

Flächentragwerke

Von

Karl Girkmann

FLÄCHENTRAGWERKE

EINFÜHRUNG IN DIE ELASTOSTATIK DER
SCHEIBEN, PLATTEN, SCHALEN
UND FALTWERKE

VON

DIPL. ING. DR. H. C. DR. TECHN. **KARL GIRKMANN**

ORD. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN
WIRKL. MITGLIED DER ÖSTERR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VIERTE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE

MIT 316 TEXTABBILDUNGEN



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

Vorwort.

Das vorliegende Buch behandelt die Berechnung von *Flächentragwerken*. Es sind dies dünnwandige, nach Flächen geformte Traggebilde. Ihre Mittelfläche — jene Fläche, die an jeder Stelle die Dicke halbiert — kann eben sein, sie kann einfach oder doppelt gekrümmt sein, und sie kann aus ebenen und gekrümmten Teilflächen zusammengesetzt sein. Ein ebener Flächenträger, der nur durch Kräfte belastet ist, die in seiner Ebene wirken, wird *Scheibe* genannt. Greifen auch (oder ausschließlich) quer zur Mittelebene gerichtete Kräfte an, dann wird der ebene Flächenträger als *Platte* bezeichnet. Ist die Mittelfläche eines Flächentragwerkes gekrümmt oder aus gekrümmten und ebenen Teilflächen zusammengesetzt, dann sprechen wir von einer *Schale* bzw. einem Schalentragwerk. Wird die Mittelfläche nur von ebenen Teilflächen gebildet, dann wird das Tragwerk *Faltwerk* genannt. Alle angeführten Bauformen, einschließlich der Scheiben und Platten, werden unter dem Titel Flächentragwerke zusammengefaßt. In der Regel müssen diese Tragwerke bereits nach der Theorie der mehrdimensionalen Systeme berechnet werden.

Beim Entwurf von Tragwerken des Stahl- und des Stahlbetonbaues ist es nun häufig notwendig, einzelne Bauglieder als Flächentragwerke aufzufassen, um die Größe und den Verlauf der inneren Kräfte hinreichend genau ermitteln zu können. Im Stahlbau sind es verschiedene wichtige Krafteinleitungs- und Kraftverteilungsprobleme, Stabilitätsuntersuchungen für dünne Bleche, Probleme des Zusammenwirkens von stab- und plattenförmigen Baugliedern, Behälteraufgaben usw., die in dieser Weise behandelt werden müssen. Noch häufiger ergibt sich im Stahlbetonbau die Notwendigkeit, die Theorie der mehrdimensionalen Systeme zur Berechnung der Tragwerke heranzuziehen; schon deshalb, weil im Hinblick auf die gebotene Gewichtsbeschränkung eine möglichst weitgehende Verwendung plattenförmiger Elemente beim Aufbau der Tragwerke anzustreben ist. Gerade bei dieser Bauweise sind auch auf Grund einer schärferen Erfassung des Zusammenwirkens der Einzelteile oft sehr bedeutende Gewichtsparsnisse zu erzielen, die es wieder gestatten, die Stützweiten der Tragwerke unter günstigen Bedingungen zu vergrößern. Schließlich sind im Stahlbeton-, wie im Stahlbau auch neue, baustoffsparende, dünnwandige Bauformen entwickelt worden, die Schalentragwerke oder Faltwerke darstellen.

Bei der Berechnung der Flächentragwerke handelt es sich oft um nur einmal auszuführende Rechenarbeiten, deren Ergebnisse dem entwerfen-

den Ingenieur in Form von Schaubildern und Zahlentafeln für die praktische Verwertung bereitgestellt werden können. Wer aber von diesen Hilfsmitteln richtigen Gebrauch machen will, muß nicht nur die Voraussetzungen genau kennen, die ihrer Ausarbeitung zugrunde gelegt wurden, sondern auch über die Theorie der Tragwerke selbst im wesentlichen unterrichtet sein. *Richtiges Konstruieren setzt die Kenntnis des Spieles der inneren Kräfte voraus, und der Konstrukteur muß zugleich wissen, durch welche Maßnahmen er das Kräftespiel günstig zu beeinflussen vermag.* Der mit Entwurfsarbeiten befaßte Hochschulingenieur sollte überdies befähigt sein, auch an der Vervollkommnung und an der Weiterentwicklung der Bauformen, sowie am Ausbau ihrer Theorie, tätigen Anteil zu nehmen. Hierzu sind aber, neben praktischer Erfahrung, gründliche theoretische Kenntnisse erforderlich.

Um nun die notwendige theoretische Vorbildung der künftigen Ingenieure des Stahl- und des Stahlbetonbaues sicherzustellen, ist an unseren Technischen Hochschulen u. a. auch eine neue Pflichtvorlesung über Platten- und Schalentragwerke eingeführt worden, in der den Studierenden der Bauingenieurwissenschaften konstruktiver Fachrichtung (Wahlplan A) die grundlegenden Kenntnisse über die Theorie der Flächentragwerke vermittelt werden.

