamental de GROSS [G] a établi le lien qu'il y a entre hypercontractivité et inégalités de SOBOLEV logarithmiques. Depuis, une littérature considérable s'est développée sur le sujet, et les quelques références que nous donnons à la fin du cours n'en donnent qu'un faible aperçu. Tant du point de vue de l'établissement des inégalités de SOBOLEV logarithmiques que pour l'usage qu'on peut en faire, cette notion a pris une place de plus en plus importante dans l'étude des semigroupes, et, par conséquent, des problèmes liés à l'étude des générateurs des processus de MARKOV dans les situations les plus diverses.

À l'origine, l'objet de ce cours était de donner un panorama le plus exhaustif possible des méthodes utilisées autour de cette notion : estimations du noyau de la chaleur, en temps grand et en temps petit, liens entre géométrie et inégalités de SOBOLEV sur les variétés compactes, utilisation des inégalités de SOBOLEV logarithmiques en mécanique statistique et dans l'étude des processus liés aux algorithmes de recuit simulé, etc. Très vite, je me suis aperçu qu'il faudrait pour celà beaucoup plus de temps que ce dont je disposais, et j'ai donc décidé de me limiter à des aspects particuliers de l'hypercontractivité. Les points choisis ne sont pas nécessairement les plus importants, ni les plus nouveaux, mais essentiellement ceux qui me tenaient le plus à coeur, pour une raison ou pour une autre, ou ceux que j'ai eu le temps de traiter pendant que j'écrivais ce cours. En particulier, et contrairement à ce que j'avais annoncé, je ne parlerai ici ni de mécanique statistique, ni de recuit simulé. Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à rédiger ce cours, et tout particulièrement M. LEDOUX, sans qui ces notes auraient été beaucoup moins complètes, ainsi que tous les auditeurs de l'école d'été dont les remarques et les critiques m'ont été précieuses pour leur rédaction définitive.

Ce cours est divisé en 6 chapitres, qui se composent comme suit :

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons au semigroupe d'ORNSTEIN-UHLENBECK, qui est à l'origine de l'étude de l'hypercontractivité. Après l'avoir défini, nous montrons les relations qu'il a avec la transformation de FOURIER dans $\mathbb{R}$, et comment on l'approxime à partir d'un processus de pile ou face. Puis nous donnons le théorème d'hypercontractivité de NELSON [N], avec une démonstration proche de celle de GROSS, qui est liée à cette approximation. Nous donnons ensuite la version de ce théorème pour un paramètre t complexe, due à BECKNER [Be], et une conséquence importante de ce résultat qui est l'inégalité de BABENKO sur la transformation de FOURIER.

Le chapitre 2 est une introduction aux semigroupes à noyaux positifs, et en particulier aux semigroupes de MARKOV. Nous introduisons les notions de symétrie, d'invariance, de générateur. Dans la suite, les semigroupes qui nous intéresseront seront ceux qui possèdent un opérateur carré du champ, qui est la notion importante introduite dans ce chapitre, et qui permet de définir ensuite la notion de diffusion abstraite. Ce chapitre se termine par une exposition détaillée des deux exemples fondamentaux (et triviaux) qui nous serviront de guide par la suite, les semigroupes de Markov sur un espace fini d'une part et les semigroupes de diffusion elliptiques sur les variétés compactes de l'autre.

Dans le troisième chapitre, nous exposons le théorème fondamental de Gross, qui fait le lien entre propriétés d'hypercontractivité d'un semigroupe et inégalités de Sobolev logarithmiques. Nous mettons ici en lumière les différences qu'il existe entre les semigroupes de diffusion et les autres quant au comportement vis à vis des inegalités de Sobolev logarithmiques. Nous donnons aussi le résultat fondamental, dû à Rothaus, liant les inégalités de Sobolev logarithmiques à l'existence d'un trou spectral. Puis nous montrons que, pour les diffusions, la propriété d'hypercontractivité est équivalente à la décroissance exponentielle de l'entropie le long du semigroupe, et nous donnons un critère pour obtenir l'hypercontractivité redonnant le théorème de Nelson. Enfin, nous nous intéressons à l'hypercontractivité dans le domaine complexe, en exhibant des relations entre le résultat de Beckner et les inégalités de Sobolev logarithmiques.

