Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Mathematisches Institut der Universität und
Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn – vol. 11

Adviser: F. Hirzebruch

1291

Colette Mœglin
Marie-France Vignéras
Jean-Loup Waldspurger

Correspondances de Howe sur un corps p-adique

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Subseries: Mathematisches Institut der Universität und
Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn – vol. 11
Adviser: F. Hirzebruch

1291

Colette Mœglin
Marie-France Vignéras
Jean-Loup Waldspurger

Correspondances de Howe sur un corps p-adique

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Auteurs

Colette Mœglin
Université Pierre et Marie Curie, L.M.F.
75252 Paris Cedex 02, France

Marie-France Vignéras
Université de Paris 7, Mathématiques, Tour 45–55 5° étage
75221 Paris Cedex 05, France

Jean-Loup Waldspurger
ENS-DMI
45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France

Mathematics Subject Classification (1980): Primary: 11F27, 11F70, 22E50; secondary: 11E08, 20G25, 22E35

ISBN 3-540-18699-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18699-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION.

Le séminaire de l'Université Paris VII sur les représentations des groupes réductifs (séminaire Rodier) était consacré en 85-86 aux représentations métaplectiques sur un corps p-adique. Les travaux sur ce sujet de divers auteurs (Howe, Kudla, Rallis...) ont été exposés. Au cours de ce séminaire un certain travail de mise en forme, de "polissage", a été effectué, tant en ce qui concerne les généralités sur les représentations métaplectiques qu'en ce qui concerne les travaux récents évoqués ci-dessus. Certains points se sont éclaircis, au moins aux yeux des auteurs, et il a semblé qu'il n'était pas inutile de mettre au net une partie du travail effectué et de la publier. Ce livre contient donc peu de travaux véritablement originaux des auteurs, et doit être conçu comme un compte-rendu de l'activité du séminaire.

Le premier chapitre contient des généralités "géométriques" sur les espaces hermitiens: classification, théorème de Witt, lagrangiens, groupes unitaires et leurs sous-groupes paraboliques. En particulier, on y introduit et classifie les paires réductives duales. Le deuxième chapitre contient des généralités sur les représentations métaplectiques (ou "de Weil") sur un corps p-adique: groupe d'Heisenberg, théorème de Stone-Von Neumann, groupes métaplectiques. On y énonce la conjecture de Howe. Le troisième chapitre se décompose en deux. Dans un premier paragraphe, on montre qu'un groupe intervenant dans une paire réductive duale irréductible est "scindé" dans le groupe métaplectique, à l'exception du cas bien connu du groupe symplectique. Le second paragraphe est un exposé de l'article de Kudla "On the local thêta correspondence", généralisé au cas d'une paire réductive duale quelconque: compatibilité de la conjecture de Howe avec l'induction parabolique, démonstration de la conjecture pour les représentations cuspidales (ce dernier point s'appuyant essentiellement sur un travail de Rallis).
Le quatrième chapitre contient quelques résultats se déduisant de l'étude

des classes de conjugaison dans les groupes unitaires: détermination des contragrédientes des représentations de certains de ces groupes, commutativité de l'algèbre de Hecke d'un groupe métaplectique, commutant d'une paire réductive duale dans la représentation métaplectique. Le cinquième chapitre expose la démonstration de la conjecture de Howe pour les paires non ramifiées. Qu'il soit bien clair que cette démonstration est due à Howe, et que c'est seulement parce que nous concevons ce livre comme un compte-rendu de séminaire que nous nous permettons de la publier. Le sixième chapitre expose les travaux de Howe sur les représentations de petit rang. On étend cette notion dans le cadre des représentations lisses, on classifie les représentations de petit rang, on établit le lien entre cette classification et la correspondance (conjecturale) de Howe.

Les chapitres 1 et 3 ont été écrits par Vignéras, les chapitres 2, 4, 5 par Waldspurger, le chapitre 6 par Mœglin. Bien que chaque auteur assume plus particulièrement la responsabilité des chapitres qu'il (elle) a écrits, il y a eu naturellement des échanges et influences réciproques entre eux trois. Il y a eu également influence des autres participants au séminaire de Paris VII, que les auteurs remercient.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1. Espaces hermitiens.