Das Buch behandelt den Lehrstoff, den der Verfasser in diesen Pflichtvorlesungen (und früher bereits in Wahlvorlesungen) an der Technischen Hochschule in Wien vorgetragen hat. Für die Herausgabe in Buchform mußten die Vorlesungen im Hinblick auf den erweiterten Leserkreis, sowie auch zur Erreichung der notwendigen Geschlossenheit, noch entsprechend ergänzt werden. Das Buch ist als Lehrbuch gedacht, in dem die Studierenden die jeweils vorgetragenen Kapitel nachlesen können. Das Buch soll aber auch jene Ingenieure der Praxis, die zur Vertiefung ihrer theoretischen Kenntnisse die ihnen noch nicht bekannte Theorie der Flächentragwerke kennenlernen wollen, in dieses nicht einfache Wissensgebiet, unter möglichster Ausschaltung der Anfangsschwierigkeiten, einführen und sie nicht nur mit den wichtigeren Lösungsergebnissen, sondern auch mit den Lösungsverfahren, soweit sie für den Techniker in Betracht kommen, vertraut machen. Diesen Absichten entsprechend, ist das Buch möglichst leicht verständlich und in der Sprache des Ingenieurs geschrieben, sowie mit einer reichlichen Anzahl von erläuternden Textabbildungen ausgestattet worden. Die Theorie wird jeweils nur so weit entwickelt, als dies zur Lösung der gegenständlichen Aufgaben erforderlich ist. Es gelangen vorwiegend einfachere Probleme zur Behandlung, die den Bedürfnissen des Stahl- und des Stahlbetonbaues entsprechend ausgewählt sind. Innerhalb jener Teilgebiete, die für die technische Praxis von besonderer Bedeutung sind, ist der Aufgabenkreis auch weiter erstreckt worden und reicht bis an Probleme heran, die bisher noch nicht oder in noch nicht befriedigender Weise gelöst werden konnten. Auf den systematischen Aufbau der Lösungen ist stets geachtet worden; damit soll dem Anfänger zugleich der Weg zur selbständigen Bearbeitung verwandter Probleme gewiesen werden. Soweit es bei der notwendigen Beschränkung des Buch-

umfanges möglich war, sind auch verschiedene Zahlenbeispiele aufgenommen worden.

Wohl müssen die Flächentragwerke zumeist als mehrdimensionale Systeme berechnet werden; es ist aber anderseits, von Sonderfällen abgesehen, nicht notwendig, die strengen Lösungsverfahren der räumlichen Elastizitätstheorie heranzuziehen. Bei den meisten baupraktischen Anwendungen ist nämlich die *Dicke der Flächentragwerke klein gegenüber den Abmessungen in der Mittelfläche*, so daß der Spannungszustand idealisiert werden darf. Außerdem ist es in der Regel auch erlaubt, die *Durchbiegungen querbelasteter Flächentragwerke als klein gegenüber der Wanddicke* voranzusetzen, wodurch die theoretische Behandlung eine weitere, sehr wesentliche Vereinfachung erfahren darf. Setzen wir noch den Werkstoff als *homogen* (in allen Punkten gleiches physikalisches Verhalten aufweisend) und als *isotrop* (in jedem Punkte nach allen Richtungen gleiches physikalisches Verhalten zeigend) voraus und ziehen wir das *lineare Elastizitätsgesetz* (HOOKEsches Gesetz) heran, dann werden die mathematischen Schwierigkeiten so weit herabgemindert, daß das elastostatische Problem für zahlreiche, praktisch wichtige Fälle auch strenge gelöst werden kann.

Mit den vereinfachenden Voraussetzungen der Homogenität und der Isotropie des Werkstoffes und mit der Annahme eines linearen Formänderungsgesetzes legen wir aber unseren Berechnungen einen Idealwerkstoff zugrunde, den es in Wirklichkeit nicht gibt. Unsere Werkstoffe sind bestenfalls quasiisotrop und sie folgen dem HOOKEschen Gesetz nur innerhalb bestimmter Anstrengungsgrenzen, die zuweilen, wie z. B. beim Beton, verhältnismäßig tief liegen und bei der praktischen Ausnutzung des Werkstoffes auch überschritten werden müssen. Daher stellt jede, unter den idealisierenden Voraussetzungen entwickelte mathematisch strenge Lösung tatsächlich nur eine Näherungslösung dar. Erfahrungsgemäß reicht aber dieser Grad der Annäherung an das wirkliche Verhalten der Werkstoffe in der Regel aus, um die Tragwerke mit Hilfe der so gewonnenen Rechnungsergebnisse und unter Zugrundelegung der in Vorschriften und Normen festgelegten zulässigen Werkstoffspannungen hinreichend sicher und zugleich auch wirtschaftlich bemessen zu können.

