Lecture Notes in Mathematics 1507

K. Hulek T. Peternell
M. Schneider F.-O. Schreyer (Eds.)

Complex Algebraic Varieties

Proceedings, Bayreuth 1990

Springer-Verlag

K. Hulek T. Peternell M. Schneider
F.-O. Schreyer (Eds.)

Complex Algebraic Varieties

Proceedings of a Conference held in
Bayreuth, Germany, April 2–6, 1990

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Editors

Klaus Hulek
Fachbereich Mathematik
Universität Hannover
Welfengarten 1
W-3000 Hannover, Germany

Thomas Peternell
Michael Schneider
Frank-Olaf Schreyer
Mathematisches Institut
Universität Bayreuth
Postfach 101251
W-8580 Bayreuth, Germany

Mathematics Subject Classification (1991): 14DXX, 14EXX, 14FXX, 14JXX, 14KXX, 32LXX, 53CXX

ISBN 3-540-55235-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-55235-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other way, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and permission for use must always be obtained from Springer-Verlag. Violations are liable for prosecution under the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992
Printed in Germany

Typesetting: Camera ready by author
Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
46/3140-543210 - Printed on acid-free paper

Preface

This volume contains the proceedings of the conference "Complex Algebraic Varieties" held in Bayreuth from April 2-6, 1990.

The main topic of this meeting was the classification of algebraic varieties including related topics, such as vector bundles. Most of the contributions are closely related to talks given by one of the authors at the conference.
All the papers are original research articles.

The conference was organized as part of the activities of the DFG research programme "Komplexe Mannigfaltigkeiten". We should like to thank the DFG for the financial support which made this conference possible. We are grateful to the University of Bayreuth for their hospitality.

This conference profited greatly from the political changes of the last two years. It was one of the first conferences in Algebraic Geometry at which mathematicians from Eastern countries could participate without restrictions. This contributed greatly to a fruitful exchange of ideas during the meeting.

January 1992

K. Hulek

Th. Peternell

M. Schneider

F.-O. Schreyer

Table of Contents

A. Beauville:
Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats 1

M. Beltrametti, A. J. Sommese, J. A. Wisniewski:
Results on varieties with many lines and their applications to adjunction theory 16

G. Bohnhorst, H. Spindler:
The stability of certain vector bundles on P_n 39

F. Catanese, F. Tovena:
Vector bundles, linear systems and extensions of π_1 51

O. Debarre:
Vers une stratification de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées 71

J. P. Demailly:
Singular hermitian metrics on positive line bundles 87

T. Fujita:
On adjoint bundles of ample vector bundles 105

Y. Kawamata:
Moderate degenerations of algebraic surfaces 113

U. Persson:
Genus two fibrations revisited 133

Th. Peternell, M. Szurek, J. A. Wisniewski:
Numerically effective vector bundles with small Chern classes 145

C. A. M. Peters:
On the rank of non-rigid period maps in the weight one and two case 157

A. N. Tyurin:
The geometry of the special components of moduli space of vector bundles over algebraic surfaces of general type 166

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

ANNULATION DU H^1 POUR LES FIBRÉS EN DROITES PLATS

Arnaud Beauville
Mathématiques - Bât. 425
Université Paris-Sud
F-91 405 Orsay Cedex

Introduction

Soit X une variété kählérienne compacte, et soit $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ la variété des fibrés en droites holomorphes sur X dont la première classe de Chern est nulle dans $H^2(X,\mathbf{C})$. Lorsque L est un élément général de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, des hypothèses assez faibles sur X entraînent l'annulation des espaces de cohomologie $H^i(X,L)$ pour $i < \dim(X)$ [G-L 1]. On est ainsi amené à s'intéresser à la sous-variété $S^i(X)$ de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ formée des fibrés en droites L tels que $H^i(X,L) \neq 0$. Green et Lazarsfeld ont prouvé récemment [G-L 2] que *les composantes irréductibles de* $S^i(X)$ *sont des translatés de sous-tores complexes de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$. En fait, des discussions avec F. Catanese nous ont conduit à proposer une conjecture plus précise :

Conjecture.- *Les composantes de* $S^i(X)$ *sont des translatés de tores complexes par des points d'ordre fini.*

La conjecture est vraie pour les composantes de dimension ≥ 1 de $S^1(X)$: cela résulte de la description précise de ces composantes donnée au §2 (et qui corrige l'énoncé analogue dans [B], qui contient une erreur). Nous proposons dans cet exposé une stratégie pour prouver que *les points isolés de* $S^1(X)$ *sont de torsion.* L'idée de base est de considérer, plutôt que le groupe $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, le groupe $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ des faisceaux localement constants de rang 1 sur X. On montre au §3 que le sous-ensemble $\Sigma^1(X)$ de $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ formé des faisceaux $\mathscr{L}$ tels que $H^1(X,\mathscr{L}) \neq 0$ est étroitement relié à $S^1(X)$. On peut considérer $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ comme le groupe $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbf{C}^*)$ des caractères de $\pi_1(X)$; le point clé est que les points isolés de $\Sigma^1(X)$ correspondent à des caractères *unitaires.* On voit de plus, en utilisant l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ sur $H^1(X,\mathbf{C}^*)$, que les valeurs de ces caractères sont des nombres algébriques. Si en outre ce sont des *entiers* algébriques, un lemme célèbre de Kronecker permet de conclure. Malheureusement je ne sais pour l'instant prouver cette intégralité que sous des hypothèses restrictives, par exemple quand *le groupe dérivé* $D(\pi_1(X))$ *est de type fini.* Plus que ce résultat, dont l'intérêt est limité par l'aspect artificiel de l'hypothèse, c'est la méthode qui me semble intéressante; je continue à espérer qu'elle permettra de prouver la conjecture pour $S^1(X)$.

