

Topologie algébrique et théorie des faisceaux

ROGER GODEMENT

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

XIII

ROGER GODEMENT

Topologie algébrique et théorie des faisceaux



HERMANN

6, RUE DE LA SORBONNE, PARIS V

© 1958 HERMANN, PARIS

PRÉFACE

De toutes les idées qui circulent dans les milieux mathématiques actuels, celle de publier un ouvrage de référence consacré à la théorie des faisceaux est assurément l'une des moins originales : la plupart des spécialistes de cette théorie en ont eu l'intention à un moment ou à un autre, et l'on connaît plusieurs publications — en général ronçotypées comme s'il s'agissait de tracts subversifs — qui traitent de cette question, les plus célèbres à juste titre étant celles que l'on doit à Henri Cartan. Mais on chercherait en vain un exposé complet, donnant toutes les démonstrations de tous les théorèmes, et les donnant en entier. Alors que la technique des faisceaux envahit les branches les plus diverses des Mathématiques, une pareille situation ne pouvait être tolérée plus longtemps par les techniciens : c'est pourquoi un spécialiste de l'analyse fonctionnelle présente aujourd'hui un exposé complet, i. e. moins incomplet que les autres, de la théorie des faisceaux — with a vengeance.

Il est évident qu'un tel livre serait parfaitement inutile s'il ne s'adressait qu'aux spécialistes de la théorie des faisceaux, ou même, en raison des applications extra-topologiques de cette théorie, s'il supposait le lecteur parfaitement informé des techniques classiques de la topologie algébrique. Nous avons donc cherché à écrire un ouvrage qui ne suppose *aucune* connaissance de la topologie algébrique, et par conséquent avons fait précéder l'exposé de la théorie des faisceaux proprement dite d'un chapitre d'algèbre homologique qui, nous l'espérons, sera utile à certaines catégories de lecteurs. Outre les considérations habituelles sur les suites exactes, les foncteurs, les complexes, etc..., ce chapitre premier traite essentiellement de trois questions importantes : la théorie des suites spectrales (§ 4), celle des foncteurs Ext et Tor (§ 5), et celle des complexes simpliciaux (§ 3). Notre exposé est évidemment beaucoup plus court et beaucoup moins complet que celui qu'on trouvera dans le livre récent de H. Cartan et S. Eilenberg, en ce qui concerne les suites spectrales et les Ext et Tor. Quant aux « complexes simpliciaux », il s'agit

des complexes de chaînes (ou de cochaînes) dans lesquels on a des « opérateurs de face » permettant d'effectuer formellement les calculs simpliciaux classiques; situation que l'on rencontre non seulement dans la théorie classique des polyèdres, mais aussi en homologie singulière, en cohomologie de Čech, et en théorie des faisceaux. Comme de plus les travaux récents de Kan semblent prouver que ces complexes constituent le domaine naturel de validité d'une théorie complète de l'homotopie, on peut affirmer que la notion générale de complexe simplicial (due essentiellement à Eilenberg et Zilber) est appelée à jouer un rôle essentiel en topologie algébrique. On trouvera en particulier dans ce paragraphe 3 un exposé à peu près complet de la théorie des produits (produit cartésien et cup-produit), exposé dont la seule originalité est sans doute d'être imprimé. Nous n'avons pas cru devoir insérer dans ce paragraphe un exposé des opérations de Steenrod; on le trouvera dans le second volume de cet ouvrage, lorsque nous aurons à notre disposition les techniques nécessaires (cohomologie des groupes, espaces à groupes d'opérateurs, homologie singulière, ...).

La théorie des faisceaux proprement dite occupe la seconde moitié de ce livre. A l'intention des lecteurs qui sont au courant des exposés publiés antérieurement nous allons donner quelques indications sur les méthodes que nous employons, attendu que celles-ci diffèrent assez sensiblement des méthodes déjà connues, et vont du reste en général plus loin que celles-ci.