Dans le chapitre 4, nous introduisons les inégalités de Sobolev ordinaires, et montrons comment elles se transforment en une famille d'inégalités de Sobolev logarithmiques. La méthode que nous exposons alors, due à Davies et Simon, permet de déduire d'une inégalité de Sobolev des estimations uniformes sur le noyau du semigroupe de la chaleur. Nous donnons aussi la réciproque de ce résultat, due à Varopoulos, établissant ainsi l'équivalence entre comportement polynomial du semigroupe au voisinage de 0 et inégalités de Sobolev. Cette méthode repose en fait sur l'introduction d'inégalités intermédiaires, que nous appelons inégalités de Sobolev faibles, et permettent d'obtenir des minorations uniformes aussi bien que des majorations.

Dans le chapitre 5, nous exposons une méthode similaire à celle du chapitre précédent due à Davies, permettant d'obtenir des majorations non uniformes sur le noyau du semigroupe, dans le cas des diffusions. Ces majorations s'expriment en fonction d'une distance intrinsèque associée aux diffusions, et qui n'est rien d'autre que la distance riemannienne dans le cas des diffusions elliptiques sur les variétés. La même méthode appliquée dans le cas des minorations permet d'obtenir une estimation sur le diamètre de l'espace, en termes de la distance évoquée plus haut. Enfin, ce chapitre se conclut par quelques considérations élémentaires sur les relations entre inégalités de Sobolev et croissance du volume des boules.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur Γ_2 associé aux diffusions. Cet opérateur permet d'introduire une courbure et une dimension intrinsèques liées aux semigroupes. Après avoir montré comment se calculent ces courbures et dimensions dans le cas des diffusions elliptiques sur les variétés, nous montrons comment ces notions permettent d'établir des inégalités de Sobolev logarithmiques, de Sobolev faibles, et même des inégalités de Sobolev, tous ces résultats menant à des constantes que nous savons être optimales dans le cas des laplaciens des sphères, ainsi que dans le cas du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, où nous retrouvons le théorème de Gross.

I.— Le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Nelson.

Dans tout ce chapitre, nous nous intéresserons à la mesure gaussienne standard μ sur $\mathbb{R}$: $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\, dx$. Nous noterons $\langle f \rangle$ l'intégrale d'une fonction f par rapport à cette mesure, et, pour $p \in [1, \infty[$, nous noterons L^p l'espace des fonctions f telles que $\langle |f|^p \rangle < \infty$. La norme dans cet espace sera notée $\|f\|_p$. D'autre part, le produit scalaire de deux fonctions f et g dans l'espace L^2 sera noté $\langle f, g \rangle$. Si f est une fonction numérique bornée définie sur $\mathbb{R}$, nous noterons $\|f\|_u$ sa norme uniforme: $\|f\|_u = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, ayant k dérivées bornées (on dira alors qu'elle est de classe $\mathcal{C}_b^k$), nous noterons $\|f\|_{(k)}$ la quantité $\sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_u$. Nous espérons qu'il n'y aura pas de confusion avec la norme $\| \ \|_k$ définie plus haut.

De façon générale, si f est une fonction numérique bornée définie sur un ensemble E, nous noterons $\|f\|_u$ sa norme uniforme: $\|f\|_u = \sup_E |f(x)|$. De même, lorsque $(E, \mathcal{F}, \nu)$ est un espace mesuré, nous noterons $\|f\|_p$ la norme d'une fonction f définie dans l'espace $\mathbf{L}^p(\nu)$: $\|f\|_p = [\int_E |f(y)|^p \, d\nu(y)]^{1/p}$, lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la mesure ν.