§1. Fibrations sur une courbe

Dans tout cet article, la lettre X désigne une variété kählérienne compacte (connexe). Nous appellerons *fibration* de X sur une courbe B tout morphisme surjectif $p : X \longrightarrow B$ de X sur une courbe lisse B, à fibres connexes. Dans ce paragraphe, nous considérons une fibration $p : X \longrightarrow B$; nous allons étudier la relation entre les groupes de Picard de X, de B et des fibres de p.

Soit b un point de B. Le diviseur p^*b s'écrit $\sum n_\alpha D_\alpha$, où les diviseurs D_α sont irréductibles et réduits; le p.g.c.d. m des entiers n_α est appelé *multiplicité* de la fibre p^*b. Si $m > 1$, on peut écrire $p^*b = mF$, où F est un diviseur effectif; on dit alors que la fibre p^*b est multiple.

Soient $m_1F_1, \ldots, m_sF_s$ les fibres multiples de p.

Lemme 1.1.- *Soit* V *un diviseur de* X *dont les composantes soient contenues dans les fibres de* p. *Pour que la classe de* V *dans* $H^2(X, \mathbf{C})$ *soit nulle, il faut et il suffit que l'on puisse écrire* $V = p^*\delta + \sum k_iF_i$, *où* δ *est un diviseur de degré* 0 *sur* B *et les* k_i *des entiers vérifiant* $\sum k_i/m_i = 0$.

Notons ω la classe dans $H^2(X, C)$ d'une forme de Kähler sur X. Si n désigne la dimension de X, notons $\int_X$ l'isomorphisme canonique de $H^{2n}(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$. Soit NS(X) le sous-groupe de $H^2(X, \mathbf{C})$ formé des classes de diviseurs; on le munira de la forme bilinéaire symétrique définie par $(\alpha.\beta) = \int_X \omega^{n-2} \wedge \alpha \wedge \beta$. En vertu du théorème de l'indice de Hodge, elle est de signature $(+1, -1, \ldots, -1)$.

Soit F une fibre de p. La classe de F dans NS(X) est non nulle, et de carré nul; par suite, la forme bilinéaire induite sur l'orthogonal de F dans NS(X) est négative. Notons $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille des composantes irréductibles de F, et n_α la multiplicité de D_α, de sorte que le diviseur F est égal à $\sum n_\alpha D_\alpha$. Considérons la matrice $(D_\alpha . D_\beta)_{(\alpha,\beta) \in I \times I}$. D'après ce qui précède, elle est négative, et son noyau contient l'élément $n = (n_\alpha)_{\alpha \in I}$. Pour $\alpha \neq \beta$, le produit $(D_\alpha . D_\beta)$ est positif, et même strictement positif si D_α rencontre D_β : en effet ce nombre s'obtient en intégrant la forme positive ω^{n-2} sur l'espace analytique $D_\alpha \cap D_\beta$. Comme la fibre F est connexe, il en résulte qu'il n'existe pas de partition $I = J \cup K$ de I telle qu'on ait $(D_\alpha . D_\beta) = 0$ pour $\alpha \in J$, $\beta \in K$. Un lemme classique d'algèbre linéaire (cf. par exemple [Bo], Ch. V, §3, n°5, lemme 4) affirme alors que le noyau de la matrice $(D_\alpha . D_\beta)$ est $\mathbf{R}n$. Par suite, tout diviseur D de la forme $\sum k_\alpha D_\alpha$ (avec $k_\alpha \in \mathbf{Z}$) vérifie $(D.D) \leq 0$, et $(D.D) = 0$ si et seulement si D est multiple rationnel de F.

Il en résulte que tout diviseur vertical V de carré nul peut s'écrire $V = p^*\delta + \sum k_iF_i$ (rappelons que $m_1F_1, \ldots, m_sF_s$ sont les fibres multiples de p). Quitte à modifier les k_i, on peut supposer $\deg(\delta) = 0$. La classe de V dans $H^2(X, \mathbf{C})$ est alors k fois celle de F, avec $k = \sum k_i/m_i$, d'où le lemme. ∎

Proposition 1.2.- *Soit* L *un élément de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Le faisceau* p_*L *n'est pas nul.*

b) *La restriction de* L *à toute fibre lisse de* p *est triviale.*

c) *La restriction de* L *à une fibre lisse de* p *est triviale.*

d) *Il existe un élément* L_0 *de* $\mathrm{Pic}^0(B)$ *et des entiers* $k_1, \dots, k_s$, *satisfaisant à* $\sum k_i/m_i = 0$, *tels que* L *soit isomorphe à* $p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$.

a) $\Leftrightarrow$ b) : Notons U le plus grand ouvert de B au-dessus duquel p est lisse. Sous l'hypothèse b), le théorème de changement de base implique que le faisceau p_*L est localement libre de rang 1 au-dessus de U, d'où a).

Inversement, si la restriction de L à une fibre lisse F de p n'est pas triviale, l'espace $H^0(F, L_{|F})$ est nul (puisque F est kählérienne). Les théorèmes de semi-continuité et de changement de base entraînent alors que le faisceau p_*L est concentré sur un nombre fini de points; comme il est sans torsion, il est nécessairement nul.

b) $\Leftrightarrow$ c) : Pour $b \in U$, notons F_b la fibre (lisse) $p^{-1}(b)$. Les groupes $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ et $\mathrm{Pic}^\tau(F_b)$ s'identifient à $H^1(X, \mathbf{S}_1)$ et $H^1(F_b, \mathbf{S}_1)$ respectivement, et l'application de restriction $\mathrm{Pic}^\tau(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^\tau(F_b)$ s'identifie à l'application naturelle $H^1(X, \mathbf{S}_1) \longrightarrow H^1(F_b, \mathbf{S}_1)$. Il en résulte que le noyau de cette application est indépendant du point b, d'où l'implication c) $\Rightarrow$ b). L'implication opposée est triviale.

b) $\Leftrightarrow$ d) : L'implication d) $\Rightarrow$ b) est claire. Sous l'hypothèse b), l'homomorphisme canonique $p^*p_*L \longrightarrow L$ est un isomorphisme au-dessus de $p^{-1}(U)$. Il en résulte que l'on peut écrire L sous la forme $\mathcal{O}_X(\sum k_\alpha D_\alpha)$, où chaque diviseur D_α est une composante d'une fibre de p. On conclut alors à l'aide du lemme 1.1. ∎

Proposition 1.3.- *Soit* L *un élément de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, *tel que* p_*L *ne soit pas nul. Ecrivons* $L = p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$, *où* L_0 *est un fibré en droites sur* B *et* $k_1, \dots, k_s$ *des entiers satisfaisant à* $0 \leq k_i < m_i$ *et* $\sum k_i/m_i \in \mathbf{N}$. *Le faisceau* p_*L *est alors isomorphe à* L_0.