Après deux paragraphes de généralités sur les faisceaux d'ensembles et les faisceaux de modules, nous abordons au paragraphe 3 le problème central de la théorie des faisceaux : celui du « prolongement » ou du « relèvement » des sections d'un faisceau. La notion essentielle de ce point de vue, à cause de sa simplicité et de son utilité, semble être celle de faisceau *flasque* : un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est flasque si toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert de X peut se prolonger à X tout entier. Tout faisceau $\mathcal{F}$ peut se plonger dans un faisceau flasque (par exemple, le faisceau des germes de sections non nécessairement continues de $\mathcal{F}$); de plus, si l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{F}^1 \rightarrow \dots$$

de faisceaux flasques de groupes abéliens, alors les sections de ces faisceaux au-dessus d'un ouvert quelconque forment encore une suite exacte. Dans les espaces paracompacts, il est important d'avoir aussi la notion plus faible de faisceau *mou* : un faisceau $\mathcal{F}$ est mou si toute section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ensemble fermé se prolonge à l'espace ambiant. Cette notion semble devoir se substituer avantageusement à celle de faisceau *fin*, qui jouait un rôle essentiel dans la théorie antérieure, comme on le constatera expérimentalement. Sur un espace paracompact, si l'on a une suite exacte de faisceaux mous de groupes abéliens, les sections de ces faisceaux au-dessus d'un fermé quelconque forment encore une suite exacte.

Le paragraphe 4 définit, pour tout espace X , même non séparé, et tout faisceau $\mathcal{A}$ de groupes abéliens sur X , les groupes $H^n(X; \mathcal{A})$ et démontre leurs propriétés essentielles : on a tout d'abord

$$H^0(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}),$$

groupe des sections globales de $\mathcal{A}$; à toute suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$$

est associée une suite exacte de cohomologie

$$\dots H^n(X; \mathcal{A}') \rightarrow H^n(X; \mathcal{A}) \rightarrow H^n(X; \mathcal{A}'') \rightarrow H^{n+1}(X; \mathcal{A}') \dots;$$

enfin, on a

$$H^n(X; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

si $\mathcal{A}$ est flasque (ou bien, lorsque X est paracompact, si $\mathcal{A}$ est mou). La possibilité de définir, *sans aucune hypothèse sur X* , des groupes de cohomologie possédant ces propriétés, a été démontrée tout d'abord par A. Grothendieck en 1955, en utilisant le fait que tout faisceau se plonge dans un faisceau *injectif*, au sens de l'algèbre homologique. Comme les recherches de Grothendieck sur ce sujet seront publiées prochainement, nous avons préféré utiliser, au lieu des faisceaux injectifs, les faisceaux flasques [qui évidemment sont spécialement adaptés à l'étude du foncteur $\mathcal{A} \rightarrow \Gamma(\mathcal{A})$]; il se trouve que l'on peut construire, de façon canonique, une *résolution flasque*

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

de tout faisceau $\mathcal{A}$, qui de plus est un foncteur « exact » par rapport à $\mathcal{A}$; posant

$$C^*(X; \mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})), \quad H^*(X; \mathcal{A}) = H^*(C^*(X; \mathcal{A})),$$

on obtient alors, de façon tout à fait élémentaire, les trois propriétés fondamentales des groupes de cohomologie.

Le § 4 contient aussi la démonstration, basée sur l'emploi des suites spectrales, des célèbres « théorèmes fondamentaux »; en particulier, toute résolution

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}^0 \rightarrow \mathcal{Q}^1 \rightarrow \dots$$

d'un faisceau $\mathcal{A}$ donne lieu à des homomorphismes canoniques

$$H^*(\Gamma(\mathcal{Q}^*)) \rightarrow H^*(X; \mathcal{A}),$$

lesquels sont bijectifs si les $\mathcal{Q}^p$ sont flasques (ou mous, lorsque X est paracompact), ce qui montre bien entendu qu'il était en principe inutile, pour définir les groupes $H^*(X; \mathcal{A})$, de choisir une résolution flasque « canonique » de $\mathcal{A}$. Enfin, nous exposons en détail la suite exacte de cohomologie associée à

un sous-espace fermé, et diverses questions accessoires (relations entre la cohomologie d'un ensemble et celle de ses voisinages, cohomologie à valeurs dans une limite inductive de faisceaux, suite spectrale des espaces fibrés, dimension cohomologique).