Zuweilen ist die Annahme der Isotropie nicht mehr aufrechtzuerhalten. In anderen Fällen wieder müssen wir das HOOKEsche Gesetz durch ein anderes Formänderungsgesetz ersetzen, sobald die Anstrengung des Werkstoffes ein bestimmtes Maß überschreitet. Probleme dieser Art werden im Rahmen des Buches nur vereinzelt behandelt (im besonderen wird ein Wechsel des Formänderungsgesetzes nur im Zusammenhang mit der Lösung von Stabilitätsproblemen berücksichtigt). In der Regel werden vielmehr allen Untersuchungen die angeführten idealisierenden Voraussetzungen zugrunde gelegt. Auf die Wiedergabe der Theorie der dicken Flächentragwerke (deren Spannungszustand also nicht mehr idealisiert werden darf) wird demnach ebenso verzichtet, wie auf die theoretische Behandlung jener dünnen Flächentragwerke, deren Durchbiegungen nicht mehr klein sind gegenüber der Wanddicke (so daß es auch nicht mehr

erlaubt ist, die Differentialgleichungen des elastostatischen Problems zu linearisieren).

Das Buch ist in fünf Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt wird eine kurzgefaßte Übersicht über die *theoretischen Grundlagen der Berechnung elastischer Körper* gegeben, soweit dies zum Aufbau der Theorie der Flächentragwerke notwendig ist. Der zweite Abschnitt befaßt sich mit den *Scheiben*. Im dritten Abschnitt werden die *dünnen Platten kleiner Durchbiegungen* berechnet. Dieser Abschnitt erhält auch einen Abriß über die Stabilität der Platten, in welchem die Lösungsverfahren dargelegt und an einigen Beispielen erläutert werden. Im vierten Abschnitt, der den *Schalen* gewidmet ist, wird zunächst die Membrantheorie der Rotationschalen und der Zylinderschalen entwickelt. Es folgt dann die Biegetheorie der achsensymmetrisch belasteten Kugelschale und der geschlossenen Kreiszyinderschale und schließlich die Biegetheorie der nicht achsensymmetrisch belasteten Kreiszyinderschale. Den Abschluß dieses Abschnittes bildet ein Abriß über die Stabilität der Schalen. In einem kurzen fünften Abschnitt wird die Theorie der *Faltwerke*, unter Beschränkung auf die prismatischen Bauformen, entwickelt.

Für das weitere Eindringen in das gegenständliche Wissensgebiet kommt vor allem das im Text laufend vermerkte und am Schlusse jedes Abschnittes zusammengestellte Schrifttum in Betracht. In den bezüglichen Literaturverzeichnissen sind die einschlägigen Fachbücher und jene wichtigeren Abhandlungen angeführt, auf die das Buch Bezug nimmt und die mit den behandelten Aufgaben in Zusammenhang stehen.

Zum Verständnis des Buches ist nur ein Teil jener mathematischen Kenntnisse erforderlich, die an den Technischen Hochschulen den Studierenden der Bauingenieurwissenschaften in den bezüglichen Pflichtvorlesungen vermittelt werden. Da wohl manchem Leser die praktische Anwendung FOURIERScher Reihenentwicklungen nicht geläufig sein wird, ist der Gebrauch dieses für die Lösung der gegenständlichen Randwertprobleme so wichtigen Hilfsmittels — unter Weglassung rein mathematischer Erörterungen — an Hand geeigneter ausgewählter Beispiele eingehend erläutert worden. Das Buch enthält auch einen kurzen Abriß über die Anwendung der FOURIERSchen Integralformel, die vom Verfasser bei den ebenen Flächentragwerken wiederholt zur Herleitung geschlossener Lösungen benützt wurde. Lösungswege, zu deren Verständnis weitergehende Kenntnisse der Funktionstheorie erforderlich sind, wurden nicht herangezogen. Auf dem Gebiete der Mechanik werden Kenntnisse der Statik und der elementaren Festigkeitslehre vorausgesetzt. Jene Grundlagen der „klassischen Elastizitätstheorie“, an die im folgenden angeknüpft wird, sind, wie bereits erwähnt, im ersten Abschnitte des Buches kurz zusammengestellt und können dort nachgelesen werden.

Mit dem Druck des Buches ist im vierten Kriegsjahr begonnen worden. Begreiflicherweise konnten die Setzarbeiten in dieser und in der folgenden Zeit, in der die Fronten immer näher rückten, die Luftangriffe auf die Stadt immer häufiger (und die noch arbeitsfähigen Druckereien immer mehr überlastet) wurden, nur geringe Fortschritte erzielen und sie mußten

wiederholt unterbrochen werden. Bald nachdem der Krieg über die Stadt Wien hinweggezogen war, gelang es aber, die Herstellungsarbeiten am Buche wieder aufzunehmen und dieselben dann, trotz der ungünstigsten Umstände und immer neu auftauchender Hindernisse, in verhältnismäßig kurzer Zeit zu Ende zu führen.