Posons $N = \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$. Il s'agit de prouver que p_*N est isomorphe à $\mathcal{O}_B$; en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow N(-F_i) \longrightarrow N \longrightarrow N_{|F_i} \longrightarrow 0 ,$$

et en raisonnant par récurrence sur l'entier $\sum k_i$, il suffit de prouver que le faisceau $N_{|F_i}$ n'a pas de section globale non nulle. Or ce faisceau est égal à $\mathcal{O}_{F_i}(k_i F_i)$, et le faisceau $\mathcal{O}_{F_i}(F_i)$ est d'ordre m_i dans $\mathrm{Pic}(F_i)$ (cf. par exemple [BPV], lemme III.8.3, où l'hypothèse que X est une surface n'est pas utilisée dans la démonstration). On conclut à l'aide du lemme 1.4 ci-dessous. ∎

Lemme 1.4.- *Pour tout élément non nul* L *de* $\mathrm{Pic}^\tau(F_i)$, *on a* $H^0(F_i, L) = 0$.

Supposons que $H^0(F_i, L)$ contienne une section non nulle s. Notons D le plus grand diviseur $\leq F_i$ tel que $s_{|D} = 0$, et posons $E = F_i - D$; on a $E \neq 0$. La section s définit par restriction une section du faisceau inversible $L(-D)_{|E}$, qui ne s'annule sur aucune composante de E. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow L(-D)_{|E} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0 ,$$

où le support Z de $\mathcal{T}$ est de codimension 2 dans X . En considérant les secondes classes de Chern on obtient $c_1(D).c_1(E) = -cl(Z)$. On en déduit, avec les notations de la démonstration du lemme 1.1, $(D.E) \leq 0$ dans NS(X) , et il n'y a égalité que si $\mathcal{T}$ est nul. En écrivant $E = F_i - D$ on obtient $(D.D) \geq 0$, ce qui entraîne $D = 0$ (*loc. cit.*). La section s définit alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{F_i}$ sur L , ce qui contredit l'hypothèse sur L . ■

Nous noterons $Pic^\tau(X,p)$ le noyau de l'homomorphisme $Pic^\tau(X) \longrightarrow Pic^\tau(F)$, où F désigne une fibre lisse quelconque de p (d'après la prop. 1.2, ce noyau est indépendant du choix de F). C'est un sous-groupe de Lie fermé du groupe de Lie (complexe) $Pic^\tau(X)$.

Notons $\Gamma^\tau(p)$ le sous-groupe de $\oplus \mathbf{Z}/(m_i)$ formé des éléments $(\dot{k}_1, \ldots, \dot{k}_s)$ tels que $\sum k_i/m_i$ soit entier, et $\varphi : Pic^\tau(X,p) \longrightarrow \Gamma^\tau(p)$ l'homomorphisme qui associe à la classe d'un diviseur $p^*D + \sum k_i F_i$ l'élément $(\dot{k}_1, \ldots, \dot{k}_s)$.

Proposition 1.5.- *La suite*

$$0 \longrightarrow Pic^0(B) \xrightarrow{p^*} Pic^\tau(X,p) \xrightarrow{\varphi} \Gamma^\tau(p) \longrightarrow 0$$

est exacte.

En d'autres termes, le groupe de Lie complexe $Pic^\tau(X,p)$ a pour composante neutre la sous-variété abélienne $p^* Pic^0(B)$, et son groupe des composantes connexes est isomorphe à $\Gamma^\tau(p)$. Il est donc isomorphe (non canoniquement) au produit $Pic^0(B) \times \Gamma^\tau(p)$.

Considérons l'homomorphisme $\psi : \Gamma^\tau(p) \longrightarrow Pic^\tau(X,p) / p^* Pic^0(B)$ qui associe à $(\dot{k}_1, \ldots, \dot{k}_s)$ la classe de $\sum k_i F_i$. La prop. 1.2 exprime qu'il est surjectif; il s'agit de prouver qu'il est injectif. Soient donc $k_1, \ldots, k_s$ des entiers tels que le faisceau $L = \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$ appartienne à $p^* Pic^0(B)$. Le faisceau $L_{|F_i}$ est alors trivial pour tout i . Mais d'autre part ce faisceau est égal à $\mathcal{O}_{F_i}(k_i F_i)$, et l'on a déjà vu que le faisceau $\mathcal{O}_{F_i}(F_i)$ est d'ordre m_i dans $Pic(F_i)$. On en déduit que k_i est multiple de m_i , ce qui prouve notre assertion.