I - Généralités sur la classification des espaces hermitiens.

1. Définitions. Soit D un corps (pas nécessairement commutatif, mais de dimension finie sur son centre), muni d'une **involution** τ, i.e.d'un anti-automorphisme de carré l'application identique. On a donc

$$\tau(d+d')=\tau(d)+\tau(d')\ ,\ \tau(dd')=\tau(d')\tau(d)\ ,\ \tau(\tau(d))=d\ ,\ \text{pour } d,d' \in D.$$

On note F le corps commutatif formé par les points fixes de τ. Soit W un espace vectoriel à droite sur D , de dimension n, muni d'un produit **ε-hermitien**, i.e. d'une application sesquilinéaire $< , >$ de $W\times W$ dans D, linéaire en la seconde variable, i.e. $<wd,w'd'>=\tau(d)<w,w'>d'$, non dégénérée, telle que

$$<w',w> = \varepsilon\ \tau(<w,w'>).$$

Pour que cette définition ait un sens, ε doit appartenir au centre F' de D , et vérifier $\varepsilon\tau(\varepsilon)=1$.
Deux éléments de W sont **orthogonaux** si leur produit hermitien est nul.
Deux D-espaces ε-hermitiens sont **isométriques** (resp. semblables) s'il existe une application D-linéaire bijective de l'un sur l'autre conservant le produit hermitien (resp. à multiplication près par un élément du centre de D). Une telle application s'appelle une **isométrie** (resp. similitude).
L'ensemble des isométries de $(W,< , >)$ dans lui-même forment un groupe U appelé le **groupe unitaire** de $(W,< , >)$.
Ces définitions se généralisent au cas où D est un anneau à involution [Sc 7.1].

Remarques : Un D-module à gauche V est canoniquement un $D°$-module à droite, où $D°$ est le corps opposé à D (la multiplication est définie par $d\times d' = d'd$). L'involution permet de convertir un D-module à droite en un D-module à gauche, en posant $d\times v=v\tau(d)$ si $v\in V, d\in D$. Une application sesquilinéaire sur un D-module à gauche V à valeurs dans D est linéaire en la première variable : si $v,v'\in V$ et $d,d'\in D$, on a $<dv,d'v'>=d<v,v'>\tau(d')$. Inversement, tout D-module à gauche peut être converti en un D-module à droite.
L'ensemble $V^*=Hom(V,D)$ est muni naturellement d'une structure de D-espace à gauche donnée pas $(df)(v)=d(f(v))$ si $f\in V^*$. Nous considérons toujours V^* avec sa structure d'espace à droite définie comme ci-dessus, même si D est commutatif... et nous l'appelons le **dual** de V. Avec cette définition, le produit hermitien définit un D-isomorphisme entre W et son dual : $w\to w^*$,

$$w^*(v)=<w,v> \qquad \text{si } w,v\in W.$$

Il définit sur l'algèbre $A=End_D W$ une involution : $f\to f^*$, où

$$<f(w),w'>=<w,f^*(w')> \qquad \text{si } w,w'\in W\ ;$$

f^* est l'**adjoint** de f. Le groupe unitaire U(W) est égal à $\{u\in A,\ uu^*=id.\}$ Il est bien connu que l'application $W\to A=End_D W$ induit une bijection entre

a) les espaces hermitiens de dimension finie, à similitude près,

b) les algèbres centrales simples à involution de dimension finie, à isomorphisme près.

2. Exemples. Les espaces ε-hermitiens sont des généralisations des espaces
1) quadratiques ($D=F$, $\varepsilon=1$)
2) symplectiques ($D=F$, $\varepsilon=-1$, caractéristique différente de 2)
3) hermitiens ($D=F'$ est une extension quadratique de F , $\varepsilon=1$)
Dans le cas 1) le groupe U est le **groupe orthogonal** de W , noté aussi O(W), dans le cas 2) le groupe U est le **groupe symplectique** de W, noté encore Sp(W).

