Luc Moisotte

1850 exercices de mathématiques

pour l'oral du CAPES de mathématiques et des concours des Grandes Ecoles

Dunod Université

ISBN 2-04-010293-0

INTRODUCTION

Le CAPES de Mathématiques est un concours devenu difficile qu'il s'agit de préparer maintenant de la même manière que tout autre grand concours. Aussi nous a-t-il semblé opportun de présenter sous forme systématique un très large échantillon d'exercices posés à l'oral ces dernières années (très exactement entre 1973 et 1977) afin de constituer par là un lot important d'archives de base utilisables par tout candidat sérieux, comme cela se fait depuis de très nombreuses années pour les autres concours, par livres ou revues spécialisées.

Le Rapport Officiel du CAPES 1977 (SEVPEN, 13, rue du Four, Paris 6^{e}) cerne d'ailleurs très précisément ce qu'il est attendu des candidats, tous au moins licenciés ès Sciences Mathématiques, et il nous a paru extrêmement instructif d'en donner ici les extraits les plus significatifs à cet égard :

> « La diminution rapide, au cours des dernières années, du nombre des places mises au concours (1 400 en 1974, 1 260 en 1975, 1 000 en 1976, 780 en 1977, 574 en 1978), le nombre de candidats restant presque constant, a transformé le CAPES de Mathématiques en une sélection de plus en plus sévère : des épreuves orales très largement supérieures à la moyenne sont désormais nécessaires pour être reçus... *Il s'ensuit qu'un entraînement systématique à la recherche des exercices est donc indispensable pour réussir la deuxième épreuve.*
>
> Le jugement du Jury, lors des épreuves orales, s'appuie essentiellement sur les deux critères suivants : connaissances et culture mathématique du candidat, et comportement face à un public. C'est pourquoi il semble possible de donner aux candidats à venir les conseils suivants...
>
> *Exercice* — Le candidat doit trouver, en vingt-cinq minutes environ, un ou plusieurs exercices dont la résolution ne dépasse pas la compétence d'un bon bachelier. Le Jury aide ou n'aide pas le candidat, cela dépend de la difficulté de l'exercice, du caractère déroutant de l'énoncé, des réactions du candidat (en cas de « blocage » de celui-ci, par exemple).
>
> Un futur professeur doit être capable de résoudre seul les exercices qui seront posés à ses élèves. Cela suppose une bonne connaissance des mathématiques classiques du second degré, un certain nombre de « tours de main », du dynamisme et de l'imagination.
>
> Les conseils donnés ci-dessus pour l'énoncé restent valables. Voici d'autres éléments positifs d'appréciation :
>
> – candidat actif, qui essaie de sa propre initiative diverses voies, même si celles-ci se révèlent trop longues ou infructueuses ;
> – candidat n'hésitant pas à faire des dessins, de manière à se servir le plus efficacement de son intuition. Dans le même ordre d'idées, un candidat qui teste l'énoncé par des exemples simples convenablement choisis est très apprécié ;
> – capacité à voir et à citer correctement les théorèmes nécessaires ;
> – connaissance des méthodes et « astuces » courantes.
>
> Au contraire, que peut penser le Jury d'un candidat muet ou se laissant passivement guider ? »

Il est bien clair que beaucoup de questions ici rassemblées feraient bonne figure à l'oral de nombre de Grandes Ecoles, et sont donc *réellement* du niveau de la classe de Mathématiques Spéciales (ou DEUG de nos Universités). Pour être plus clair et plus concret, donnons un exemple de ce qui peut se passer pratiquement à l'oral avec un bon candidat. Considérons un certain exercice classique sur les séries, par exemple celui où l'on prouve que : $\Sigma 1/n^2 = \pi^2/6$. Au CAPES, il est inenvisageable de poser telle quelle cette question. Mais on pourra commencer par demander de prouver l'inégalité : $u_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2 \leqslant 2$. Si le candidat franchit victorieusement ce premier pas, on lui demandera très certainement de prouver l'existence d'une limite ξ pour la suite (u_n), ce qui devrait se passer sans trop d'encombres. Après cela, si tout a été expédié en cinq minutes, tout devient permis... *dans le cadre du programme de Terminales C* ! Par exemple, d'un coup d'intégration par parties astucieux, laissé à la sagacité du candidat, pourquoi ne pas envisager l'intégrale $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt$? De là découlera la formule explicite de l'exercice 14.23.10 de la page 125 de ce livre ; et alors, s'il restait quelques-unes des précieuses vingt-cinq minutes imparties au candidat vraiment valeureux qui en serait arrivé là, il va de soi qu'on demandera de prouver que $\xi = \pi^2/6$, ce qui découle d'une simple majoration du reste sous forme intégrale... Et voilà !