Nous renvoyons à l'article de Meyer [M1] pour une présentation plus détaillée du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$. On pourra également consulter le livre de N. Bouleau et F.Hirsch [BH]. Le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ est défini par la famille $\mathbf{P}_t$ ($t \geq 0$) d'opérateurs agissant sur les fonctions boréliennes bornées par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\, \mu(dy) \\ &= E[f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)], \end{aligned} \tag{1.1}$$

où Y est une variable gaussienne centrée réduite $N(0,1)$. Nous noterons le plus souvent cette nouvelle fonction $\mathbf{P}_t f(x)$ pour alléger les notations.

En d'autres termes, si l'on considère deux variables gaussiennes indépendantes X et Y, et si l'on pose $X_t = c_t X + s_t Y$, avec $c_t = \exp(-t)$ et $s_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$, alors

$$P_t(f)(x) = E[f(X_t)/X = x]. \tag{1.2}$$

Le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$ est défini de façon analogue.

Avec cette définition, il est facile de vérifier les propriétés suivantes:

(1) **Générateur infinitésimal.**
Si la fonction f admet trois dérivées bornées sur $\mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{C}_b^3$), alors

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathbf{P}_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x).$$

On obtient ceci immédiatement en écrivant un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de x, avec un reste borné grâce à l'hypothèse $f \in \mathcal{C}_b^3$. (On peut bien entendu alléger considérablement les conditions sur f pour obtenir ce résultat, mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite.)

Nous appellerons désormais $\mathbf{L}$ cet opérateur, défini sur les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{L}f(x) = f''(x) - xf'(x). \tag{1.3}$$

(2) **Propriété de semigroupe : $\mathbf{P}_t \circ \mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{t+s}$.**
Pour voir cette propriété, prenons trois variables gaussiennes $N(0,1)$ indépendantes X, Y et Z, et posons $c_t = e^{-t}$, $s_t = \sqrt{1-e^{-2t}}$, $c_s = e^{-s}$, et $s_s = \sqrt{1-e^{-2s}}$. Nous poserons $X_t = c_t X + s_t Y$ et $U = c_s X_t + s_s Z$. Nous avons

$$\mathbf{P}_t \circ \mathbf{P}_s(f)(x) = E\left[E[f(U)/X_t]/X = x\right].$$

Mais $E[f(U)/X_t] = E[f(U)/(X,Y)]$, et donc

$$\mathbf{P}_t \circ \mathbf{P}_s(f)(x) = E[f(U)/X = x].$$

Pour calculer cette loi conditionnelle d'un couple de gaussiennes centrées réduites, il suffit d'observer que $E(UX) = e^{-(t+s)}$, et donc que

$$U = e^{-(t+s)}X + \sqrt{1 - e^{-2(t+s)}}Y',$$

où Y' est une variable gaussienne centrée réduite indépendante de X. Finalement, il nous reste

$$E[f(U)/X = x] = \mathbf{P}_{t+s}f(x).$$

(3) **Propriété de symétrie :**
pour deux fonctions boréliennes bornées f et g, on a toujours

$$\langle g, \mathbf{P}_t f\rangle = \langle \mathbf{P}_t g, f\rangle.$$

En effet, si l'on désigne par X et Y deux variables gaussiennes standard indépendantes, alors, d'après la formule (1.2), on a

$$\langle f, \mathbf{P}_t g\rangle = E[g(X)\mathbf{P}_t f(X)] = E[g(X) f(e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)].$$

Or, le couple le variables $(X, e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}Y)$ a une loi symétrique, et on peut donc échanger les rôles de f et g dans la formule précédente.

Remarquons que la propriété de symétrie précédente montre l'invariance de l'opérateur $\mathbf{P}_t$:

$$\langle \mathbf{P}_t f\rangle = \langle f\rangle.$$

Il suffit pour le voir d'appliquer la propriété de symétrie avec $g = 1$, puisque, d'après (1.1), $\mathbf{P}_t 1 = 1$.