Les exemples fondamentaux :
4) les **espaces ε-hermitiens D(a) de dimension 1**. Soit $a\in D$ tel que $a=\varepsilon\tau(a)$. On note D(a) le D-espace vectoriel à droite D muni du produit ε-hermitien $<d,d'> = \tau(d)ad'$.
5) le **plan hyperbolique ε-hermitien H** égal au D-espace vectoriel à droite $D\times D$ muni du produit ε-hermitien $<(d_1,d_2),(d'_1,d'_2)> = \tau(d_1)d'_2+\varepsilon\tau(d_2)d'_1$.

6) Si V est un D-espace à droite, $W=V+V^*$ muni du produit hermitien

$$<(v,f),(v',f')>=f'(v)+\varepsilon\tau(f(v'))$$

est un espace ε-hermitien canonique associé à V généralisant 5).

3. Involutions. La classification des involutions sur une algèbre simple est bien connue. Une involution τ sur D envoie le centre F' de D sur lui-même, ce qui ouvre la voie à deux possibilités :

1) c'est l'identité sur F' , on dit alors qu'elle est **de première espèce**, alors $\varepsilon = +1$ (l'espace sera dit hermitien) ou -1 (espace antihermitien). On doit avoir $D\approx D°$. C'est un théorème [Sc. 8.4] que D admet une involution de première espèce si et seulement si $D\approx D°$.

2) F' est une extension quadratique séparable de F, τ restreint à F' est le F-automorphisme non trivial σ de F'. On dit alors que τ est **de seconde espèce.** Mais par le théorème 90 de Hilbert, si $\varepsilon\in F'$ vérifie $\varepsilon\varepsilon^\sigma=1$, il existe $\mu\in F'$ tel que $\varepsilon=\mu^\sigma/\mu$. On a

$$\mu<w,w'>=\mu\varepsilon\tau(<w',w>)=\tau(\mu<w',w>).$$

La multiplication par μ fournit une bijection entre les espaces ε-hermitiens et les espaces 1-hermitiens (dits hermitiens). On se limitera donc aux espaces hermitiens, quand l'involution est de seconde espèce.
Si D^σ est le corps conjugué de D, on doit avoir $D\approx D^{\sigma\circ}$. Inversement, si $D\approx D^{\sigma\circ}$, il existe un anti-automorphisme ι de D prolongeant σ . Comme ι^2 est un automorphisme , il existe $a\in D$, tel que $\iota^2(d)=ada^{-1}$, $d\in D$. C'est un théorème [8.8.2] que $\alpha=a\iota(a) \in F$ ne dépend que de D, et que D admet une involution prolongeant σ si et seulement si α est norme d'un élément de F'. Si D est un corps de quaternions, on peut montrer qu'une involution de seconde espèce existe sur D, si et seulement si $D = D^1\otimes_F F'$ où D^1 est un corps de quaternions sur F.

4. Involutions sur un corps fini, local, ou global.

1) Si F est fini, tout corps fini étant commutatif, on a seulement deux cas : D=F , ou D=F' est l'unique extension quadratique de F.

2) Si F' $=\mathbb{C}$, D$=\mathbb{C}$, l'involution est triviale, ou l'unique automorphisme non trivial d'ordre 2 de $\mathbb{C}$, la conjugaison complexe.

3) Si F'$=\mathbb{R}$, D$=\mathbb{R}$, ou le corps des quaternions $\mathbb{H}$ de Hamilton. Comme $\mathbb{R}$ n'admet pas d'automorphisme d'ordre 2, l'involution dans ce cas est triviale. De plus, $\mathbb{H}$ n'admet pas d'involution de seconde espèce. Le théorème de Skolem-Noether montre que la conjugaison canonique de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{R}$ est à multiplication par un automorphisme intérieur près, l'unique involution de première espèce sur $\mathbb{H}$.

4) Si F est un corps local non archimédien, par le même raisonnement, on trouve :

a) D=F

b) D=F' , une extension quadratique séparable de F

c) D=le corps de quaternions $\mathbb{H}$ sur F' (unique à isomorphisme près), involution canonique à automorphisme intérieur près, et F'=F .