L'exemple précédent, s'il est un peu tendancieux, est là pour montrer comment le désossement d'un exercice très classique de nos «taupes» peut devenir, à la rigueur, un exercice de Terminales C. L'exemple est donné d'ailleurs depuis quelques années par plusieurs problèmes de Baccalauréat ! A l'opposé, des exercices extraordinairement faciles, recueillis dans ce livre, ont été donnés sans suite à des candidats faibles, faute d'initiatives.

Soyons sérieux, il ne fait pas l'ombre d'un doute que, pour franchir le cap de l'oral du CAPES, il faut avoir assimilé plus que le programme de Terminales, et ce n'est sûrement pas critiquable si l'on songe que les lauréats du concours, *dont la majorité n'a passé aucune épreuve écrite* (les candidats IPES), trouvent là la seule épreuve les jugeant sur pièce devant un exercice, ce qui sera un an plus tard leur pain quotidien de Professeur de Mathématiques.

La situation ainsi instaurée ne doit pas pour autant entamer le moral des candidats, car il faut avoir aussi constamment présent à l'esprit que beaucoup des exercices recueillis ici ne furent *jamais* entièrement résolus au concours pendant les vingt à vingt-cinq minutes que dure normalement l'épreuve. Le Jury, de trois personnes, est là pour juger non pas seulement des connaissances, *condition nécessaire*, mais aussi et surtout la valeur de réflexion du candidat et ses réactions devant la nouveauté et l'imprévisible, choses devant lesquelles il sera constamment confronté au cours de sa future carrière.

Depuis que les concours existent en France, des milliers de personne subissent chaque année l'épreuve d'Exercice de Mathématiques sans traumatisme excessif et fournissent par là un lot d'élèves de très grande valeur à nos Grandes Ecoles, et il en sera probablement désormais ainsi pour le CAPES. Ceci admis, tout étudiant travailleur pourra affronter l'épreuve d'Exercice, avec calme et sécurité, s'il en connaît d'avance un très vaste panorama, ce à quoi le présent petit livre l'aidera très efficacement, nous le pensons.

L.M., Janvier 1978.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Ensembles et logique

1. LES OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES

1 On désigne par $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Est-il vrai ou faux que $\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$ pour deux parties quelconques A et B d'un ensemble E ? Même question pour $\mathfrak{P}(A \cup B) = \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B)$.

2 Tracez rapidement la courbe (C) d'équation $y = x^3$, et étudiez l'application de (C) dans (C) qui, à un point M associe le point M' d'intersection de la tangente en M à (C) avec (C).

3 Soit f une application de X dans Y, et A et B des parties de X, et C et D des parties de Y. (1) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, l'égalité ayant lieu pour tout couple (A,B) ssi f est injective. (3) Prouver aussi que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$.

4 Dans l'ensemble des personnes vivantes, chaque personne a serré la main d'un certain nombre d'autres personnes. Montrer que le nombre de personnes qui ont serré la main d'un nombre impair de personnes est un nombre pair.

5 Pour A et $B \subset X$, on pose $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Démontrer les propriétés suivantes : (1) $A \triangle \emptyset = A$. (2) $A \triangle B = B \triangle A$. (3) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$. (4) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. (5) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$. (6) $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$.

6 Supposant démontré que la différence symétrique $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ est une opération *associative*, montrer que $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_n$ est l'ensemble des éléments appartenant à un nombre *impair* de A_i.

7 Soit F l'ensemble des *parties finies* d'un ensemble E. On note $|A|$ le *nombre d'éléments* de toute partie $A \in F$, et $A \triangle B$ la différence symétrique. Montrer que l'on définit une *distance* sur F par $\mathrm{d}(A,B) = |A \triangle B|$.

8 Soit (u_n) une suite réelle, $n \geqslant 0$. Appelons $(u_n^{(1)})$ une suite *extraite* de (u_n), en ce sens qu'il existe une application φ_1 *strictement croissante* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $u_n^{(1)} = u_{\varphi(n)}$. On appelle $(u_n^{(2)})$ une suite aussi extraite de $(u_n^{(1)})$, puis $(u_n^{(3)})$ une suite extraite de $(u_n^{(2)})$, etc. Montrer que la suite $(u_0, u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(3)}, \ldots)$ est extraite de u_n.

2. LES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

1 Montrer que l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, définie par:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y,$$

est une bijection. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, déterminer le couple (x,y) dont il est l'image par f.

2 Montrer que l'ensemble des parties à k éléments de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

3 Montrer que l'ensemble des *parties finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

4 On se propose de numéroter explicitement les éléments de $\mathbb{N}^3$. Pour cela, le triplet (000) reçoit le numéro 0. Les triplets (001), (010), (100) reçoivent les numéros 1, 2, 3. Les triplets (002), (011), (020), (101), (110), (200) reçoivent les numéros 4, 5, 6, 7, 8, 9. Plus généralement, les triplets (xyz), tels que $x+y+z=n$, seront numérotés dans l'ordre lexicographique, clairement décrit par les exemples précédents. Déterminer le numéro $f(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, quel est alors l'unique triplet (x,y,z) dont il est l'image ?