De la définition, il découle immédiatement que $\|\mathbf{P}_t f\|_u \leq \|f\|_u$. D'autre part, il est clair que, si f est une fonction dérivable à dérivée bornée, il en va de même de $\mathbf{P}_t f$, et l'on a $(\mathbf{P}_t f)' = e^{-t}\mathbf{P}_t(f')$. En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}_b^k$, nous avons

$$\|\mathbf{P}_t f\|_{(k)} \leq \|f\|_{(k)}. \tag{1.4}$$

De la propriété de semigroupe (2), on déduit immédiatement que les opérateurs $\mathbf{P}_t$ et $\mathbf{P}_s$ commutent. Si on utilise alors la propriété (1) ainsi que la remarque précédente, on voit que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}_b^3$, alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_t f = \mathbf{L}(\mathbf{P}_t f) = \mathbf{P}_t(\mathbf{L}f).$$

Ceci nous montre que, si f est de classe $\mathcal{C}_b^3$, alors la fonction $\hat{f}(x,t)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0,\infty[$ par $\hat{f}(x,t) = \mathbf{P}_t f(x)$ est la solution de l'équation de la chaleur(*)

$$\begin{cases} \partial/\partial t\, \hat{f}(x,t) = \mathbf{L}\hat{f}(x,t) \\ \hat{f}(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Nous voyons directement sur la définition que l'opérateur $\mathbf{P}_t$ se représente par un noyau de mesures de probabilité (noyau de MEHLER):

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(y,x)\, \mu(dy), \text{ avec}$$

$$p_t(y,x) = (1-e^{-2t})^{-1/2} \exp[-1/2\,(e^{2t}-1)^{-1}(y^2 - 2e^t xy + x^2)].$$

On voit donc immédiatement qu'un tel opérateur est une contraction de $\mathbf{L}^\infty(\mu)$:

$$\|\mathbf{P}_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

D'autre part, il préserve la positivité des fonctions. Ceci, joint à la propriété d'invariance de la mesure μ, montre que $\mathbf{P}_t$ est une contraction de $\mathbf{L}^1(\mu)$. En effet

$$\|\mathbf{P}_t f\|_1 = \langle |\mathbf{P}_t f| \rangle \leq \langle \mathbf{P}_t |f| \rangle = \langle |f| \rangle = \|f\|_1.$$

De même, $\mathbf{P}_t$ est une contraction dans tous les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$:

$$\forall p \in [1,\infty],\ \|\mathbf{P}_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$

Le but principal de ce chapitre est d'améliorer ce résultat.

Polynômes de HERMITE.

Rappelons tout d'abord que les polynômes forment un sous-espace dense de $\mathbf{L}^2(\mu)$: c'est le cas pour toute mesure ν sur $\mathbb{R}$ ayant au moins un moment exponentiel, comme la mesure gaussienne. En effet, si une fonction f de $\mathbf{L}^2(\nu)$ est orthogonale à tous les polynômes, la mesure $\nu_1 = f\,\nu$ admet également au moins un moment exponentiel (inégalité de SCHWARZ), et donc sa transformée de LAPLACE est analytique au voisinage de 0. Maintenant, l'hypothèse faite sur f montre que cette transformée a en 0 toutes ses dérivées nulles, et est donc nulle. On en déduit la nullité de f, et par suite la densité des polynômes.

(*) Il est un peu abusif de parler de "la solution" de l'équation de la chaleur dans la mesure où nous n'avons pas pour l'instant d'unicité.

Les polynômes d'HERMITE $H_n(x)$ forment une famille de polynômes orthogonale pour cette mesure. On peut les définir à partir de leur série génératrice :

$$\exp(tx - t^2/2) = \sum_n \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

En introduisant une variable gaussienne standard Y, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t(\exp(s \bullet - s^2/2))(x) &= \exp(-s^2/2) E\big[\exp[s(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}Y)]\big] \\ &= \exp(sxe^{-t} - s^2/2) E\big[\exp[s\sqrt{1 - e^{-2t}}Y]\big].\end{aligned}$$

Sachant que $E[e^{\alpha Y}] = \exp(\alpha^2/2)$, on obtient donc

$$\mathbf{P}_t(\exp(s \bullet - s^2/2))(x) = \exp(se^{-t}x - s^2 e^{-2t}/2).$$

En identifiant les séries, il vient immédiatement

$$\mathbf{P}_t(H_n) = e^{-nt} H_n. \tag{1.5}$$

Les polynômes H_n sont donc vecteurs propres de $\mathbf{P}_t$, de valeur propre e^{-nt}.