Ich bin dem *Springer-Verlag Wien* zu besonderem Danke dafür verpflichtet, daß es ihm selbst unter diesen überaus schwierigen Verhältnissen gelungen ist, das Buch in friedensmäßiger Ausstattung herauszubringen.

Wien, im Herbst 1945.

K. Girkmann.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage ist nach mehrfacher Ergänzung und Erweiterung aus der dritten Auflage hervorgegangen. Der bisherige Aufbau des Buches blieb unverändert. Der Unterabschnitt über orthotrope Platten, der in der früheren Auflage im Anhang gebracht werden mußte, ist in den dritten Abschnitt (Platten) eingegliedert worden.

In den Abschnitten Scheiben und Platten wurden für eine Reihe von Lösungsergebnissen, die bloß in entwickelter Form dargestellt waren, nunmehr geschlossene Lösungen aufgestellt, und die Ergebnisse in Doppelreihen sind in solche mit einfachen Reihen übergeführt worden. Damit wird die Rechenarbeit wesentlich vereinfacht. Diese Manuskriptänderungen hat die Assistentin meines Instituts, Frau Dr.-Ing. E. TUNGL, in mustergültiger Weise besorgt, wofür ich ihr auch an dieser Stelle bestens danke.

Von ihr wurden auch die Zahlenrechnungen zu den neu aufgenommenen Beispielen aus der Schalentheorie durchgeführt.

Von den weiteren Ergänzungen des Buchinhaltes, die sich über alle fünf Kapitel erstrecken, seien besonders hervorgehoben: Die eingehendere Behandlung der kreisförmigen Scheibe (Ziff. 57); der keilförmigen Scheibe (Ziff. 58), des Plattenstreifens (Ziff. 72 bis 75), des Halbstreifens (Ziff. 77), der Rechteckplatten (Ziff. 79, 82 bis 84, 87 bis 91, 93), der Pilzdecken (Ziff. 113, 114) und der Rotationsschalen (Ziff. 146, 159), die Wiedergabe einer vereinfachten Theorie des Tonnendaches mit Kreiszylinderschale samt Zahlenbeispiel (Ziff. 216 bis 223), die Aufnahme der Ergebnisse neuerer experimenteller Untersuchungen über die Schalenbeulung (Ziff. 236), die Behandlung von Translationsschalen samt Anwendung auf das elliptische Paraboloid über rechteckigem Grundriß (Ziff. 160 bis 162, 203) und die Berechnung eines Faltwerksturmes mit Dachscheibe (Ziff. 248) sowie eines durchlaufenden Faltwerksdaches (Ziff. 249). Hinsichtlich der übrigen Ergänzungen wird auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen.

Die leichte Verständlichkeit der Darstellung, um welche der Verfasser stets bemüht war und die bisher zur Verbreitung des Buches wesentlich beigetragen hat, wurde auch hinsichtlich der Neueinschaltungen gewahrt.

Die den einzelnen Buchabschnitten angeschlossenen Literaturverzeichnisse wurden vervollständigt und dem gegenwärtigen Stande der Forschung entsprechend ergänzt.

Die Vervollständigung der Literaturverzeichnisse erfordert das genaue Studium zahlreicher fremdsprachiger Abhandlungen. Auch bei dieser Arbeit hat mich Frau Dr. TUNGL tatkräftig unterstützt. Für die Neueinschaltungen hat sie die Vorbearbeitungen durchgeführt.

Das Manuskript wurde von Frau Dr. TUNGL so druckgerecht ausgefertigt, daß sich das Setzen von Korrekturfahnen erübrigte und das Buch sofort im endgültigen Seitenformat gesetzt werden konnte.

Wien, im September 1956.

K. Girkmann.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundlagen der mathematischen Theorie der Elastizität.		Seite
1. Spannung und Spannungszustand		1
2. Der räumliche Spannungszustand		2
a) Festsetzungen		2
b) Bestimmungsstücke		3
c) Hauptspannungen		4
d) Gleichgewichtsbedingungen		5
3. Der räumliche Verzerrungszustand		6
a) Verschiebungscomponenten		6
b) Verzerrungscomponenten		6
4. Das HOOKESCHE Elastizitätsgesetz		9
5. Ermittlung der inneren Kräfte und der Formänderungen ..		11
6. Darstellung in Zylinderkoordinaten		12
7. Die Formänderungsarbeit		13
8. Prinzip der virtuellen Verrückungen		14
9. CASTIGLIANOSCHES Prinzip (Prinzip der virtuellen Kräfte) ..		15
10. Prinzip von DE SAINT-VÉNANT		16
Literatur zum ersten Abschnitt		17

Zweiter Abschnitt.

Die Scheiben.