5 Démontrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites à valeurs entières non négatives, n'est pas dénombrable.

6 Soit A_n l'ensemble des réels qui sont racines d'une équation algébrique de degré n, à coefficients entiers ($\in \mathbb{Z}$). (1) Montrer que A_1 est dénombrable. (2) Même question pour A_2. (3) Même question pour A_n. (4) En déduire que l'ensemble $\cup A_n$ des nombres algébriques est dénombrable.

7 Une partie de $\mathbb{R}$ ayant un nombre fini de points d'accumulation est dénombrable.

3. RELATIONS

1 Soit P l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$. Montrer que la relation R définie par $z'Rz$ s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}$$

est une relation d'équivalence sur P dont on reconnaîtra la nature géométrique des classes.

2 Soit E un ensemble non vide. Montrer que, pour qu'une relation R d'ordre soit totale, il faut et il suffit qu'elle soit maximale (au sens de l'inclusion de R dans $E \times E$).

3 Etudier, dans $\mathbb{R}$, la relation S définie par $uSv \Leftrightarrow P(u) = P(v)$, où $P(\cos\theta) = \cos(7\theta)$.

4 Soit A un anneau commutatif et D la partie de A constituée des x tels que $x^2 = x$. Montrer que la relation définie dans D par $x \leqslant y$ ssi $xy = x$ est une relation d'ordre. On aura un treillis en posant $x \wedge y = x + y - xy$ et $x \vee y = xy$.

5 Sur l'ensemble des fonctions de la variable réelle, on pose fRg s'il existe une bijection h telle que $h \circ f = g \circ h$. (1) Montrer que R est une relation d'équivalence. (2) Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont-elles équivalentes ? (3) Condition sur a et b pour que x^2 et $x^2 + ax + b$ soient équivalentes.

6 Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de parties de E. On définit la relation binaire R dans E par : xRy si $\forall A \in \mathcal{S}, \{x,y\} \subset A$ ou $\{x,y\} \subset \complement A$. Montrer que R est une relation d'équivalence dont on décrira les classes.

7 Soit E un ensemble non vide, et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E, tel que :

(1) $(X \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{A}) \Rightarrow (X \cup Y \in \mathcal{A})$

(2) $(Y \in \mathcal{A},\ X \subset Y) \Rightarrow (X \in \mathcal{A})$

On définit dans l'ensemble des parties de E la relation binaire R par :

$(XRY) \Leftrightarrow (X \Delta Y \in \mathcal{A})$,

où Δ désigne la différence symétrique. Montrer que R est une relation d'équivalence.

8 Soit e_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Montrer que $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 5,\ e_4 = 15,\ e_5 = 52$.

9 Soit d_n le nombre de relations d'ordre sur un ensemble à n éléments. Montrer que $d_1 = 1,\ d_2 = 3,\ d_3 = 19,\ d_4 = 219$.

10 Dans l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la relation S par fSg s'il existe $h \in E$ telle que $g = f \circ h$. Etudiez les diverses qualités de S. Comparez-la à la relation T telle que fTg s'il existe h telle que $g = h \circ f$.

4. LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1 Montrer que $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

2 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3 Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\,.\,k\,! = (n+1)! - 1$.

4 Montrer que $\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \ldots + (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4} = (-1)^n \frac{n+1}{4(n+1)^2+1}$

5 Montrer que $1^6 - 2^6 + 3^6 - \ldots + (-1)^{n-1} n^6 = \frac{(-1)^{n-1}}{2} (n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n)$.

6 Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tous $\geqslant 0$. Posant $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, montrer que :

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}\,.$$

Cas d'égalité ?

7 La somme $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, n et k entiers $\geqslant 1$, k *impair*, est divisible par $n(n+1)/2$.

8 On désigne par $|X|$ le nombre d'éléments de tout ensemble fini X. Alors, pour tout système de parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on a :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

9 Soit (F_n) la suite de Fibonacci, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geqslant 0$. Alors $F_n < (7/4)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

10 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

est le quotient d'un nombre *impair* par un nombre *pair* (donc ne saurait être entier).

11 Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même, telle que, pour tout n, on ait $\sum_{d/n} f(d) = n$, le symbole d/n signifiant « d divise n ». Montrer que f est l'indicatrice d'Euler.