Le § 5 étudie les relations entre les groupes $H^*(X; \mathcal{A})$ et les groupes $\check{H}^*(X; \mathcal{A})$ obtenus par la méthode de Čech (laquelle, on le sait, ne donne pas de résultat satisfaisant en dehors des espaces paracompacts, ou bien de catégories spéciales de faisceaux). Nous montrons d'abord que tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X qui est soit ouvert, soit fermé et localement fini, définit une *résolution* $c^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ de tout faisceau $\mathcal{A}$ sur X ; il en résulte des homomorphismes canoniques $H^*(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \rightarrow H^*(X; \mathcal{A})$ qui proviennent du reste d'une suite spectrale. A la limite, on trouve une suite spectrale reliant la cohomologie de Čech à la « bonne » cohomologie. On déduit de là qu'il y a isomorphisme

$$\check{H}^*(X; \mathcal{A}) = H^*(X; \mathcal{A})$$

pour tout faisceau si X est paracompact; et, si X n'est pas paracompact, il en est encore ainsi pour un faisceau donné s'il existe dans X « suffisamment » d'ensembles ouverts tels que, pour toute intersection finie U de tels ouverts, on ait

$$\check{H}^n(U; \mathcal{A}) = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

Ce dernier résultat, dû à H. Cartan, permet de montrer que, pour les faisceaux algébriques cohérents étudiés par Serre, la cohomologie de Čech coïncide avec la « bonne » cohomologie. Nous avons pu d'autre part démontrer, sans hypothèse sur l'espace X , le résultat célèbre de Leray suivant lequel, étant donné un recouvrement $\mathfrak{M} = (M_i)$ de X tel que l'on ait toujours

$$H^n(M_{i_0} \cap \dots \cap M_{i_p}; \mathcal{A}) = 0 \text{ pour } n \geq 1,$$

les homomorphismes

$$H^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}) \rightarrow H^*(X; \mathcal{A})$$

sont bijectifs pourvu que $\mathfrak{M}$ soit ouvert, ou bien fermé et localement fini. Nous n'avons malheureusement pas pu trouver une démonstration qui s'applique simultanément à ces deux cas : dans le cas ouvert, il faut étudier le double complexe $C^*(\mathfrak{M}; c^*(X; \mathcal{A}))$, et dans le cas fermé le double complexe $C^*(X; c^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A}))$, où $c^*(\mathfrak{M}; \mathcal{A})$ désigne la résolution de $\mathcal{A}$ définie par $\mathfrak{M}$.

Le § 6 étend à la théorie des faisceaux les notions de produit cartésien et de cup-produit. Étant donnés des faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur des espaces X et Y , on constate trivialement que le produit tensoriel des résolutions canoniques de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une résolution du produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (la notation $\otimes$ indiquant que le résultat est un faisceau de base $X \times Y$); d'où, sans aucune hypothèse sur X et Y , des applications

$$H^*(X; \mathcal{A}) \times H^*(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

qui possèdent toutes les propriétés qu'on est en droit d'attendre d'un produit cartésien en cohomologie. Lorsque $X = Y$, on trouve par des raisonnements similaires, ou bien en utilisant le produit cartésien et l'application diagonale, les cup-produits

$$H^p(X; \mathcal{A}) \times H^q(X; \mathcal{B}) \rightarrow H^{p+q}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Indiquons par ailleurs une circonstance importante; il existe, pour tout faisceau $\mathcal{A}$ sur un espace X , une résolution flasque