(1.6) Désignons par $Pic^0(X,p)$ l'intersection de $Pic^\tau(X,p)$ avec $Pic^0(X)$, et par $\Gamma^0(p)$ l'image de $Pic^0(X,p)$ dans $\Gamma^\tau(p)$. Comme le quotient $Pic^\tau(X)/Pic^0(X)$ s'identifie au sous-groupe de torsion de $H^2(X, \mathbf{Z})$, le groupe $\Gamma^0(p)$ est défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma^0(p) \longrightarrow \Gamma^\tau(p) \longrightarrow \text{Tors } H^2(X, \mathbf{Z}) .$$

Pour toute fibre lisse F de p , on a une suite exacte (non canonique)

$$0 \longrightarrow p^* Pic^0(B) \times \Gamma^0(p) \longrightarrow Pic^0(X) \longrightarrow Pic^0(F) ,$$

et $\Gamma^0(p)$ s'identifie au groupe des composantes connexes de $Pic^0(X,p)$. Par dualité de Cartier, le dual de Pontrjagin de $\Gamma^0(p)$ s'identifie au groupe des composantes connexes du noyau de l'homomorphisme canonique $Alb(F) \longrightarrow Alb(X)$.

Remarque 1.7.- Soit F une fibre lisse de p dans X . La prop. 1.5 peut s'exprimer de manière purement topologique, par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(B,S_1) \times \Gamma^\tau(p) \longrightarrow H^1(X,S_1) \longrightarrow H^1(F,S_1) \ .$$

Par dualité de Pontrjagin, on en déduit une suite exacte

$$H_1(F,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z}) \times \hat{\Gamma}^\tau(p) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\hat{\Gamma}^\tau(p)$ désigne le dual de Pontrjagin de $\Gamma^\tau(p)$.

Plus canoniquement, cela revient à dire que l'homologie du complexe

$$H_1(F,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z})$$

est isomorphe à $\hat{\Gamma}^\tau(p)$ (on peut bien sûr obtenir ces résultats directement par une étude topologique simple, cf. [S]).

On obtient de même une suite exacte

$$H_1(F,\mathbf{Z})_\ell \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z})_\ell \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z}) \times \hat{\Gamma}^0(p) \longrightarrow 0$$

(où pour tout Z-module M , on note M_ℓ le quotient de M par son sous-module de torsion).

Exemple 1.8.- Commençons par quelques remarques générales. Soit Y une variété kählérienne compacte sur laquelle opère un groupe fini G ; supposons pour simplifier que le quotient Y/G soit lisse. Notons $\mathrm{Pic}^G(Y)$ le plus grand sous-tore complexe de $\mathrm{Pic}^0(Y)$ sur lequel G opère trivialement. Comme $H^1(Y/G, \mathcal{O}_{Y/G})$ s'identifie au sous-espace des éléments G-invariants de $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$, l'homomorphisme $\pi^* : \mathrm{Pic}^0(Y/G) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(Y)$ est *surjectif ;* son noyau est le sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ formé des caractères qui sont triviaux sur les stabilisateurs des points de Y .

Soit maintenant F une variété kählérienne compacte, sur laquelle le groupe G opère librement ; soient B une courbe et $\beta : \tilde{B} \longrightarrow B$ un revêtement (ramifié) galoisien de groupe G . Le groupe G opère librement sur le produit $\tilde{B} \times F$; notons X la variété quotient et $\pi : \tilde{B} \times F \longrightarrow X$ l'application canonique. La première projection définit un morphisme $p : X \longrightarrow B$; les fibres de p au-dessus des points de ramification de β sont multiples, les autres fibres sont isomorphes à F .

D'après ce qui précède, l'homomorphisme

$$\pi^* : \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(\tilde{B}) \times \mathrm{Pic}^G(F)$$

est surjectif; son noyau $\hat{G}$ s'identifie au groupe $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$. On en déduit que le groupe $\mathrm{Pic}^0(X,p)$ est égal à $\hat{G} + p^* \mathrm{Pic}^0(B)$. Supposons en outre que le sous-groupe distingué de G engendré par les stabilisateurs des points de $\tilde{B}$ soit égal à G (par exemple que l'une des fibres de β soit réduite à un point), de sorte que l'homomorphisme $\beta^* : \mathrm{Pic}^0(B) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(\tilde{B})$ est injectif; alors l'intersection $\hat{G} \cap p^* \mathrm{Pic}^0(B)$ est réduite à 0 , et *le groupe* $\Gamma^0(p)$ *est isomorphe à* $\hat{G}$. Observons qu'il est facile de choisir β de façon qu'on ait $\Gamma^0(p) = \Gamma^\tau(p)$.

Cet exemple est en fait un cas très particulier d'une situation générale :

Proposition 1.9.- *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle\tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \quad , \tag{1.9}$$

où π *est un revêtement étale,* β *un morphisme fini et* $\tilde{p}$ *une fibration, tel qu'on ait* $\pi^* \mathrm{Pic}^\tau(X,p) \subset \tilde{p}^* \mathrm{Pic}^0(\tilde{B})$.

Soit G le dual de Pontryagin de $\Gamma^\tau(p)$; il s'identifie au quotient de $\oplus\, \mathbf{Z}/(m_i)$ par le sous-groupe des éléments $(\dot{n}, \ldots, \dot{n})$ $(n \in \mathbf{Z})$. On désignera par e_i la classe dans G de l'élément dont la i-ième composante est $\dot{1}$ et dont les autres composantes sont nulles. Soit m le p.p.c.m. des m_i ; notons d_i l'entier m/m_i et δ_i le p.g.c.d. des entiers d_j pour $j \neq i$. On vérifie facilement que l'ordre de e_i dans G est m_i/δ_i .

Notons B' le complémentaire des b_i dans B ; soit o un point de B' . Le groupe $\pi_1(B', o)$ est engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_{2g}, t_1, \ldots, t_s$, soumis à la relation $(a_1,a_{g+1})\ldots(a_g,a_{2g})\, t_1 \ldots t_s = 1$; le générateur t_i est obtenu en reliant o à un petit cercle autour de b_i . Définissons un homomorphisme $\varphi : \pi_1(B',o) \longrightarrow G$ en choisissant arbitrairement $\varphi(a_i)$, et en posant $\varphi(t_i) = e_i$. On en déduit un revêtement $\beta : \tilde{B} \longrightarrow B$ galoisien de groupe G ; chaque point de $\tilde{B}$ au-dessus de b_i a un indice de ramification égal à l'ordre de e_i dans G , soit m_i/δ_i .