I. Die Elastizitätstheorie der Scheiben	18
11. Der ebene Spannungszustand	18
12. Der ebene Formänderungszustand	20
13. Einführung der AIRYSCHEN Spannungsfunktion	22
14. Übergang auf ebene Polarkoordinaten	23
15. Die Scheibengleichung in Polarkoordinaten	25
16. Die Formänderung der Scheiben	27
17. Die Formänderungsarbeit beim ebenen Spannungszustand ..	28
II. Die Lösung des Randwertproblems	29
18. Die Randbedingungen	29
19. Die strenge Lösung des Randwertproblems	33
20. Aufstellung von Näherungslösungen	34
21. Partikuläre Integrale der Scheibengleichung	37
a) Lösungen in kartesischen Koordinaten	37
b) Lösungen in Polarkoordinaten	38

	Seite
22. Vereinfachung der Randbedingungen mit Hilfe FOURIERScher Reihenentwicklungen	39
23. FOURIERSche Integrale als Hilfsmittel zur Lösung von Randwertproblemen	46
III. Einfache Lösungen für die Rechteckscheibe	50
24. Elementare Lösungen	50
25. Kragträger mit Einzellast	51
26. Träger längs der Endquerschnitte gestützt	53
IV. Die Halbebene	55
27. Gleichmäßig verteilte Randbelastung	55
28. Periodische Randbelastung	56
29. Angriff einer Streckenlast	59
30. Angriff einer Randnormalkraft	62
31. Angriff einer Randscherkraft	66
32. Mittelbare Lastangriffe	68
V. Die streifenförmige Scheibe	74
33. Periodische, symmetrische Randbelastung	74
34. Periodische, antimetrische Randbelastung	79
35. Nichtperiodische Randbelastung	80
VI. Der wandartige Träger	84
<i>A. Mittelfeld eines Durchlaufträgers.</i>	
36. Vollbelastung aller Felder mit $p = \text{konst.}$	84
37. Feldweise wechselnde Gleichlast	88
38. Beliebige periodische Randbelastung	88
39. Eigengewichtswirkung im Falle $\mu \doteq 0$	88
<i>B. Das Einzelfeld.</i>	
40. Die allgemeine Lösung	89
41. Andere Berechnungsverfahren	99
42. Näherungsweise Berechnung mit Hilfe der Lösung für die streifenförmige Scheibe	100
43. Näherungsberechnung mit Hilfe des GALERKINSchen Verfahrens	103
44. Punktweise Erfüllung von Randbedingungen	104
45. Näherungslösung mit Hilfe der Differenzenrechnung	105
VII. Berechnung einer dreieckigen Scheibe	111
46. Näherungsweise Berechnung einer Gewichtsstaumauer	111
VIII. Angriff von Einzellasten im Innern der Scheiben	113
47. Angriff einer Einzellast in der unendlich ausgedehnten Scheibe	113
48. Einzellastangriff in der streifenförmigen Scheibe	116
IX. Der Spannungszustand auf Biegung beanspruchter Träger mit breiten Gurtplatten. Das Problem der voll mittragenden Breite	119
49. Träger mit T-förmigem Querschnitt	119
50. Träger mit doppelt symmetrischem Querschnitt	126
a) Träger mit I-förmigem Querschnitt	126
b) Träger mit Kastenquerschnitt	127

X. Scheibenlösungen in Polarkoordinaten.....	127
51. Elementare Lösungen	127
52. Der dreh-symmetrische Spannungszustand	128
53. Spannungszustand eines Bleches mit einer Bohrung, in die ein Dorn eingetrieben wird	129
54. Reine Biegung des Kreisbogenträgers	129
55. Der geschlossene Ring unter gleichmäßig verteilter Normalbelastung	131
56. Der allgemeine Fall der Biegung des Kreisbogenträgers...	133
57. Die kreisförmige Scheibe unter beliebiger Normalbelastung.	135
58. Die keilförmige Scheibe	138
a) Lastangriff X	138
b) Lastangriff Y	139
c) Lastangriff M	140
d) Gleichmäßig verteilte Randbelastung	140
59. Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit einer kreisförmigen Bohrung	141
a) Zug in Richtung x	141
b) Zug in Richtungen x und y	143
c) Zug in Richtung x und Druck in Richtung y	143
60. Der Zugstab mit einer Bohrung	144
61. Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit einer kreisförmigen Bohrung, belastet durch Bolzendruck	146
62. Der Augenstab	151
XI. Abhängigkeit des ebenen Spannungszustandes der Scheiben von der Querdehnungszahl.	153
63. Scheiben mit einfach und zweifach zusammenhängendem Bereich	153
Literatur zum zweiten Abschnitt.	154

Dritter Abschnitt.

Die Platten.