Il n'y en a pas d'autre, la condition $D \approx D^1 \otimes F'$ de (3.2) étant impossible.

5) Si F est un corps global, on a encore les trois cas a),b), et c) pour un corps de quaternions quelconque, mais ce n'est pas tout : il y a des cas d'involution de seconde espèce.

d) Si F' est une extension quadratique séparable de F, D_o un corps de quaternions de centre F, $D=D_o \otimes_F F'$ est muni de l'involution de seconde espèce, produit tensorielde l'involution canonique de D_o sur F et de σ .

Soit p une place quelconque de F' et $d_p \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ l'invariant local en p du corps gauche D. On a

$$d_p = 0 \text{ (i.e. } D_p = D \otimes_F F'_p \text{ est une algèbre de matrices), pour presque tout } p, \quad \text{et } \sum d_p = 0 .$$

A isomorphisme près, D est caractérisé par ses invariants locaux.

d général) F' est une extension quadratique séparable de F, d'automorphisme non trivial σ , D un corps gauche de centre F', tel que

$$d_p = 0 , \quad \text{si } p=p^\sigma \qquad \text{et} \qquad d_p + d_{p^\sigma} = 0 , \quad \text{sinon}$$

Alors D admet une involution prolongeant σ.

Ces conditions sont évidemment nécessaires car $d_p(D^{\sigma o}) = -d_{p^\sigma}$, par (3.2) et (4). Inversement, elles impliquent $D \approx D^{\sigma o}$, et $\alpha \in F$ de (3.2) est une norme locale partout, donc la norme d'un élément de F'.

La liste est complète.

5. Somme orthogonale.

Si W et W' sont deux espaces ε-hermitiens à droite sur D, alors la somme directe W"=W+W' est un espace à droite sur D, muni de l'unique produit ε-hermitien tel que W et W' soient orthogonaux, prolongeant les produits ε-hermitiens de W et W'. C'est par définition, la somme orthogonale de W et W', notée W$\oplus$W'.

Un espace ε-hermitien **dégénéré** est somme orthogonale W+V d'un espace ε-hermitien (non dégénéré) W et d'un espace V sur lequel le produit est nul. On adopte la convention : un espace W muni d'un produit hermitien nul est dit de **type 2.** C'est simplement un espace vectoriel de dimension finie sur D (plus d'involution), son groupe unitaire est le groupe des isomorphismes $GL_D(W)$. C'est commode, pour avoir des résultats uniformes sur les groupes linéaires et unitaires. Par ricochet, un espace ε-hermitien (non dégénéré) est dit parfois de **type 1.**

La somme orthogonale est compatible avec l'isométrie : elle munit l'ensemble des classes d'isométrie des espaces ε-hermitiens sur D d'une structure de semi-groupe abélien. C'est le **semi-groupe de Witt-Grothendieck** des espaces ε-hermitiens sur (D,τ). Le groupe construit avec ce semi-groupe est le **groupe de Witt-Grothendieck** des espaces ε-hermitiens sur (D,τ). Soit H le plan hyperbolique ε-hermitien sur D. Le quotient du groupe de Witt-Grothendieck des espaces ε-hermitiens sur D par le sous-groupe, isomorphe à $\mathbf{Z}$, engendré par la classe d'isométrie de H s'appelle le **groupe de Witt** des espaces ε-hermitiens sur (D,τ).

6.Nous dirons que W est **alterné** si $\langle w,w\rangle = 0$ pour tout $w\in W$. Cette relation appliquée à w+w' donne $\varepsilon\tau(\langle w,w'\rangle)+\langle w,w'\rangle=0$, ce qui implique que τ est triviale. Si la caractéristique de F n'est pas 2, $\varepsilon=-1$, W est symplectique.

Théorème d'orthogonalisation. W est isométrique à une somme orthogonale

$$W \approx \oplus D(a_i) \oplus W°,$$

où W° est un espace alterné.

Corollaire. Si la caractéristique n'est pas 2, tout espace non symplectique W est isométrique à une somme orthogonale $W \approx \oplus D(a_i)$.