Notons $\tilde{X}$ la normalisation du produit fibré $X \times_B \tilde{B}$ et $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$, $\tilde{p} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{B}$ les morphismes déduits des deux projections. Le morphisme π est étale : il suffit en effet de le vérifier en codimension 1 , autrement dit au-dessus d'un point assez général de F_i , auquel cas cela résulte d'un calcul simple et bien connu. La fibre de $\tilde{p}$ au-dessus d'un point général $\tilde{b}$ de $\tilde{B}$ est isomorphe à $p^{-1}(\beta(\tilde{b}))$, donc connexe.

Pour tout i , on a

$$\tilde{p}^* \beta^* b_i \;=\; \frac{m_i}{\delta_i} \sum_{\tilde{b} \in \beta^{-1}(b_i)} \tilde{p}^* \tilde{b} \;=\; m_i\, \pi^* F_i \;;$$

on en déduit que chaque fibre $\tilde{p}^* \tilde{b}$ a pour multiplicité δ_i , et que le faisceau $\pi^* \mathcal{O}_X(\delta_i F_i)$ appartient à $\tilde{p}^* \mathrm{Pic}(\tilde{B})$. Soit alors L un élément de $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; écrivons $L = \pi^* M(\sum k_i F_i)$, avec $\sum k_i/m_i \in \mathbf{Z}$. Cette dernière relation signifie que m divise $\sum k_i d_i$; comme δ_i est premier avec d_i , on en déduit que δ_i divise k_i . Par suite le faisceau $\pi^* L$ provient d'un faisceau inversible sur $\tilde{B}$, nécessairement de degré 0 . ■

Proposition 1.10.- *Soit* S *une composante de* $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; *soient* $k_1, \ldots, k_s$ *des entiers tels que* $0 \leq k_i < m_i$, *et que les éléments de* S *soient de la forme* $p^* L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$, *avec* $L_0 \in \mathrm{Pic}(B)$.

a) *Pour tout* $L \in S$, *on a* $\dim H^1(X,L) \geq g(B) - 1 + \sum k_i/m_i$.

b) *Supposons de plus que* X *soit une* surface. *On a alors*

$$\dim H^1(X,L) \;=\; g(B) - 1 + \sum k_i/m_i$$

pour tous les éléments L *de* S *sauf un nombre fini.*

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Posons $L = p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$. Compte tenu de la prop. 1.3, la suite spectrale de Leray fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(B, L_0) \longrightarrow H^1(X, L) \longrightarrow H^0(B, R^1p_*L) \longrightarrow 0 \ .$$

On a $\dim H^1(B, L_0) \geq g(B) - 1 + \sum k_i/m_i$, et il y a égalité si $L \neq \mathcal{O}_X$. Cela entraîne a) ; pour démontrer b) , il suffit de prouver qu'on a $H^0(B, R^1p_*L) = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments L de S . Considérons le diagramme (1.9). Le faisceau L est facteur direct de $\pi_*\pi^*L$, donc R^1p_*L est facteur direct de $\beta_* R^1\tilde{p}_*(\pi^*L)$, et l'espace $H^0(B, R^1p_*L)$ s'identifie à un sous-espace de $H^0(\tilde{B}, R^1\tilde{p}_*(\pi^*L))$. Ecrivons $\pi^*L = \tilde{p}^*M$, avec $M \in \mathrm{Pic}^0(\tilde{B})$ (prop. 1.9); le faisceau $R^1\tilde{p}_*(\pi^*L)$ est isomorphe à $M \otimes R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$.

D'après [F] , le fibré $R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ admet une décomposition en somme directe $R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \bigoplus_{i=0}^{r} F_i$, où le dual de F_0 est ample, et où F_i est stable de degré 0 pour $i \geq 1$. On en déduit que $M \otimes R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ admet une section non nulle si et seulement si M est le dual de l'un des F_i , d'où la proposition. ■

Le résultat b) permet de corriger les assertions de [B] sur le système paracanonique des surfaces (voir ci-dessous). Supposons que X soit une surface et que S soit une composante de $\mathrm{Pic}^0(X, p)$; en suivant la démonstration du th. 2 de *loc. cit.*, on obtient que la variété des diviseurs effectifs D tels que $\mathcal{O}_X(D) \otimes K_X^{-1} \in S$ est de dimension $\chi(\mathcal{O}_X) + 2g(B) - 2 + \sum_{k_i \geq 1} \frac{m_i - k_i}{m_i}$. C'est une composante du systeme paracanonique $\{K_X\}$ si et seulement si cette dimension est $\geq p_g$.

§2. Le sous-ensemble $S^1(X)$ de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$

L'énoncé suivant est une généralisation du lemme de Castelnuovo-De Franchis (qui correspond au cas $L = \mathcal{O}_X$); il est énoncé incorrectement dans [B] . Je reprends ici, en la corrigeant, la démonstration de [B] .

Proposition 2.1.- *Soient* L *un élément de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, *et* ω *une 1-forme holomorphe non nulle sur* X . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite*

$$H^0(X, L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega^1_X \otimes L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega^2_X \otimes L)$$

n'est pas exacte;

(ii) *Il existe un morphisme* p *de* X *sur une courbe* B *de genre* ≥ 1 *tel que la forme* ω *provienne par image réciproque de* $H^0(B, \Omega^1_B)$, *et que l'on ait :*

- $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X, p)$ *si* $g(B) \geq 2$;
- $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X, p) - p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ *si* $g(B) = 1$.