I. Die Theorie der dünnen Platte mit kleiner Durchbiegung	159
64. Die inneren Kräfte der Platte	159
65. Die Plattengleichung in kartesischen Koordinaten	165
66. Die Randbedingungen	166
67. Übergang auf Polarkoordinaten	171
II. Die Lösung des Randwertproblems	173
68. Die strenge Lösung	173
69. Die Aufstellung von Näherungslösungen	173
70. Einfache Lösungen der homogenen Plattengleichung in kartesischen Koordinaten	176
III. Der Plattenstreifen	179
71. Der frei drehbar gelagerte Plattenstreifen, dessen Belastung nur in der Querrichtung veränderlich ist	179
a) Vergleich mit dem auf Biegung beanspruchten Stab...	179
b) Gleichmäßig verteilte Belastung	180
c) Linear veränderliche Belastung	181
d) Die Belastung ist in Richtung x beliebig veränderlich ..	181

	Seite
72. Eingespannter Plattenstreifen unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	182
a) Die unendlich lange Kragplatte	182
b) Plattenstreifen an einem Rande frei drehbar gelagert, am anderen eingespannt	183
c) Plattenstreifen beiderseits eingespannt	183
73. Der beiderseits frei drehbar gelagerte Plattenstreifen mit beliebiger Belastung	184
74. Angriff von Einzelmomenten	187
75. Unendlich lange Kragplatte mit Einzellast am freien Rande	189
IV. Der Halbstreifen	191
76. Der Halbstreifen unter gleichmäßig verteilter Belastung	192
77. Einzellastangriff am Halbstreifen	194
V. Die frei drehbar gelagerte Rechteckplatte	195
78. Die allgemeine Lösung von NAVIER	195
79. Lösung mittels einfach unendlicher Reihen	198
80. Näherungsberechnung für gleichmäßig verteilte Vollbelastung	204
81. Angriff von Randmomenten	205
VI. Rechteckplatten mit einem frei drehbar gelagerten Randpaar	209
82. Die Belastung ist bloß in Richtung x veränderlich	209
83. Liniénbelastung längs $y = \text{konst.}$	212
84. Gleichmäßig verteilte Belastung innerhalb eines Rechteckes	215
85. Randangriffe	216
a) Zweiseitig gelagerte Platte unter dem Angriff von Randkräften	216
b) Dreiseitig gelagerte Platte unter dem Angriff von Randmomenten	218
VII. Eingespannte Rechteckplatten	219
86. Die allseitig eingespannte Platte unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	220
87. Die allseitig eingespannte Platte unter beliebiger Belastung	227
88. Das Berechnungsverfahren von KOEPCKE	228
89. Weitere Berechnungsverfahren	229
90. Näherungsweise Berechnung	229
91. Eingespannte Rechteckplatten mit einem freien Rande	232
VIII. Die Kragplatte	233
92. Die unendlich ausgedehnte Kragplatte unter dem Angriff einer Einzellast	233
93. Die rechteckige Kragplatte	234
IX. Parallelogrammplatte und Dreiecksplatte	235
94. Die parallelogrammförmige Platte	235
95. Die gleichseitige Dreiecksplatte	236
96. Die Berandung bildet ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck	237
X. Die Kreisplatte	238
97. Drehsymmetrische Spannungszustände	238

	Seite
98. Die Kreisplatte unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	240
a) Frei drehbare Auflagerung am Rande $r = a$	240
b) Volle Einspannung längs des Randes $r = a$	241
99. Kreisplatte belastet durch gleichmäßig verteilte Randmomente $\bar{m}_r$	242
100. Gleichförmig verteilte Belastung innerhalb einer Kreisfläche mit dem Halbmesser b	242
101. Einzellastangriff im Mittelpunkt	244
102. Gleichmäßig verteilte Linienbelastung längs eines Kreises	245
103. Die Kreisplatte auf Einzelstützen unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	247
104. Die Kreisplatte unter linear veränderlicher Belastung	252
XI. Die Kreisringplatte	253
105. Drehsymmetrische Belastung und Stützung	253
XII. Einflußfelder	255
106. Lösung mit Hilfe von einfachen trigonometrischen Reihen	256
107. Die Singularitätenmethode	259
a) Das Einflußfeld für die Durchbiegung	259
b) Die höheren Singularitäten der Differentialgleichung $\Delta w = 0$	261
c) Der singuläre Lösungsanteil für das Einflußfeld $[m_x]$	262
d) Die Singularität des Einflußfeldes einer Querkraft	263
e) Die Singularität des Einflußfeldes für ein Stützenmoment	264
f) Die Ermittlung des regulären Lösungsanteiles der Einflußfunktion	265
g) Die Darstellung der Einflußfelder	267
h) Kreisplatten	268
i) Berücksichtigung der elastischen Querdehnungszahl	269
108. Aufstellung geschlossener Ausdrücke für Einflußfelder	270
XIII. Durchlaufende Platten	270
109. Lösung für eine Felderreihe	270
110. Allgemeiner Fall	274
XIV. Die Pilzdecken	281
111. Die unendlich ausgedehnte Pilzdecke unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	281
112. Die Ermittlung der größten Feldmomente für die unendlich ausgedehnte Pilzdecke	285
a) Schachbrettartige Lastanordnung	285
b) Streifenförmige Belastung	286
113. Pilzdecke über rechteckigem Grundriß	287
a) Pilzdecke mit nur einer Säulenreihe	287
b) Pilzdecke mit mehreren Säulenreihen	289
c) Beliebige rechteckige Grundfläche	291
114. Pilzdecken über kreisförmigem Grundriß	291
XV. Die Berechnung der Platten nach dem Differenzenverfahren	292
115. Die Grundlagen der Theorie des elastischen Gewebes	292
116. Die Durchführung der Berechnung	297
117. Unmittelbare Anwendung der Plattengleichung	299
XVI. Orthotrope Platten	300

Die Theorie der orthotropen Platte.