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}^0(X; \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}^1(X; \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

qui est un foncteur exact en $\mathcal{A}$, et dont la différentielle résulte d'une structure semi-simpliciale (i. e. d'opérateurs de « face » et de « dégénérescence » analogues formellement à ceux de la théorie des complexes semi-simpliciaux d'Eilenberg-MacLane-Zilber). Si l'on utilise cette résolution pour définir les groupes de cohomologie, on constate que les formules « explicites » qui donnent le cup-produit dans la théorie simpliciale classique, disons la formule

$$f \cup g(x_0, \dots, x_{p+q}) = f(x_0, \dots, x_p) \otimes g(x_p, \dots, x_{p+q}),$$

le donnent aussi en théorie des faisceaux ⁽¹⁾. Cette remarque n'a pas seulement l'intérêt, après tout purement pédagogique, de montrer que la théorie multiplicative des faisceaux n'est qu'un cas particulier de la théorie générale concernant les complexes « simpliciaux »; elle montre que toute notion reposant exclusivement sur l'existence d'une structure simpliciale s'étend automatiquement à la théorie des faisceaux; en particulier, il est clair dès maintenant que les opérations de Steenrod peuvent se définir en théorie des faisceaux puisqu'elles supposent, tout au plus, une structure simpliciale et une application diagonale. Cette question, comme nous l'avons dit plus haut, sera exposée en détail dans le second tome de cet ouvrage.

Enfin, le § 7 contient des indications sommaires sur les faisceaux injectifs, les foncteurs dérivés, et la suite spectrale des Ext qui est indispensable en géométrie algébrique ⁽²⁾.

Les quelques indications qui précèdent montreront sans doute aux lecteurs informés que notre exposé diffère sensiblement de ceux de Leray et Cartan, bien que, de toute évidence, les idées essentielles qui le gouvernent soient dues à ces auteurs. Il semble raisonnable de penser que la théorie des faisceaux est maintenant dans un état pratiquement final, attendu que d'une part elle a

⁽¹⁾ Il en est bien entendu de même en cohomologie de Čech; malheureusement, la méthode de Čech n'est satisfaisante que sur les espaces paracompacts.

⁽²⁾ On trouvera des résultats beaucoup plus complets (notamment pour les faisceaux « cohérents » de modules) dans un article de Grothendieck (*Sur quelques points d'Algèbre Homologique*, à paraître au *Tohoku Math. Journal*).

atteint le degré de généralité maximum que l'on puisse concevoir, et que d'autre part ses méthodes sont, à beaucoup d'égards, considérablement plus simples que celles des auteurs anciens; cela ne saurait cependant nous faire oublier le rôle qu'ont joué ceux-ci: il est clair que notre exposé ne comporte, la plupart du temps, que des améliorations de détail par rapport à ceux de Leray et Cartan ⁽¹⁾. Le progrès le plus important est probablement d'avoir pu construire une théorie raisonnable valable pour *tout* espace topologique; comme nous l'avons dit, on doit ce résultat à Grothendieck; mais il semble juste d'ajouter que, probablement, la question ne se serait pas même posée sans les travaux de Serre sur les variétés algébriques.

Pour parvenir à un exposé relativement complet de la *théorie des faisceaux*, il nous resterait à traiter encore quelques questions importantes: *rapports* entre la théorie des faisceaux et l'homologie singulière, dualité des variétés, espaces fibrés et faisceaux à groupes d'opérateurs, opérations cohomologiques, etc... Il est clair que nous n'aurions pu inclure ces matières dans le présent volume sans en retarder considérablement la publication; elles constitueront donc le second tome de cet ouvrage, où l'on apprendra, par exemple, comment calculer les groupes d'homologie d'une sphère (problème que les résultats contenus dans ce premier volume ne suffisent malheureusement pas à résoudre...).