Supposons la condition (i) satisfaite. Il existe alors une forme non nulle $\alpha \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$ telle que $\alpha \wedge \omega = 0$; si en outre $L = \mathcal{O}_X$, on peut prendre α non proportionnelle à ω . La relation $\alpha \wedge \omega = 0$ signifie qu'il existe une section méromorphe φ de L telle qu'on ait $\alpha = \omega \otimes \varphi$. Soit ∇ la connexion holomorphe unitaire sur L . La théorie de Hodge entraîne $\nabla\alpha = 0$ et $d\omega = 0$, d'où $\omega \wedge \nabla\varphi = 0$ dans $\Omega^2_X \otimes L$. On en déduit qu'il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $\nabla\varphi = f\omega \otimes \varphi$. Appliquant de nouveau la connexion intégrable ∇ , on obtient $df \wedge \omega = 0$.

Comme le diviseur de φ n'est pas nul par hypothèse, la forme $\varphi^{-1}\nabla\varphi = f\omega$ a des pôles, de sorte que la fonction f n'est pas constante; considérons-la comme une application méromorphe de X dans $\mathbf{P}^1$. D'après le théorème de Hironaka, il existe un morphisme $\varepsilon : \hat{X} \longrightarrow X$, composé d'un nombre fini d'éclatements, et un morphisme $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ qui prolonge $f \circ \varepsilon$. Soit $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow B \xrightarrow{p} \mathbf{P}^1$ la factorisation de Stein de $\hat{f}$. La relation $df \wedge \omega = 0$ implique que la restriction de $\varepsilon^*\omega$ à une fibre générale de p est nulle, donc que $\varepsilon^*\omega$ provient par image réciproque d'une forme méromorphe ω_0 sur B ; comme $p^*\omega_0$ est holomorphe, la forme ω_0 est nécessairement holomorphe. On a donc $g(B) \geq 1$, ce qui entraîne *a posteriori* que f était partout définie : on peut prendre $\hat{X} = X$ et $\varepsilon = Id_X$.

Comme $\alpha = \omega \otimes \varphi$, il existe un diviseur effectif E sur B tel que le diviseur des pôles de φ soit contenu dans p^*E ; l'espace $H^0(X, L(p^*E))$, isomorphe à $H^0(B, p_*L \otimes \mathcal{O}_B(E))$, est donc non nul. Il en résulte que le faisceau p_*L n'est pas nul, ce qui implique $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ (prop. 1.2). Pour achever de prouver (ii), il reste à éliminer le cas $g(B) = 1$ et $L = p^*L_0$, avec $L_0 \in \mathrm{Pic}^0(B)$. Dans ce cas la forme $\alpha = \omega \otimes \varphi$ provient comme ci-dessus d'une forme holomorphe $\alpha_0 \in H^0(B, \Omega^1_B \otimes L_0)$; comme $g(B) = 1$, cela implique $L_0 = \mathcal{O}_B$ et α proportionnelle à ω , contrairement à l'hypothèse.

Supposons maintenant la condition (ii) satisfaite. Ecrivons L sous la forme $p^*L_0(\sum k_i F_i)$, où $m_1F_1, \ldots, m_sF_s$ sont les fibres multiples de p , et $0 \leq k_i < m_i$ pour tout i . Soit D_0 le diviseur sur B somme des points correspondant aux fibres F_i telles que $k_i \geq 1$. On a $\deg(L_0) = -\sum k_i / m_i$, d'où

$$\deg(L_0(D_0)) = \sum_{k_i \geq 1} \frac{m_i - k_i}{m_i} \geq 0 ,$$

et de plus $\deg(L_0(D_0)) > 0$ si $g(B) = 1$. Par suite l'espace $H^0(B, \Omega^1_B \otimes L_0(D_0))$ contient un élément non nul α_0 ; si de plus L_0 est trivial et que tous les k_i sont nuls (ce qui entraîne $g(B) \geq 2$), on peut prendre α_0 non proportionnelle à ω_0 . Alors $\alpha = p^*\alpha_0$ est une section holomorphe de $\Omega^1_X \otimes L$, non proportionnelle à ω si $L = \mathcal{O}_X$, et l'on a $\alpha \wedge \omega = 0$. Cela achève la démonstration de la proposition. ∎

Théorème 2.2.- *Notons* $(p_i : X \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ *la famille des fibrations de* X *sur une courbe de genre* ≥ 1 . *La sous-variété* $S^1(X)$ *de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ *formée des faisceaux inversibles* L *tels que* $H^1(X, L) \neq 0$ *est réunion des sous-groupes* $\mathrm{Pic}^\tau(X, p_i)$ *pour*

$g(B_i) \geq 2$, *des sous-variétés* $\cdot \mathrm{Pic}^\tau(X,p_i) - p_i^* \mathrm{Pic}^0(B_i)$ *pour* $g(B_i) = 1$, *et d'un nombre fini de points isolés.*

Soit L un élément non isolé de $S^1(X)$. En vertu du corollaire 1.9 et du lemme 2.6 de [G-L 1], il existe une 1-forme holomorphe non nulle ω sur X telle que la suite

$$H^0(X, L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega^1_X \otimes L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega^2_X \otimes L^{-1})$$

ne soit pas exacte. La prop. 2.1 implique alors que L^{-1} , et donc aussi L , sont des éléments de $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; de plus L n'appartient pas à $p^* \mathrm{Pic}^0(B)$ si B est de genre 1 .

Inversement, soit $p : X \longrightarrow B$ une fibration, et soit S une composante de $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; la prop. 1.10, a) entraîne $S \subset S^1(X)$, sauf lorsque $g(B) = 1$ et $S = p^* \mathrm{Pic}^0(B)$. ∎

Corollaire 2.3.- *L'intersection* $S^1(X) \cap \mathrm{Pic}^0(X)$ *est réunion des ensembles* $\mathrm{Pic}^0(X,p_i)$ *pour* $g(B_i) \geq 2$, $\mathrm{Pic}^0(X,p_i) - p_i^* \mathrm{Pic}^0(B_i)$ *pour* $g(B_i) = 1$, *et d'un nombre fini de points isolés.* ∎

Remarque 2.4.- Soit $p : X \longrightarrow B$ une fibration. Pour que le groupe $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ soit distinct de $p^* \mathrm{Pic}^0(B)$, il faut et il suffit que le groupe $\Gamma^\tau(p)$ ne soit pas trivial, autrement dit que *deux des multiplicités* m_i *ne soient pas premières entre elles.* Si $g(B) = 1$, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la fibration p fournisse des composantes de $S^1(X)$ non réduites à un point.