118. Die Biegemomente	300
119. Die Drillungsmomente	302
120. Die Querkräfte	303
121. Aufstellung der Plattengleichung	303
122. Die Randquerkräfte	303
123. Festlegung der Konstanten K_x , K_y , C und H	304

Anwendungen.

124. Der frei drehbar gelagerte Plattenstreifen unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	308
125. Der eingespannte Plattenstreifen unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	309
126. Der frei drehbar gelagerte Plattenstreifen unter Linienbelastung	309
127. Die frei drehbar gelagerte Rechteckplatte	311
128. Verwertung von Lösungsergebnissen isotroper Platten ...	313
129. Die zweiseitig gelagerte Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Vollbelastung	314
130. Schlußbemerkungen	316
XVII. Die Stabilität der Platten	318
131. Allgemeine Betrachtung	318
132. Die Differentialgleichung der Beulfläche	319
133. Das strenge Lösungsverfahren	322
134. Näherungslösungen mit Hilfe der Energiemethode	325
a) Allgemeine Darstellung der Stabilitätskriterien	325
b) Die BRYANSche Gleichung	328
c) Die Aufstellung von Näherungslösungen	331
d) Anwendungsbeispiele	332
135. Gültigkeitsgrenzen für die Lösungen der Probleme der elastischen Stabilität	337
XVIII. In ihrer Ebene gespannte und zugleich querbelastete Platten	338
136. Die verallgemeinerte Plattengleichung	338
137. In ihrer Ebene gedrückte und zugleich querbelastete Platten	339
Literatur zum dritten Abschnitt	342

Vierter Abschnitt.

Die Schalen.

I. Einleitung	352
138. Rechnungsannahmen	352
139. Schnittkräfte und Schnittmomente	352
140. Der Membranspannungszustand	354

Die Membrantheorie der Rotationsschalen.

II. Allgemeine Grundlagen	355
141. Die Rotationsschale und ihre Schnittkräfte	355
142. Die Gleichgewichtsbedingungen	357
III. Drehsymmetrische Belastung	358
143. Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen	358

	Seite
144. Die Kugelschale	359
a) Eigengewichtsbelastung	359
b) Schneebelastung	360
145. Die elliptische Rotationsschale	361
a) Eigengewichtswirkung	362
b) Schneebelastung	363
146. Die hyperbolische Rotationsschale unter Eigengewichts- belastung	364
147. Die Kuppel mit Fußring	366
148. Die offene Kugelschale	367
149. Konstruktive Maßnahmen zur Erzielung einwandfreier Randbedingungen	368
150. Das Kegeldach	369
151. Die offene Kegelschale	370
152. Der Halbkugelbehälter	371
153. Der Behälter mit Kugelhängeboden	373
154. Der Kegelbehälter	374
155. Der INTZE-Behälter	375
156. Rotationsschalen gleicher Festigkeit	376
IV. Antimetrische Belastung	379
157. Die Integration der Gleichgewichtsbedingungen für die Kugelschale	379
158. Windbelastung der Kugelschale	381
159. Rotationsschalen beliebiger Meridianform	384
V. Berechnung doppelt gekrümmter Schalen mit Hilfe einer Spannungsfunktion	387
160. Aufstellung der Differentialgleichung	387
161. Das elliptische Paraboloid über rechteckigem Grundriß ...	390
162. Andere Anwendungen	394
VI. Schlußbemerkungen	395
163. Weitere Probleme	395
<i>Die Membrantheorie der Zylinderschalen.</i>	
VII. Zylinderschalen mit beliebiger Querschnittskurve ..	397
164. Allgemeines	397
165. Die Schnittkräfte	398
166. Sonderfall der Belastung	399
167. Randbelastung	399
VIII. Die Kreiszylinderschale	401
168. Schnittkräfte für eine beliebige Belastung	401
169. Die Formänderung	402
IX. Das kreiszylindrische Rohr unter dem Angriff von Randlasten	405
170. Reine Biegung	405
171. An beiden Rohrenden greifen entgegengesetzt gleiche Dreh- momente an	405
172. Belastung des Rohres nach Abb. 239	406

