Selected Papers of Richard von Mises

VOLUME ONE
Geometry, Mechanics, Analysis

Selected and Edited by

Ph. Frank, S. Goldstein, M. Kac, W. Prager, G. Szegö
and G. Birkhoff, *Chairman*

1963
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
PROVIDENCE, RHODE ISLAND

Library of Congress Catalog Number 63-18572

Printed in the U.S.A.

PREFACE

The publication by the American Mathematical Society of selected papers by Richard von Mises is a welcome event, made possible by the generosity of his many admirers, students, and friends.

A truly universal spirit, von Mises carried on research in a wide range of subjects, from engineering applications and statistical problems to the foundations of theoretical mechanics and probability and the philosophy of science.

We have tried to select von Mises' most characteristic papers, and those with the most lasting influence. Included also is some older work which is not otherwise readily accessible. In selecting about 1,200 pages out of a work twice this size (not counting books), important papers had to be omitted. It is hoped, however, that we are presenting a cross-section which is characteristic of the scientific personality of von Mises and which offers to the research worker a majority of his basic papers. The selection is supplemented by a comprehensive bibliography.

We felt we had to include at least one paper of a different type: an essay concerning the poet, Rainer Maria Rilke. Much of von Mises' interest and love belonged to literature; he assembled a world-famous Rilke collection now at Harvard's Houghton Library, and he is a recognized authority on this poet.

Our selection contains five of von Mises' unpublished manuscripts; in the Table of Contents, they are designated by a star. Copies of other unpublished manuscripts can be found in the Harvard Archives.

G. Birkhoff
Ph. Frank
S. Goldstein
M. Kac
W. Prager
G. Szegö

RICHARD VON MISES

1883—1953

Richard Martin Edler von Mises was born on 19th. April, 1883, in Lemberg, in the Austro-Hungarian Monarchy, and died of cancer on 14th. July, 1953, in Boston, Massachusetts.

His father, Arthur Edler von Mises, who had graduated as a doctor of technical sciences at the Federal Technical University (E.T.H.) in Zürich, was a railroad engineer and a civil servant with the state railroad system. The family home was in Vienna, but from time to time, when the father's position demanded his presence elsewhere, the family moved temporarily, and Richard was born during one of these temporary absences from Vienna.

The title of nobility had been bestowed on Richard's great-grandfather. On his father's side Richard came from a family whose male members had been professional engineers, doctors of medicine, bankers, and civil servants. His mother's name was Adele, née Landau, and the members of his mother's family were philological scholars and bibliophiles. Both parents were Jewish. Richard himself was converted to Catholicism while still a young man. His father died in 1903; his mother remained in Vienna until her death in 1937.

Richard was the second of three brothers. The eldest, Ludwig, became an economist of international reputation; he was Professor of Economics in Vienna and eventually Professor at New York University. The youngest died while still a boy.

In Vienna, after primary school, Richard studied at the Akademische Gymnasium, where he received a classical and humanistic education. In 1901 he graduated with distinction in Latin and Mathematics. He was then a serious student, an avid reader, particularly of poetry and philosophy, but he found time also for tennis, skating, and dancing.

Shortly thereafter he became a student of Mechanical Engineering (Maschinenbau) at the Vienna Technical University, and it was while still a student that he wrote his first mathematical paper (on geometry; Publication No. 1 of the bibliography). All his life he retained his liking for the methods of "pure" geometry. Immediately after his graduation as an engineer (zweite Staatsprüfung) he went at the beginning of 1906 to the German Technical University at Brünn as assistant to the newly appointed Professor of Mechanics, Georg Hamel. There he completed his doctoral dissertation (Publication No. 2 of the bibliography), and, though in relatively affluent circumstances, worked part-time as a factory worker. In 1908 he was awarded his doctorate of technical sciences at Vienna, and became a Lecturer (Privatdozent) in Mechanics at Brünn. Publication No. 7 — the important Theorie der Wasserräder — is his inaugural dissertation (Habilitationsschrift) at Brünn. But very shortly thereafter — in 1909 — Mises was called to Strassburg as "ausserordentlicher Professor" of Applied Mathematics.