L'opérateur $\mathbf{P}_t$ étant symétrique dans l'espace L^2 (propriété (3)), les polynômes de HERMITE sont donc orthogonaux dans cet espace. Pour calculer leur norme, il suffit alors d'écrire

$$\langle \exp(2t \bullet - t^2) \rangle = \sum_n \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \|H_n\|_2^2 = \exp(t^2).$$

En identifiant les séries, il vient $\|H_n\|_2^2 = n!$ Les polynômes $H_n/\sqrt{n!}$ forment ainsi une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\mu)$. La formule (1.5) décrit donc la décomposition spectrale de l'opérateur $\mathbf{P}_t$:

Si une fonction f de $\mathbf{L}^2(\mu)$ se décompose sous la forme $\sum_n a_n H_n$, avec $\sum_n n! a_n^2 < \infty$, alors $\mathbf{P}_t f = \sum_n e^{-nt} a_n H_n$.

Ceci nous permet de définir l'opérateur $\mathbf{P}_t$ pour des valeurs complexes du paramètre t :

lorsque $t = t_1 + it_2$ est un nombre complexe à partie réelle t_1 positive ou nulle, $\omega = \exp(-t)$ est un complexe de module inférieur ou égal à 1. On peut alors définir, pour $f = \sum_n a_n H_n$,

$$\mathbf{P}_t(f) = \sum_n \omega^n a_n H_n, \tag{1.6}$$

et cet opérateur est une contraction de $\mathbf{L}^2(\mu)$.

D'autre part, la formule (1.1) peut se réécrire

$$\mathbf{P}_t(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(y - \omega x)^2}{2(1 - \omega^2)}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi(1 - \omega^2)}}, \tag{1.7}$$

lorsque $\omega = \exp(-t)$. Cette formule se prolonge évidemment au cas complexe, à condition de choisir la détermination principale de $\sqrt{z}$ dans le demiplan $\mathcal{R}e(z) > 0$.

Liens avec la transformation de Fourier.

Désignons par $\mathbf{F}$ la transformation de Fourier de $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{F}(f)(x) = \int f(y)\exp(ixy)\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

(Attention à la normalisation dans cette définition.)

Alors, d'après la formule classique de la transformation de Fourier de la loi gaussienne, on a

$$\mathbf{F}(\exp(t\bullet - \bullet^2/2))(x) = \exp(-(x-it)^2/2).$$

Appelons $\mathbf{M}$ l'opérateur de multiplication par la fonction $\exp(-x^2/2)$, et $\mathbf{F}_1$ l'opérateur $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{M}$. Il vient

$$\mathbf{F}_1(\exp(t\bullet))(x) = \exp(t^2/2 + ixt).$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{F}_1(\exp(\sqrt{2}t\bullet - t^2/2) = \exp(i\sqrt{2}t\bullet + t^2/2),$$

ce qui donne, en identifiant les séries

$$\mathbf{F}_1(H_n(\sqrt{2}\bullet)) = i^n H_n(\sqrt{2}\bullet).$$

En d'autres termes, en appelant $\mathbf{T}_{\sqrt{2}}$ l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$: $\mathbf{T}_{\sqrt{2}}f(x) = f(\sqrt{2}x)$, nous avons

$$\mathbf{T}_{\sqrt{2}}^{-1}\mathbf{F}_1\mathbf{T}_{\sqrt{2}}(H_n) = i^n H_n.$$

Si nous comparons cette formule à celle donnant la décomposition spectrale de $\mathbf{P}_t$ (1.5), nous obtenons

$$(\mathbf{M}\mathbf{T}_{\sqrt{2}})^{-1}\mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{T}_{\sqrt{2}} = \mathbf{P}_{-i\pi/2}. \tag{1.8}$$