La décomposition n'est pas unique, comme le montre l'exemple des espaces quadratiques. Elle permet de définir les invariants.

Invariants . Si W est quadratique, ce sont le **déterminant** $d(W)\in F^*/F^{*2}$ représenté par le produit des a_i , l'**invariant de Hasse** $h(W) = \Pi_{i<j}(a_i,a_j)$ où (,) est le symbole de Hilbert si F est local ou global, **la signature** si $F=\mathbb{R}$ égale à $s(W) =$ p-q où p est le nombre de a_i positifs et q le

nombre de a_i négatifs (la dimension et la signature déterminent (p,q) et inversement).

Dans le cas général, le déterminant se généralise et donne un invariant. Soit $N : D \to F'$ est la norme réduite, $N_{F'/F}:F' \to F$ la norme. Le déterminant d(W) est l'image de $N(\Pi a_i)$ dans F^*/F^{*2} ou $d(W) \in F^*/N_{F'/F}(F^*)$ selon que τ est de première ou de seconde espèce.

La signature s(W) se généralise aux espaces hermitiens sur $\mathbb{C}$ (même définition).

Nous verrons que ces invariants, et la dimension, suffisent à classer les espaces hermitiens si F est fini ou local, à une exception près (les espaces anti-hermitiens sur un corps de quaternions muni de l'involution canonique).

Preuve du théorème par le classique procédé d'orthogonalisation de Schmidt : si W non alterné,soit $w \in W$, tel que $a = \langle w,w \rangle \neq 0$. On a : $a=\varepsilon\tau(a)$. On complète w en une base $\{w,v_2,.....,v_n\}$de W sur D. On choisit $d \in D$ tel que $wd+v_2$ soit orthogonal à w, ... etc. On peut donc supposer les v_i orthogonaux à w. L'espace qu'ils engendrent est un espace ε-hermitien de dimension n-1, s'il n'est pas alterné, on peut continuer,etc.

7. Théorème. Si W est alterné, il est isométrique à mH , et n=2m.

Preuve. Si $w \neq 0$, il existe $v \in W$, $d = \langle w,v \rangle \neq 0$, puisque la forme n'est pas dégénérée. Soit $w'=vd^{-1}$. Le sous-espace W_1 de W engendré par $\{w,w'\}$ est isométrique à **H**. Soit W_2 son orthogonal dans W. Comme W_1 n'est pas dégénéré, W est la somme orthogonale de W_1 et W_2 . Comme W_2 est alterné, de dimension n-2, on recommence, etc.

On a ainsi une décomposition (non unique) de W en somme d'espaces élémentaires D(a) et H.

Les espaces alternés sont classés par leur dimension $n \in 2\mathbb{N}$, $n \geq 2$.

D(a)+D(-a) est isométrique à H , car isotrope de dimension 2.

On note -W l'espace ε-hermitien d'espace W, de produit $-\langle\, , \rangle$, alors W + (-W) est isométrique à nH. Un espace isométrique à nH est dit **hyperbolique.**

La même démonstration fournit aussi :

8. Proposition (Base hyperbolique). Si $V \subset W$ est un sous-espace vectoriel à droite sur D, tel que le produit hermitien soit nul sur $V \times V$, pour toute base $\{e_i\}$ de V sur D, il existe des éléments $\{f_i\}$ de W , tels que $\langle e_i,f_j \rangle = \delta_{i,j}$, et le produit hermitien est nul sur l'espace V* engendré par les $\{f_i\}$.

Si r=dimV, l'espace V+V* est ε-hermitien, isométrique à rH. La base $\{e_i,f_i\}$ de V+V* est appelée une base hyperbolique de V+V*. On dit que V est **totalement isotrope**, s'il vérifie les conditions ci-dessus. S'il existe $w \in W$, non nul, et $<w,w>=0$, on dit que w est **isotrope.** Alors W contient un sous-espace isométrique à H. Un espace sans éléments isotropes est appelé un espace **anisotrope.**

Corollaire (décomposition de Witt). W est isométrique à une somme orthogonale

$$W \approx mH \oplus W^\circ,$$

où W° est anisotrope.