Mises became distinguished in several fields and his name is honored in several circles which often have otherwise little else in common. He was distinguished as an engineer, mathematician, philosopher, and authority on the poet Rainer Maria Rilke. In Mises all these activities were unified by his own intellectual strivings, his sensitive perception, and by his method of approach. Certainly he was preeminent as an applied mathematician. Many of the qualities which made him preeminent were present in his Brünn inaugural dissertation. To Mises, whether the researches were on mechanics or probability, the rules were the same and should be obeyed strictly. There could be no satisfaction with *ad hoc* researches, with rules of thumb, or even with qualitative physical explanations incapable of exact quantitative analysis. There should be a mathematical model of the widest possible generality, where the argument could be made with clarity, elegance, and rigor. The greatest of these would be clarity; no muddle-headedness, no ambiguity should be tolerated. On the other hand, there should be a clear and continuous (or almost continuous) connection between the model and its mathematical development and the direct results of observation. Moreover, it seems as though Mises demanded that such a connection should be clear enough to be apparent not only to him, but also to all good students. In the Brünn inaugural dissertation, and in many of Mises's early works on mechanics, a glance at the date of publication will show us how much Mises's ability to carry out the first part of the "rules" mentioned above contributed to the advances in the subjects treated. Both parts, and particularly the second part, of this set of rules came to the fore in his pioneer work on the foundations of the theory of probability, with his introduction of the concept of a collective, basing probability on the notion of relative frequency and randomness (Publication No. 40).

In Strassburg, Mises was then for the first time formally called an applied mathematician.

It was there that he made the first of the decisive advances in plasticity associated with his name (Publication No. 19). The mechanics of plastically deformable bodies had, in fact, interested him already in Brünn, and he returned to the subject from time to time during the rest of his life (Publication Nos. 58, 63, 130 — the first two while he was in Berlin and the third when he was in the U.S.A.).

From the Strassburg days dates also the deepening of his preoccupation with Rilke and with the Catholic religion.

In those days Mises was an elegant, rich, intellectual young gentleman. Once or twice every year he went home to Vienna. All his life he stayed close to his mother; he wrote to her regularly and she kept his letters, and when, at the time of her death in 1937 he rushed to Vienna (from Istanbul) he found all his letters intact, and kept them with her letters to him. He stayed in Strassburg until the beginning of the first World War, when he returned to Austria as a volunteer in the Austro-Hungarian army.

In the war of 1914—1918, Mises was an officer in the newly-formed Flying Corps of the Austro-Hungarian army. He saw field service as Adjutant to the commander of the air force, General Uzelacz. (He already had a pilot's license.) He was later withdrawn to act as technical adviser and organizer; was instructor at the Fliegerarsenal in Aspern; and was also given the tasks of designing and supervising the construction and testing of the first large airplane of the Austro-Hungarian Monarchy. (See Publication No. 95.) Finally, in 1918, his request to return to field duty was granted.

Mises's first book — the "Technische Hydromechanik" — had been written in Strassburg before the war. The second — the "Fluglehre", of which the sixth edition appeared in 1958 — had its origin from his time as an instructor to the Austro-Hungarian Flying Corps. The blend of the practical and the theoretical is well illustrated by the fact that the design, and construction of the large airplane and the preparation of the first of the two celebrated papers on airfoil theory (Publications Nos. 30 and 42) were taking place about the same time.