§3. Le sous-ensemble $\Sigma^1(X)$ de $H^1(X, \mathbb{C}^*)$

(3.1) Nous supposerons choisi un point o de X , et poserons $\pi_1(X) = \pi_1(X,o)$. Nous allons nous intéresser au groupe $H^1(X, \mathbf{C}^*)$. Ce groupe paramètre les classes d'isomorphisme de chacun des objets suivants :

a) *Les caractères de* $\pi_1(X)$ (c'est-à-dire les homomorphismes de $\pi_1(X)$ dans $\mathbf{C}^*$).

b) *Les faisceaux localement constants de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels de dimension* 1 *sur* X (nous dirons simplement *faisceaux localement constants de rang* 1).

c) *Les couples* (L,∇), *où* L *est un faisceau inversible sur* X *et* $\nabla : L \longrightarrow \Omega^1_X \otimes L$ *une connexion holomorphe sur* X (une telle connexion est toujours de courbure nulle).

(3.2) Notons $\mathbf{S}_1$ le cercle unité dans $\mathbf{C}$. Le sous-groupe $H^1(X, \mathbf{S}_1)$ de $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ correspond aux objets suivants :

a) Les caractères χ qui sont *unitaires* (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{S}_1$);

b) Les faisceaux localement constants $\mathcal{L}$ de rang 1 qui sont *unitaires*, c'est-à-dire qui admettent une forme hermitienne positive non nulle (à valeurs dans le faisceau constant $\mathbf{C}_X$).

c) Les couples (L,∇_u), où ∇_u désigne la connexion (holomorphe) *unitaire* sur L, associée à la métrique hermitienne de courbure nulle sur L (qui est unique à une constante près).

Nous munirons le groupe $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ de sa topologie naturelle. L'homomorphisme $(L,\nabla)\longmapsto L$ fait apparaître ce groupe comme extension du groupe de Lie complexe $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ par l'espace vectoriel $H^0(X,\Omega_X^1)$. En tant qu'extension de groupes de Lie *réels*, cette extension est scindée : on en obtient une section canonique en associant à un fibré L le couple (L,∇_u).

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau localement constant *unitaire* sur X. Une partie de la théorie de Hodge classique s'étend sans changement à la cohomologie de X à coefficients dans $\mathcal{L}$. Nous utiliserons en particulier les faits suivants :

(3.3) Soit $L=\mathcal{L}\otimes_{\mathbf{C}}\mathcal{O}_X$, et soit ∇_u la connexion unitaire sur L. La suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}(X,\mathcal{L})$$

associée au complexe de de Rham de (L,∇_u) dégénère en E_1. En particulier, les homomorphismes $H^q(\nabla_u): H^q(X,\Omega_X^p\otimes L)\longrightarrow H^q(X,\Omega_X^{p+1}\otimes L)$ sont nuls.

(3.4) Choisissons une métrique hermitienne plate sur L, d'où un isomorphisme antilinéaire $L\longrightarrow L^{-1}$. On déduit de cet isomorphisme et de la conjugaison des formes harmoniques un isomorphisme antilinéaire

$$H^q(X,\Omega_X^p\otimes L)\longrightarrow H^p(X,\Omega_X^q\otimes L^{-1}).$$

Soit $\omega\in H^0(X,\Omega_X^1)$, et $\bar\omega$ la classe dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ de la forme conjuguée; le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) & \xrightarrow{\cup\bar\omega} & H^{q+1}(X,\Omega_X^p\otimes L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X,\Omega_X^q\otimes L^{-1}) & \xrightarrow{\wedge\omega} & H^p(X,\Omega_X^{q+1}\otimes L^{-1}) \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 3.5.- *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau localement constant de rang 1 sur X, et soit (L,∇) le fibré à connexion correspondant.*

a) *Supposons $\mathcal{L}$ unitaire* (c'est-à-dire $\nabla=\nabla_u$). *La condition $H^1(X,\mathcal{L})\neq 0$ équivaut alors à $L\in S^1(X)\cup -S^1(X)$.*

b) *Supposons que $\mathcal{L}$ ne soit pas unitaire. La condition $H^1(X,\mathcal{L})\neq 0$ équivaut à :*
(*) *Il existe une fibration $p: X\longrightarrow B$ et une forme non nulle $\omega_0\in H^0(B,\Omega_B^1)$ telles qu'on ait*

- $L\in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ *si* $g(B)\geq 2$, $L\in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)-p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ *si* $g(B)=1$;
- $\nabla=\nabla_u+p^*\omega_0$.

Considérons la suite spectrale (3.3)

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p \otimes L) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(X, \mathscr{L}) .$$

Si $\mathscr{L}$ est unitaire, elle dégénère en E_1 ; on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) \longrightarrow H^1(X, \mathscr{L}) \longrightarrow H^1(X, L) \longrightarrow 0 .$$

Comme les espaces $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$ et $H^1(X, L^{-1})$ sont conjugués (3.4), l'assertion a) en résulte.

Supposons que $\mathscr{L}$ ne soit pas unitaire; posons $\nabla = \nabla_u + \omega$, où ω est une 1-forme holomorphe non nulle sur X . Comme on a $H^q(\nabla_u^p) = 0$, la différentielle d_1 de la suite spectrale n'est autre que le cup-produit avec ω . La suite spectrale fournit alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1(X, \mathscr{L}) \longrightarrow E_2^{01} ,$$

où E_2^{10} est l'homologie du diagramme

$$H^0(X, L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L)$$

et E_2^{01} le noyau de la flèche $H^1(\omega) : H^1(X, L) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X^1 \otimes L)$.