Approximation du semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Considérons l'espace à deux points $E_1 = \{-1, 1\}$, que nous munissons de la mesure uniforme $dx = \frac{1}{2}\{\delta_{-1} + \delta_1\}$. Sur cet espace, introduisons l'opérateur $\mathbf{P}_t^1$ défini par

$$\mathbf{P}_t^1 f(x) = \int f(y)(1 + e^{-t}xy)\,dy.$$

Remarquons que toute fonction sur cet espace à deux points se représente de façon unique sous la forme $f(x) = a + bx$, et alors

$$\mathbf{P}_t^1(a + bx) = a + e^{-t}bx.$$

Cette famille d'opérateurs forme un semigroupe

$$\mathbf{P}_t^1 \circ \mathbf{P}_s^1 = \mathbf{P}_{t+s}^1. \tag{1.9}$$

Le générateur infinitésimal de ce semigroupe,

$$\mathbf{L}^1 = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}^1_{t\,|t=0} \tag{1.10}$$

est l'opérateur

$$\mathbf{L}^1(a+bx) = -bx,$$

ce qui s'écrit encore, en plongeant $\{-1,+1\}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{L}^1 f(x) = \frac{1-x}{4}(f(x+2)-f(x)) + \frac{1+x}{4}(f(x-2)-f(x)). \tag{1.11}$$

Ces opérateurs $\mathbf{P}^1_t$ et $\mathbf{L}^1$ opérant sur l'espace des fonctions numériques définies sur E_1 (espace vectoriel de dimension 2), les relations (1.9) et (1.10) donnent immédiatement la relation

$$\mathbf{P}^1_t = \exp(t\mathbf{L}^1), \tag{1.12}$$

l'exponentielle étant ici l'exponentielle usuelle des opérateurs linéaires bornés.

Considérons alors l'espace produit E_1^n, que nous munissons de la mesure produit $dx = \otimes_{i=1}^n dx_i$. Sur cet espace, nous avons le semigroupe produit $\mathbf{P}^{(n)}_t = (\mathbf{P}^1_t)^{\otimes n}$: il est défini, pour une fonction f définie sur E_1^n, par

$$\mathbf{P}^{(n)}_t(f)(x) = \int_{E_1^n} f(y)\prod_{i=1}^n(1+e^{-t}x_iy_i)\,dy,$$

où l'on a posé $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)$. Ces opérateurs forment un semigroupe de générateur

$$\mathbf{L}^{(n)} = \sum_i I\otimes\cdots\otimes\mathbf{L}^1\otimes I\otimes\cdots\otimes I,$$

c'est à dire que

$$\mathbf{L}^{(n)}f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_i \mathbf{L}^{(1)}_i f(x_1,\ldots,x_n),$$

chaque opérateur $\mathbf{L}^{(1)}_i$ étant l'analogue de l'opérateur $\mathbf{L}^{(1)}$ agissant sur la seule variable x_i. On a bien évidemment $\mathbf{P}^{(n)}_t = \exp(t\mathbf{L}^{(n)})$.

Considérons alors la fonction $\Phi : E_1^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{n}}.$$

Son image est l'ensemble $E^n = \{-\sqrt{n}, \frac{-n+2}{\sqrt{n}}, \ldots, \sqrt{n}\}$. Sur cet ensemble fini, considérons l'opérateur linéaire, défini pour une fonction f bornée par

$$\hat{\mathbf{L}}^{(n)}(f)(x) = \frac{n}{4}\{f(x+2/\sqrt{n})+f(x-2/\sqrt{n})-2f(x)\} - \frac{x}{4}\sqrt{n}\{f(x+2/\sqrt{n})-f(x-2/\sqrt{n})\}.$$

Nous appelons $\hat{\mathbf{P}}^{(n)}_t$ l'opérateur $\exp(t\hat{\mathbf{L}}^{(n)})$. Nous avons alors le résultat suivant :