In 1918 Mises returned to Strassburg, but Strassburg was now French. Mises had lost his position, and, incidentally, many of his possessions. He walked (literally) back into Germany over the Rhine, and as a Strassburg professor was appointed a Lecturer (Dozent) in Mathematics at the University of Frankfurt. But in 1919 he was called to the Technical University in Dresden as full (ordentlicher) Professor of Mechanics, and the very next year to the University of Berlin as Professor and Director of the Institute of Applied Mathematics. In 1919 also appeared in print the two great works on Probability (37, 40) from which many (by no means all) of Mises's works on the subject proceed.

The fruitful years in Berlin now began. In 1921 Mises founded the Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, which he edited until 1933, and through which he exerted a profound and beneficent influence on Applied Mathematics in general, in central Europe in particular. (He did practically all the refereeing of papers himself.) In the first number he explained his conception of Applied Mathematics (Publication No. 47). "Frank-Mises" (Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik and Physik) began to appear in 1925. Mises was actively engaged with mechanics, probability, and philosophy. The first edition of Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit (Publication No. 64), in which his ideas were presented to a wider public, was published in 1928. The Rilke collection, which later grew into the greatest privately-owned Rilke collection in the world, was seriously begun. As a "hobby", he made a beautiful job of his own bookbinding.

In Berlin, Mises met Hilda Geiringer (also from Vienna). She was his student and became his assistant and his collaborator, and later his wife.

The first of a planned series of "Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik" appeared in 1931. It was perhaps typical that it was on "Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Publication No. 75). The second volume, only partially written, was never published; it was to have been on Numerical Analysis. Unfortunately, no further volumes were prepared.

In 1933 it was already clear to Mises that it would be unwise and undignified for him to continue in Berlin, and he accepted an invitation to be Professor of Mathematics and Director of the mathematical institute in Istanbul, Turkey, at the University newly revitalized by Kemal Attatürk. Here he learned Turkish, continued with his mathematical, scientific, philosophical, and literary interests, formed new friendships, and became happy in the relaxed and leisurely atmosphere of Istanbul. Noteworthy is the publication of the first papers on statistical functions (Nos. 89 and 93 of the bibliography). A book on Rilke, "Bücher, Theater, Kunst", was published at the beginning of this time. During the time at Istanbul he wrote his essay on Ernst Mach (Publication No. 103), whose thought, outlook, and personality had influenced him, and were in many ways close to his own. During this period he also composed one of his major works — his book on Positivism, which was published in Holland in 1939.

Every vacation Mises hastened to Vienna from Istanbul, just as he had done earlier from Strassburg and Berlin. In Vienna, every afternoon a group of men and women, which in Mises's younger days included the poet P. Altenberg, the architect A. Loos, and other writers and artists, met at the "Kaffeehaus". Later the group, meeting in the famous "Kaffee

Central", was practically the philosophical group known as the "Wiener Kreis", including, among the men, Ph. Frank, H. Hahn, E. Helly, H. Löwy, O. Neurath, J. Ratzersdorfer and M. Schlick.

In 1939, with the approach of the second world war, Mises left Istanbul, and at the invitation of Westergaard joined as Lecturer what is now the Division of Engineering and Applied Physics at Harvard University. He then became in rapid succession Associate Professor and Gordon McKay Professor of Aerodynamics and Applied Mathematics. Here he continued to work on mathematics, probability, and fluid mechanics; in the U.S.A., in contradistinction to the time in Turkey, he found it more congenial to teach mechanics than probability, though, as always, all his interests were pursued and found expression. The culmination of his work on topics related to statistical functions did not appear until 1947 (Publication No. 126). An English edition of the book on Positivism was published in 1951. The study of Rilke and the Rilke collection were vigorously pursued; Mises was a recognized authority on Rilke, especially on the youth of Rilke, and he sometimes would recite Rilke's poems for hours.

In 1951-1952, not long before his death, on leave of absence from Harvard, he went to Rome to lecture on statistics; in Rome he was disappointed on being asked to lecture in French, which he knew and spoke well, and at being deprived of the opportunity to lecture in Italian.