Le théorème de Witt ci-dessous montrera que l'entier $m \geq 0$ et la classe d'isométrie de W° sont uniques. On appelle m l'**indice de Witt** de W. La classification des espaces ε-hermitiens est ramenée à celle des espaces ε-hermitiens anisotropes, ou encore à la détermination du groupe de Witt.

9. Le théorème de Witt est valable si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel suivant :
(*) F est de caractéristique 2, W est quadratique et non alterné.
Notre référence est [Dieu. 1.11].

Théorème de Witt. Si $V \subset W$ est un sous-espace vectoriel à droite sur D, une application linéaire injective f de V dans W telle que $<f(v),f(v')> = <v,v'>$ pour tout $v,v' \in V$ peut être prolongée en une isométrie de W .

On en déduit que l'entier m de (8) est unique, c'est la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal de W. Si W est hyperbolique, un tel espace est appelé un **Lagrangien** de W. Tout sous-espace totalement isotrope se plonge dans un sous-espace totalement isotrope maximal.

Le but des paragraphes suivants 10 à 15 est de donner les résultats de la classification des espaces ε-hermitiens sur les corps finis, locaux et globaux. Ce sont essentiellement un résumé de [Sc.10]. Ces paragraphes ne sont pas utiles pour l'étude de la représentation de Weil et de la correspondance de Howe.

10. Invariants : données associées à un espace ε-hermitien, telles que deux espaces ε-hermitiens sont isométriques si et seulement s'ils ont les mêmes invariants. Les invariants donnés en (6) fournissent un système complet d'invariants (parfois redondant) sur un corps fini ou local .

La classification des espaces hermitiens W sur un corps commutatif ou égal à un corps de quaternions muni de l'involution canonique se ramène à celle des espaces quadratiques. L'espace W considéré comme un espace vectoriel sur F, muni de la restriction du produit hermitien : $W \times W \to F$, est un espace quadratique W_F. Deux tels espaces W et W' sont isométriques si et seulement si W_F

et W'_F le sont. L'espace W est isotrope si et seulement si W_F l'est.

11. Classification des espaces hermitiens sur un corps fini ou local, de caractéristique différente de 2.

1) Si F est fini,

a) les espaces quadratiques anisotropes sont : F(a), où $a \in F^*$ modulo $F^{*.2}$, et V=E l'unique extension quadratique de F, munie de la norme sur F.

b) il y a un seul espace hermitien anisotrope, E

Invariants des espaces quadratiques : la dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et le déterminant $d \in F^*/F^{*2}$

Invariants des espaces hermitiens sur E : la dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

2) Si $F=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ (1) est l'unique espace (quadratique) anisotrope. Il y a un seul invariant, la dimension $n \geq 1$.

3) Si $F=\mathbb{R}$, les anisotropes sont : $n\mathbb{R}(1)$, $-n\mathbb{R}(1)$ $1 \leq n \leq 4$, pour les quadratiques, $n\mathbb{C}$, $-n\mathbb{C}$, $1 \leq n \leq 2$ pour les hermitiens sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ hermitien de dimension 1 sur $\mathbb{H}$.

Invariants des espaces quadratiques : la dimension $n \geq 1$,la signature $s \in \mathbf{Z}$.

Invariants des espaces hermitiens sur $\mathbb{C}$: la dimension $n \geq 1$, la signature $s \in \mathbf{Z}$.

Invariant pour les espaces hermitiens sur $\mathbb{H}$: la dimension $n \geq 1$.

4) Si F est local non archimédien, les quadratiques anisotropes sont

a) F(a) , pour $a \in F^*$ modulo F^{*2} , de dimension 1,

b) E, E(f) , pour chaque extension quadratique E/F,munie de la norme sur F, $f \in F^*$ n'est pas norme d'un élément de E, de dimension 2 .

c) $\mathbb{H}^*(a)$ ou $\mathbb{H}$, si $\mathbb{H}$ est l'unique corps de quaternions sur F , muni de la norme réduite, $\mathbb{H}^{*\circ}$ étant le sous-espace des éléments de trace nulle, $a \in F^*/F^{*2}$, de dimension 3 et 4 respectivement.