Il est bien évident que ce livre n'aurait jamais vu le jour sans l'aide précieuse, et les encouragements enthousiastes (quoique partiellement intéressés), que nous ont prodigué certains géomètres, et tout spécialement N. Bourbaki, H. Cartan, P. Cartier, A. Grothendieck et J. P. Serre. D'autre part, une première rédaction de cet ouvrage a été écrite pendant l'année scolaire 1954-55, alors que l'auteur occupait, à la University of Illinois, la « G. A. Miller Visiting Professorship » et se trouvait, de ce fait, dans des conditions particulièrement favorables. Enfin, l'impression de ce livre a été rendue possible grâce à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg. A tous ceux, proches ou lointains, qui l'ont aidé, l'auteur est heureux de présenter ses remerciements les plus chaleureux.

(¹) Sans entrer dans une discussion historique du sujet, il est indispensable de rappeler qu'un certain nombre d'idées de base de la théorie des faisceaux et des suites spectrales furent introduites par J. Leray en 1945 et dans les années suivantes. La notion générale de suite spectrale fut ensuite dégagée par J. L. Koszul. Le premier exposé cohérent de la théorie des faisceaux, basé sur la notion de « résolution », est dû à H. Cartan. Il semble enfin que, à côté des travaux évidemment fondamentaux de J. Leray, une démonstration du théorème de Rham par A. Weil, datant de 1947, ait joué un rôle important dans l'évolution de la situation.

LEITFADEN

A l'intention des lecteurs qui ne sont pas encore familiarisés avec les questions traitées dans cet ouvrage, il peut être utile de donner quelques indications sur la façon de lire celui-ci.

Il est indispensable de lire les §§ 1 et 2 du chapitre I, et les §§ 1 et 2 du chapitre II. On peut alors lire le n° 3.1 du chapitre II (faisceaux flasques) puis les n°s 4.1 à 4.4 de façon à connaître la définition et les principales propriétés des groupes de cohomologie à valeurs dans un faisceau. Il est alors indispensable de lire le § 4 du chapitre I (suites spectrales) ainsi que ce qui concerne les faisceaux mous au chapitre II, § 3; on peut ensuite terminer la lecture du § 4 du chapitre II (l'essentiel étant les n°s 4.5 à 4.10).

Avant d'aborder la cohomologie de Čech, il est utile de lire le début du § 3 du chapitre I, spécialement les n°s 3.1 à 3.5; on peut alors, dans une première lecture du § 5 du chapitre II, se borner aux n°s 5.1, 5.3, 5.4, 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10, en négligeant ce qui concerne les familles de supports.

En ce qui concerne les produits en cohomologie, il est pratiquement indispensable d'étudier simultanément la fin du § 3 du chapitre I (n°s 3.6 à 3.12) et le § 6 du chapitre II étant donné que ces deux §§ sont étroitement liés.

De même, il est utile de lire simultanément le § 5 du chapitre I et le § 7 du chapitre II, en essayant, à titre d'exercice, de se placer dans une catégorie abélienne quelconque (mais possédant suffisamment d'objets injectifs). Il est aussi utile de construire des démonstrations purement fonctorielles des théorèmes fondamentaux du chapitre II, § 4.

Le lecteur désireux de connaître quelques applications de la théorie des faisceaux, ou d'en approfondir certains aspects, pourra consulter l'article de Serre sur les faisceaux algébriques cohérents (*Annals of Math.*, 61 (1955), pp. 197-278), un article de Grothendieck à paraître au *Tohoku Math. Journal*, et enfin les volumes du Séminaire de l'E.N.S. de H. Cartan consacrés aux fonctions de

plusieurs variables complexes. On pourra aussi consulter le volume récent de F. Hirzebruch dans la série bien connue des *Ergebnisse der Mathematik*, qui contient des applications importantes de la théorie des faisceaux à la théorie des variétés analytiques compactes.

Notons enfin qu'une référence telle que Théorème 4.9.3 indique qu'on doit se reporter au n° 4.9, donc au § 4, *du même chapitre*, sauf mention expresse du contraire (utilisation au chapitre II de résultats ou de définitions contenus dans le chapitre I).