To some there were complexities and contradictions in Mises's thought and life. He was a Jew, a Catholic, a scientific humanist, a logical positivist. Certainly he moved from an ardent striving for belief in his youth to a veneration for intellectual clarity in all things, just as his favorite among Rilke's works changed from the Stundenbuch to the Neue Gedichte. But for him positivism had no relation to pessimism, to distrust of self, of emotion or of instinct, or to skepticism. In his last years in the U.S.A. philosophical questions concerned him greatly; it may well be that a completion of the synthesis of his humanism and his positivism was interrupted by his death. Seeming proud and haughty to many, Mises had a talent for friendship, and wherever he went made, and kept, many friends; he was to many a delightful social companion; he was a marvellously excellent teacher, and was unusually helpful and kind to all who really came in contact with him. He was truly aristocratic, and always took pains to preserve his dignity and his integrity; otherwise, he went his own way, and much of what seemed to some contradictory in his beliefs and actions arose from their expectation of a kind of conformity and even of a kind of stereotyped behaviour associated with brief descriptive labels. Mises was fundamentally no conformist, and "labelling" is completely impossible.

References and Acknowledgements. Descriptive material on Mises's life

was written by Alfred Basch (Österreichisches Ingenieur-Archiv, Vol. VII, No. 2 (1953) pp. 73—76). An introduction to *"Studies in Mathematics and Mechanics", presented to Richard von Mises by Friends, Colleagues and Pupils.* Academic Press Inc., 1954, New York, N. Y. was written by Philipp Frank. A discussion of Mises's work in Probability and Statistics, by Harald Cramér, appeared in the Annals of Mathematical Statistics, Vol. 24, No. 4 (1953) pp. 657—662.

Above all, I am greatly indebted to Hilda Geiringer von Mises for the tireless way in which she provided full answers to a vast number of questions.

SYDNEY GOLDSTEIN

ÜBERSICHT DER ABHANDLUNGEN

VON

R. v. MISES

I. Geometrie (Statik, Vektortheorie, geom. Optik)

1, 3, 26, 34, 38, 55, 55a, 57, 91, 101, 107, A(1)

Die während des zweiten Jahres meines Hochschulstudiums (1902—1903) entstandene Arbeit [**1**] geht von einer klassischen Fragestellung des 17. Jahrhunderts aus: Für eine geometrisch definierte Kurve die Tangente und die Krümmungsmittelpunkte jeder Ordnung, direkt, ohne Benutzung einer Koordinatendarstellung, zu konstruieren. Die Entstehung der systematischen Differentialrechnung und das vorwiegend analytische Interesse der späteren Mathematiker-Generationen hat die rein geometrische Seite der Frage fast in Vergessenheit geraten lassen. Hier wird mittelst der Einführung eines neuen, sehr umfassenden Begriffes, der Fluxion oder Charakteristik eines nach Lage und Gestalt veränderlichen geometrischen Elements, eine vollständige, allgemeine Lösung des Problems gegeben und an vielen Beispielen, die auch zu neuen differentialgeometrischen Sätzen führen, erörtert (2).

Einem verwandten Gedankenkreis entstammt die von M. d'Ocagne der Pariser Akademie vorgelegte Note [**107**, 1938]. Hier wird gezeigt, wie sich für eine differenzierbare Raumkurve das infinitesimale Element erster Ordnung durch eine Folge von Krümmungsachsen und Krümmungszentren rein geometrisch bestimmen lässt.

Die kurze Abhandlung [**38**, 1920] behandelt — in Berichtigung der unvollständigen Fassung in [**34**] — eine Aufgabe, die den Problemen der herkömmlichen Variationsrechnung zur Seite steht: Unter gewissen Nebenbedingungen die Kurve zu finden, für die das Minimum des Krümmungsradius möglichst gross ist. Die allgemeinste Lösung besteht aus geraden Stücken und Kreisbögen mit einem konstanten $\rho_{\min}$.

(1) This (unfinished) manuscript is published here for the first time. The boldfaced numbers refer to the bibliography at the end of Vol. II.