X. Das kreiszylindrische Rohr als frei aufliegender Träger	407
173. Belastung mit den Komponenten $X = 0$, $Y = Y_n \sin n\varphi$, $Z = Z_n \cos n\varphi$	407
a) Y_n und Z_n konst.	407
b) $Y_n = Z_n = p \sin \alpha x$	408
174. Die Belastung des Rohres durch Eigengewicht	409
175. Die Belastung des Rohres durch Flüssigkeitsfüllung	410
XI. Der kreiszylindrische Behälter unter Windbelastung	411
176. Berechnung für das Windbelastungsgesetz $p(\varphi) = p \cos \varphi$	411
177. Berechnung für eine beobachtete Verteilung der Windkräfte	412
XII. Die Membrantheorie des Tonnendaches	416
178. Das Schalendach als Träger	416
a) Zylinderschale mit beliebiger Querschnittskurve	417
b) Kreiszylinderschale	418
179. Wahl der Querschnittskurve	419
180. Die elliptische Tonne	419
a) Belastung durch Eigengewicht	420
b) Schneebelastung	421
181. Die Halbkreistonne	422
a) Eigengewichtsbelastung	422
b) Schneebelastung	423
182. Die Zyloide als Querschnittskurve	423
183. Weitere Querschnittskurven	424
XIII. Freitragende durchlaufende Kreiszylinderschalen	425
184. Der Zweifeldträger	425
<i>Die Biegetheorie der Schalen.</i>	
185. Einleitung	427
XIV. Drehsymmetrisch belastete bieguagssteife Rotations- schalen	428
186. Entwicklung der Theorie	428
187. Die Gleichgewichtsbedingungen	429
188. Die Formänderungen	430
189. Die elastostatischen Beziehungen	433
XV. Das Randstörungsproblem der drehsymmetrisch be- lasteten Kugelschale	434
190. Die Differentialgleichungen des Randstörungsproblems ..	434
191. Näherungsweise Integration der Differentialgleichungen ..	436
192. Randangriffe	439
a) Randkräfte R	440
b) Randmomente M	441
193. Aufstellung der Randbedingungen	442
194. Anwendungsbeispiel (elastische Randeinspannung)	442
a) Belastung des Fußringes zufolge der Membrankräfte der Schale	443
b) Belastung des Fußringes durch die Randkräfte R	443
c) Angriff der Randmomente M	444

XVI. Der zylindrische Behälter unter Flüssigkeitsdruck ..	447
195. Aufstellung der Behältergleichung	447
196. Der Behälter mit konstanter Wandstärke; Integration der Differentialgleichung	449
197. Das Randstörungsproblem	450
a) Angriff der Kräfte R am Rande $x = 0$	451
b) Angriff der Momente M am Rande $x = 0$	452
198. Behälter mit voll eingespanntem Mantelfuß	453
199. Behälter mit einem ebenen, auf einer Unterlage aufliegenden Boden	454
200. Der Behälter mit veränderlicher Wandstärke; abgestufte Wandstärke	458
201. Stetig veränderliche Wandstärke	460
202. Randstörungen in drehsymmetrisch belasteten zusammen- gesetzten Rotationsschalen	460
XVII. Zur Biegetheorie der Translationsschalen	462
203. Doppelt symmetrische Translationsschalen über recht- eckigem Grundriß	462
XVIII. Die Kreiszyklinderschale unter beliebiger Belastung	465
204. Einleitung	465
205. Die Gleichgewichtsbedingungen	466
206. Die Formänderung der Kreiszyklinderschale	468
207. Schnittkräfte und Schnittmomente	469
208. Die Grundgleichungen der isotropen Kreiszyklinderschale ..	471
209. Die Randgrößen der Zylinderschale	471
XIX. Das kreiszyklindrische Rohr	473
210. Das beiderseits frei aufliegende Rohr	473
211. Allgemeiner Fall der Lagerung	475
212. Lösung für den Fall $m = 1$	479
213. Berechnung eines beiderseits eingespannten Rohrfeldes für Eigengewichtsbelastung	481
214. Berechnung eines beiderseits eingespannten Rohrfeldes für Flüssigkeitsfüllung	484
XX. Die Biegetheorie der Tonnendächer	486
215. Die Entwicklung der Theorie	486
216. Vereinfachte Theorie der isotropen Kreiszyklinderschale ..	489
217. Partikuläre Lösung	490
218. Die Lösung des homogenen Gleichungssystems	491
219. Die Ermittlung der Konstanten aus den Randbedingungen ..	496
220. Zahlenbeispiel	499
a) Membranlösung der Schale	500
b) Lösung des homogenen Gleichungssystems	501
c) Belastung und Verformung der Randträger	504
d) Aufstellung der Randbedingungen	506
221. Näherungsberechnung nach SCHORER	509
222. Störung an den Binderscheiben	510
223. Kurze Schalen	511
<i>Die Stabilität der Schalen</i>	
224. Einleitung	512
225. Energetische Betrachtung	513