CHAPITRE I

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

I. MODULES ET FONCTEURS

1.1. — Suites exactes de modules

Soient A un anneau avec élément unité, et L, M deux A -modules à gauche. L'ensemble des homomorphismes de L dans M est un groupe abélien, qui sera noté $\text{Hom}_A(L, M)$ ou simplement $\text{Hom}(L, M)$ si aucune confusion n'est possible.

Etant donné un homomorphisme $f: L \rightarrow M$ on définit

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(0); \quad \text{Im}(f) = f(L); \quad \text{Coker}(f) = M/f(L).$$

Ce sont des A -modules à gauche.

Une suite

$$\dots \longrightarrow L_n \xrightarrow{f_n} L_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} L_{n+2} \longrightarrow \dots$$

de A -modules et d'homomorphismes de A -modules est dite *exacte* si l'on a $\text{Im}(f_n) = \text{Ker}(f_{n+1})$ pour tout n . Par exemple, la suite

$$0 \rightarrow L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \rightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est injectif, g surjectif, et si de plus $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$; on peut alors identifier L' à un sous-module de L , et L'' au module quotient L/L' .

1.2. — Propriétés des groupes $\text{Hom}(L, M)$

Dans tout ce n° on considère des modules à gauche sur un anneau A donné.

Supposons donnés des homomorphismes

$$f: L' \rightarrow L; \quad g: M \rightarrow M';$$

on obtient alors un homomorphisme de groupes abéliens

$$\text{Hom}(f, g) : \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(L', M'),$$

à savoir celui qui transforme tout $u : L \rightarrow M$ en $g \circ u \circ f : L' \rightarrow M'$. On exprime ce fait en disant que $\text{Hom}(L, M)$ est *contravariant* en L et *covariant* en M .

Les deux propriétés fondamentales des groupes $\text{Hom}(L, M)$ sont les suivantes :

Si l'on a une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M''$$

alors pour tout L la suite correspondante

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, M') \rightarrow \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(L, M'')$$

est exacte; si l'on a une suite exacte de la forme

$$L' \rightarrow L \rightarrow L'' \rightarrow 0$$

alors pour tout M la suite correspondante

$$\text{Hom}(L', M) \leftarrow \text{Hom}(L, M) \leftarrow \text{Hom}(L'', M) \leftarrow 0$$

est exacte.

Ces propriétés sont bien entendu triviales.

1.3. — Modules projectifs

Un A -module à gauche L est dit *projectif* si, pour toute suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0,$$

la suite correspondante

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, X') \rightarrow \text{Hom}(L, X) \rightarrow \text{Hom}(L, X'') \rightarrow 0$$

est exacte. En vertu du n° précédent les A -modules projectifs sont donc caractérisés comme suit :

(PR) : Soit $p : X \rightarrow X'$ un homomorphisme surjectif; alors pour tout homomorphisme $f'' : L \rightarrow X'$ il existe un homomorphisme $f : L \rightarrow X$ tel que $f'' = p \circ f$.

Théorème 1.3.1 — Pour qu'un A -module soit projectif il faut et il suffit qu'il soit facteur direct d'un A -module libre.

Notons tout d'abord qu'un module libre est projectif, car un homomorphisme d'un module libre L est déterminé par les valeurs, du reste arbitraires, qu'il prend sur une base de L . D'autre part, il est clair qu'un facteur direct d'un module projectif est projectif; la condition de l'énoncé est donc suffisante.

Pour montrer qu'un module projectif L la vérifie, on écrit $L = F/R$ où F

est un A -module libre et R un sous-module de F ; comme L est projectif, l'application identique $L \rightarrow L$ se factorise en un homomorphisme $L \rightarrow F$ et en l'application canonique $F \rightarrow L$, d'où le résultat.