Si le couple (L, ∇) satisfait à $(*)$, l'espace E_2^{10} n'est pas nul (prop. 2.1), et il en est de même de $H^1(X, \mathscr{L})$. Supposons inversement $H^1(X, \mathscr{L}) \neq 0$. Cela entraîne que E_2^{10} ou E_2^{01} n'est pas nul. Dans le premier cas, (L, ∇) satisfait à $(*)$ d'après la prop. 2.1.

Il reste à prouver que (L, ∇) satisfait à $(*)$ lorsque E_2^{01} n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque l'homomorphisme $H^1(\omega)$ n'est pas injectif. Par conjugaison (3.4), cela signifie qu'il existe un élément non nul α de $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1})$ tel que la classe de $\alpha \wedge \bar{\omega}$ dans $H^1(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1})$ soit nulle. Posons $\beta = \alpha \wedge \omega$; on a $\beta \in H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L^{-1})$, et la classe de $\beta \wedge \bar{\beta}$ dans $H^2(X, \Omega_X{}^2)$ est nulle. Si κ est une forme de Kähler sur X , on a donc $\int \beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = 0$. Montrons que cela entraîne $\beta = 0$. Soit x un point de X ; il existe un système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ sur X tel que κ coïncide en x avec la forme $\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$. La forme β s'écrit dans ces coordonnées $\sum b_{ij}\, dz_i \wedge dz_j$, où (b_{ij}) est une matrice antisymétrique formée de sections de L^{-1} . Notons $\| \ \|$ la norme associée à la métrique hermitienne plate sur L^{-1} ; un calcul facile donne (au point x)

$$\beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = c \left(\sum_{i,j} \| b_{ij} \|^2 \right) \kappa^n , \qquad \text{avec } c = \frac{-1}{n(n-1)} ,$$

de sorte que la relation $\int \beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = 0$ entraîne $\beta = 0$.

Ainsi on a $\alpha \wedge \omega = 0$, ce qui conduit à deux possibilités :

- ou bien la suite $H^0(X, L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X{}^2 \otimes L^{-1})$ n'est pas exacte, et le couple (L^{-1}, ω) satisfait à $(*)$; il en est alors de même de (L, ω) .
- ou bien $L = \mathcal{O}_X$, et α est proportionnelle à ω . Dans ce cas la classe de $\omega \wedge \bar{\omega}$ dans $H^1(X, \Omega_X^1)$ est nulle; si κ est une forme de Kähler sur X , cela entraîne $\int \omega \wedge \bar{\omega} \wedge \kappa^{n-1} = 0$.

On voit alors comme ci-dessus que cela implique $\omega = 0$, ce qui est impossible. ■

Corollaire 3.6.- *Le sous-ensemble* $\Sigma^1(X)$ *de* $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ *formé des faisceaux localement constants de rang un* $\mathscr{L}$ *sur* X *tels que* $H^1(X, \mathscr{L}) \neq 0$ *est réunion :*
- d'une famille finie de sous-ensembles de la forme $\alpha \cdot p^* H^1(B, \mathbf{C}^*)$, *où* α *est un élément d'ordre fini de* $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ *et* $p : X \longrightarrow B$ *une fibration sur une courbe de genre* ≥ 1 ;
- d'un nombre fini de faisceaux unitaires. ■

§4. Le sous-ensemble $\Sigma^1(G)$ de $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$

Soit G un groupe de type fini. Nous désignerons par $\hat{G}$ le groupe $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^*)$ des caractères de G, muni de la topologie usuelle. Pour tout caractère χ de G, nous noterons $\mathbf{C}_\chi$ le G-module $\mathbf{C}$ muni de l'action de G définie par χ. Nous allons nous intéresser au sous-ensemble $\Sigma^1(G)$ de $\hat{G}$ formé des caractères χ tels que $H^1(G, \mathbf{C}_\chi) \neq 0$.

Le lemme suivant est certainement bien connu :

Lemme 4.1.- *Soit* G *un groupe commutatif de type fini, et* χ *un caractère non trivial de* G. *On a* $H^i(G, \mathbf{C}_\chi) = 0$ *pour tout* $i \geq 0$.

Notons T le sous-groupe de torsion de G, et L le groupe quotient G/T. On dispose d'une suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(L, H^q(T, \mathbf{C}_\chi)) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(G, \mathbf{C}_\chi).$$

L'espace $H^q(T, \mathbf{C}_\chi)$ est nul sauf si $q = 0$ et $\chi_{|T} = 1$; il suffit donc de prouver le lemme lorsque G est un $\mathbf{Z}$-module libre (de type fini).

Posons $A = \mathbf{C}[G]$; l'espace $H^p(G, \mathbf{C}_\chi)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}_A^p(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_\chi)$. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de G ; l'anneau A s'identifie à l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbf{C}[e_1, e_1^{-1}, \ldots, e_n, e_n^{-1}]$. Une résolution libre du A-module $\mathbf{C}_1$ est fournie par le complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n(A^n) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \bigwedge^2(A^n) \longrightarrow A^n \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{C}$$

associé à la suite régulière $(e_1 - 1, \ldots, e_n - 1)$. Les espaces $\mathrm{Ext}_A^p(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_\chi)$ sont donc les espaces de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{C}^n \xrightarrow{\wedge \varepsilon} \bigwedge^2(\mathbf{C}^n) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \bigwedge^n(\mathbf{C}^n) \longrightarrow 0,$$

avec $\varepsilon = (\chi(e_1) - 1, \ldots, \chi(e_n) - 1)$. Comme χ n'est pas trivial, le vecteur ε n'est pas nul, et le complexe ci-dessus est exact, ce qui démontre le lemme. ■

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com