Invariants des espaces quadratiques : la dimension $n \geq 1$, le déterminant $d \in F^*/F^{*2}$, et en dimension $n>1$ le symbole de Hasse h = 1 ou -1.

Espaces hermitiens sur E . Les anisotropes: b) et $\mathbb{H}$. Invariants : la dimension, le déterminant.

Espaces hermitiens sur $\mathbb{H}$. Invariant : la dimension. Un seul espace anisotrope, celui de dimension 1

12. Dans le cas où F est fini ou égal à $\mathbb{C}$, la classification est faite. Dans le cas F= $\mathbb{R}$ ou est local non archimédien, il reste à classer les espaces anti-hermitiens sur le corps des quaternions $\mathbb{H}$. Si $a \in \mathbb{H}^\circ$, $-a^2$ est sa norme réduite, c'est un élément quelconque de $F^{\cdot} - \{-F^{\cdot 2}\}$. La proposition ci-dessous est une version corrigée par cette remarque de [Sc.3.6].

Classification des espaces anti-hermitiens sur un corps de quaternions local

Classes d'isométries des espaces anisotropes : a) si $F \neq \mathbb{R}$,

- 3 espaces de dimension 1 , leur déterminant peut prendre toutes les valeurs possibles sauf $-F^{*2}$,
- 3 espaces de dimension 2 , de déterminant différent de F^{*2} ,
- un espace de dimension 3, de déterminant $-F^{*2}$.

Invariants : la dimension $n\geq 1$, le déterminant $d\in F^*/F^{*2}$, $d\neq -F^{*2}$ si $n=1$.
b) Si $F=\mathbb{R}$, un unique espace de dimension 1. Invariant : la dimension $n\geq 1$.

Exercice (utile) : soit $A=M(2,F)$ muni de l'involution canonique, conjuguée de la transposition par $u=(0,1;-1,0)$, les matrices étant écrites en ligne. Si V est un A-module antihermitien libre de rang n, alors Ve , où $e=(1,0;0,0)$ est un F-espace vectoriel quadratique de dimension 2n (pour la restriction à Ve du produit hermitien sur V). Par passage au quotient, on obtient une injection du groupe de Witt-Grothendieck des espaces anti-hermitiens sur M(2,F) dans celui des espaces quadratiques sur F.

13. La classification des espaces ε-hermitiens si F est un corps global, de caractéristique différente de 2, se déduit de la classification locale (11,12), de la description des corps à involution globaux (4), au moyen des principes de Hasse A et B de passage du local au global
A - Deux espaces ε-hermitiens sur D sont isométriques, si et seulement s'ils sont isométriques en toute place p' de F'.
B - Un espace ε-hermitien sur D est isotrope, si et seulement s'il est isotrope à toute place p' de F'.
et au moyen de la caractérisation des systèmes locaux $\{V_{p'}\}$ d'espaces ε-hermitiens sur $D_{p'}$ (qui n'est pas un corps gauche en général) provenant par localisation d'un espace ε-hermitien sur D.

Théorème. Les deux principes de Hasse A et B sont vrais sauf dans le cas exceptionnel où D est un corps de quaternions muni de l'involution canonique, et $\varepsilon=-1$.

Voir [Sc. 10].