Il résulte évidemment du théorème précédent que tout A -module est un quotient d'un A -module projectif. Nous aurons par la suite (§ 5) besoin du résultat plus précis que voici :

Théorème 1.3.2 — *Étant donné un diagramme de A -modules*

$$\begin{array}{ccccccc} & & P' & & P' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & X & \rightarrow & X' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes, et dans lequel P' et P'' sont projectifs, on peut trouver un A -module projectif P et des homomorphismes $P' \rightarrow P$, $P \rightarrow P''$, $P \rightarrow X$ de telle sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P' & \rightarrow & P & \rightarrow & P'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & X & \rightarrow & X' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

soit commutatif et formé de suites exactes.

Pour cela on prend $P = P' \times P''$ (en sorte que P est bien projectif) et on définit les homomorphismes $P' \rightarrow P$ et $P \rightarrow P''$ à partir de cette décomposition de P en somme directe; on obtient ainsi un diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P' & \rightarrow & P & \rightarrow & P'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & X & \rightarrow & X' \rightarrow 0; \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

pour définir l'homomorphisme $P \rightarrow X$, on construit d'abord un homomorphisme $P' \rightarrow X$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & P' & \\ & \downarrow & \\ X & \rightarrow & X' \end{array}$$

soit commutatif — ce qui est possible puisque P' est projectif et l'homomorphisme $X \rightarrow X'$ surjectif; puis on construit un homomorphisme $P' \rightarrow X$ en

composant $P' \rightarrow X'$ et $X' \rightarrow X$; il existe alors un homomorphisme et un seul $P \rightarrow X$ qui, sur les facteurs P'' et P' de P , se réduise aux homomorphismes qu'on vient de définir; il est clair que celui-ci répond à la question.

Notons pour terminer que si l'anneau de base A est *principal*, tout A -module *projectif est libre*, et réciproquement, puisqu'alors tout sous-module d'un module libre est libre.

1. 4. — Modules injectifs

Un A -module L est *injectif* si pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$$

la suite correspondante

$$0 \leftarrow \text{Hom}(X', L) \leftarrow \text{Hom}(X, L) \leftarrow \text{Hom}(X'', L) \leftarrow 0$$

est encore exacte, autrement dit s'il vérifie la condition

(INJ) : soit $j : X' \rightarrow X$ un homomorphisme injectif; alors pour tout homomorphisme $f' : X' \rightarrow L$ il existe un homomorphisme $f : X \rightarrow L$ tel que $f' = f \circ j$

Cela signifie que tout homomorphisme dans L d'un sous-module d'un module X se prolonge en un homomorphisme de X dans L .

Théorème 1.4.1. — Pour qu'un A -module à gauche L soit injectif il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme $f : I \rightarrow L$ il existe un $x \in L$ tel que $f(\lambda) = \lambda \cdot x$ pour tout $\lambda \in I$.

La condition est nécessaire puisque f doit se prolonger en un homomorphisme $A \rightarrow L$.

Réciproquement, supposons-la vérifiée, et soient X un module, X' un sous-module de X , et f un homomorphisme $X' \rightarrow L$. En considérant les couples (Y, g) où Y est un sous-module de X contenant X' et g un homomorphisme $Y \rightarrow L$ qui prolonge f , on voit à l'aide du Théorème de Zorn que f admet un prolongement maximal (Y, g) . Si Y était distinct de X , on pourrait construire un $x \in X$ non dans Y , un idéal à gauche I de A (l'ensemble des $\lambda \in A$ tels que $\lambda \cdot x \in Y$) et un homomorphisme $h : I \rightarrow L$, à savoir $\lambda \rightarrow g(\lambda \cdot x)$; par hypothèse il existerait un élément u de L tel que la relation $\lambda x \in Y$ impliquerait $g(\lambda x) = \lambda u$; mais alors g serait prolongeable au sous-module de X engendré par Y et x , d'où une contradiction.

Si par exemple l'anneau de base A est *principal* alors L est injectif si et seulement si, pour tout $\lambda \neq 0$, l'endomorphisme $x \rightarrow \lambda x$ de L est *surjectif*.

Théorème 1.2.2. — Tout A -module est un sous-module d'un A -module injectif.

Pour le voir, considérons l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, le groupe additif $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et le $\mathbb{Z}$ -module

$$T = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$