5. LOGIQUE

1 Ecrivez une phrase claire signifiant la négation de la phrase : « presque tous les enfants aiment les chansons ».

2 Montrez que la formule suivante du calcul propositionnel est une tautologie :

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)).$$

3 Pour quelles valeurs (0 ou 1) des variables propositionnelles $p, q, r,$ la formule suivante est-elle vraie :

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow s) \leftarrow ((p \vee q) \wedge (q \vee r)).$$

4 Mettez la formule $(p \wedge q) \vee (\neg r)$ sous la forme normale disjonctive.

5 Vis-à-vis des variables propositionnelles $p_1, p_2, \dots, p_n,$ mettez la formule $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)$ sous la forme normale disjonctive.

6 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les propositions $p_1 : |x + y| \leqslant 1, p_2 : |x - y| \leqslant 1, p_3 : |x| \leqslant 1.$ Quelle est la partie de $\mathbb{R}^2$ (que l'on dessinera) pour laquelle la proposition $p_1 \wedge \neg p_2 \leftrightarrow p_3$ est vraie ?

7 Montrer en quoi le proverbe : « toutes les règles ont des exceptions » se contredit lui-même.

8 Un coffre-fort est muni de *n* serrures différentes et ne s'ouvre que si ces *n* serrures sont ouvertes à la fois. On considère cinq personnes *A, B, C, D, E.* On demande de choisir *n* le plus petit possible et de distribuer des clés à ces cinq personnes afin que le coffre-fort ne puisse être ouvert que par *A* et *B* ensemble, ou bien par *A, C, D* ensemble, ou bien par *B, D, E* ensemble.

9 Parmi douze pièces de monnaie identiques d'aspect, on sait que l'une d'entre elles est contrefaite, et a donc un poids différent. Montrer qu'on peut la déceler au moyen de *trois* pesées avec une balance de Roberwal, par simple comparaison de poids de certains sous-ensembles de ces douze pièces.

CHAPITRE 2

Combinatoire

1. DÉNOMBREMENTS DIVERS

1 Donner plusieurs démonstrations du fait qu'un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

2 Quel est le nombre de parties à 2 éléments non consécutifs de $E = \{1, 2, \ldots, n\}$? Généraliser aux parties à k éléments dont deux quelconques ne sont pas consécutifs.

3 De combien de manières peut-on vider un tonneau de n litres avec un pot de un litre et un autre de deux litres ?

4 Montrez, de diverses manières, que le nombre de solutions en entiers $x_i \geqslant 0$ de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

est égal à $\binom{n+k-1}{k}$ (combinaisons avec répétitions).

5 Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de *couples* (A,B) de parties de E dont l'intersection est vide.

6 Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de *couples* (A,B) de parties de E telles que $A \subset B \subset E$. Généraliser à k parties $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset E$.

7 Soit E un espace vectoriel de dimension d sur K, avec $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, p premier. (1) Quel est le nombre de familles libres à k éléments ? (2) Quel est le nombre de bases ? (3) Quel est le nombre de droites vectorielles ? (4) Quel est le nombre de sous-espaces ?

8 Combien y a-t-il de relations de préordre possibles sur un ensemble à 4 éléments ?

9 Démontrer que le nombre $S(n,k)$ de relations d'équivalence à k classes sur un ensemble à n éléments vaut :

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n .$$

2. DÉNOMBREMENTS D'APPLICATIONS PARTICULIÈRES

1 Montrer que le nombre des applications strictement croissantes de $E = \{1,2,\dots,m\}$ dans $F = \{1,2,\dots,n\}$ vaut $\binom{n}{m}$. Résoudre une question analogue pour les applications de E dans F qui sont croissantes au sens large.

2 Montrer que, sur un ensemble fini à n éléments, il y a $(n-1)!$ permutations circulaires.

3 Montrer que les mots de longueur n, formés des deux lettres a et b et dans lesquels deux lettres a ne se suivent pas, sont en nombre :

$$u_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant (n+1)/2} \binom{n+1-j}{j}.$$

Montrer alors, avec la formule et par énumération, qu'il y a 144 tels mots de longueur 10.

4 Calculer le nombre d'applications f de $E = \{1,2,3,\dots,n\}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{k=1}^{n} f(k) = q$.

5 Soit p_n le nombre des applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{k \geqslant 0} kf(k) = n$. Montrer que p_n est une suite croissante convexe, tendant vers l'infini.

6 Montrer que le nombre total d'arrangements d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\dots(n-k+1)$$

est égal à l'entier le plus proche de $e.n\,!$

7 On considère la suite (a_n) d'entiers ainsi définie :

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}).$$

Montrer que a_n est le nombre de permutations sans points fixes (dérangements) d'un ensemble fini à n éléments.

8 Le nombre de permutations de N, $|N| = n$, se décomposant en k cycles, vaut le coefficient de x^k dans le polynôme $x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$.

3. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

1 Montrer qu'il existe une infinité de couples (n,k) pour lesquels :

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2}\left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}\right\}.$$