14. Dans **le cas exceptionnel** (12), la déviation au principe de Hasse se voit en dimension 1, et la généralisation n'est pas difficile; soit D un corps de quaternions sur F, muni de l'involution canonique, et $i\in D^o$. Soit s le nombre de places p de F ramifiées dans D. Procédant comme en (13), si $W=D(i)$, et W' sont localement isométriques, ils ont même déterminant, et l'on se ramène à $W'=D(fi)$, $f\in F^\cdot$.Soit $\alpha=i^2$, et $\beta\in F$ tels que D soit engendré par i,j tels que $i^2=\alpha$, $j^2=\beta$, $ij=-ji$. Pour que D(fi) soit isométrique à D(i), il faut et il suffit qu'il existe $d\in D$ tel que $di\tau(d)=fi$. On écrit $d=x+yj$, où $x,y\in F(i)$. La condition implique x ou y = 0. On obtient les équivalences (en utilisant (6),(11),(13)):
$D(i) \approx D(fi)$ $\Leftrightarrow$ il existe $x,y\in F$ tels que $x^2-\alpha y^2 = f$ ou βf $\Leftrightarrow$ l'espace quadratique $F(f)+F(-\alpha f)$ est isométrique à $F+F(-\alpha)$ ou à $F(\beta)+F(-\alpha\beta)$ $\Leftrightarrow$ $(f,\alpha)_p=1$ en toute place p de F , ou $(f,\alpha)_p=(\beta,\alpha)_p$ en toute place p de F.
En une place p ramifiée dans D , les espaces $D_p(i)$ et $D_p(fi)$ sont isométriques. Ailleurs $D_p\approx M(2,F_p)$ et un cas particulier de la théorie de Morita, facile à vérifier (12), montre que

$$D_p(i)\approx D_p(fi) \Leftrightarrow (f,\alpha)_p=1 =(\beta,\alpha)_p.$$

Il y a 2^{s-1} choix possibles pour $\gamma(f) = \{(f,\alpha)_p, p$ ramifié dans D$\}$, si D(fi) est localement isométrique à D(i). Pour que D(fi) soit globalement isométrique à D(f'i), il faut et il suffit que

$$\gamma(f) = \pm\gamma(f').$$

On en déduit la première partie du résultat suivant pour n=1. La généralisation n'est pas difficile(Sc.8.4). La déviation au principe de Hasse d'isotropie est plus difficile.

Proposition. A- Il y a exactement 2^{s-2} classes d'isométries d'espaces anti-hermitiens localement isométriques à un espace anti-hermitien donné.
B - Si $\dim_D W \geq 3$, et si W est localement isotrope, alors W est isotrope.

Notons que la démonstration fournit la structure du groupe unitaire de D(i), qui ressemble à celle d'un groupe orthogonal. Soit $F(i)^1$ l'ensemble des éléments de $F' = F(i)$, de norme 1 sur F.

Lemme. Le groupe unitaire de D(i) est isomorphe à celui de F'(1) i.e. à $F(i)^1$.

Remarque. Si F est un corps local, il est facile de vérifier (voir aussi le lemme 5 de II) que l'algèbre engendrée par U(W) dans $A = \mathrm{End}_D W$ est égale à A sauf dans les deux cas suivants :
- W est hyperbolique orthogonal de dimension 2 sur F_3 (le groupe orthogonal est d'ordre 4, non cyclique)
- W est anti-hermitien de dimension 1 sur le corps des quaternions.

15. Invariants des espaces ε-hermitiens sur un corps global.

Espaces quadratiques : la dimension $n \geq 1$, le déterminant $d \in F^*/F^{*2}$, les invariants de Hasse $h_p \in \{\pm 1\}$ aux places non complexes de F, soumis à la condition $\Pi h_p = 1$
Espaces hermitiens sur D commutatif ou corps de quaternions muni de l'involution canonique : se ramène au cas précédent par (10).

Espaces hermitiens sur D de centre F', muni d'une involution de seconde espèce, F'/F quadratique. Pour D=F', voir le résultat précédent.
Deux cas différents :
a) p est une place de F décomposée en deux places p',q' de F' permutées par l'involution. Les algèbres $D_{p'}$, $D_{q'}$ sont anti-isomorphes. Les $D_{p'} \times D_{q'}$ espaces hermitiens de dimension n sont isométriques.
b) sinon, il existe une seule place p' de F' relevant p, l'extension F'/F est quadratique, D = M(r,K) où K=F'. La théorie de Morita montre quil existe un isomorphisme de catégories entre les espace hermitiens sur M(r,K) de dimension n et les espaces hermitiens sur K de dimension nr. Ces espaces sont classés par leur déterminant (12) si p est non archimédienne, et par la signature sinon.

Invariants : la dimension $n \in \mathbb{N} \geq 1$, le déterminant $d \in F^*/N(F'^*)$, les signatures s_p de W aux places