(2) Gleich nach Erscheinen dieser Arbeit regte M. d'Ocagne an, eine französische Übersetzung in der Sammlung „Scientia" erscheinen zu lassen. Ich ergänzte den Text durch Zusätze, die die Hauptergebnisse auf den Fall von Raumkurven erweiterten. Eine Übertragung wurde von G. du Pasquier vorgenommen und das französische Manuskript an d'Ocagne gesandt. Es scheint aber verloren gegangen zu sein. Auch das erweiterte deutsche Manuskript ist nicht mehr vorhanden.

Für eine bekannte Aufgabe der Statik: Die Maximalmomente zu finden, die von einem bewegten Lastenzug an einem Balken hervorgerufen werden, wird in [**3**] eine einfache konstruktive Lösung angegeben, die dann in einschlägige Lehrbücher (z.B. F. Schur, *Vorlesungen über Graphische Statik*, Leipzig 1915) aufgenommen wurde.

Die Abhandlung [**26**, 1914] entwickelt aufgrund einer Abbildung der räumlichen Kräftesysteme (Dynamen) auf Paare von Stäben in der Ebene eine vollständige Methode zur rein zeichnerischen Lösung aller Probleme der Raumstatik. Das Verfahren, das im Falle der an *einem* Punkt angreifenden Kräfte (also vor allem für die Fachwerkprobleme) mit einem früher von B. Mayor angegebenen zusammenfällt, ist später von verschiedenen Autoren in mehrfacher Richtung ergänzt und auf die analogen Fragen der Kinematik übertragen worden (E. Kruppa, W. Prager, u.a.).

In der umfassenden Abhandlung [**55**, 1924] wird im Anschluss an den von E. Study geschaffenen geometrischen Begriff des ,,Motors'' (= Dyname, Schraube) ein neuer ,,Motorkalkül'' entwickelt, der der dreidimensionalen Vektor- und Tensorrechnung zur Seite tritt. Die neuen Definitionen der Motorprodukte und des Motortensors gestatten, alle Aufgaben der räumlichen Statik, Kinematik und Dynamik in einer Form zu behandeln, bei der keinerlei Koordinatensystem, auch nicht der Anfangspunkt eines solchen (Bezugspunkt der Momente), Verwendung findet. Der neue Kalkül erweist sich auch als fruchtbar in der Anwendung auf bestimmte Fragen der Elastizitätstheorie (allgemeine Stabwerke) und der Hydrodynamik (starre Körper in Flüssigkeiten). Ausser den in [**55**] ausführlich besprochenen Beispielen geben die Noten [**57**] und [**91**] Beispiele spezieller Anwendungen. Der Delfter Kongressbericht [**55a**] enthält eine kurze Inhaltsangabe und mehrere Diskussionsbemerkungen zu diesem Thema. Die hauptsächlichsten Resultate sind in einzelne Lehrbücher aufgenommen und von einigen russischen Autoren ergänzt worden.

Die von J. Hadamard der Pariser Akademie vorgelegte Note [**101**, 1937] weist nach, dass der Mandelbrojt'sche Satz über die Singularitäten analytischer Funktionen einen einfachen differentialgeometrischen Tatbestand zum Ausdruck bringt, der unabhängig von jeder funktionentheoretischen Überlegung erklärt werden kann.

In der noch unveröffentlichten Abhandlung von 1937([3]) wird das infinitesimale Element zweiter Ordnung einer Normalenkongruenz (d.i. das Element dritter Ordnung einer krummen Fläche) untersucht. Rein geometrische Charakterisierungen dieses Elementes werden in verschiedener Form gegeben. Besondere Aufmerksamkeit ist dem Fall zusammenfallender

([3]) Designated by an asterisk in the table of contents of the Selected Papers and published there, partially, for the first time.

Brennpunkte (anastigmatischer Punkt) gewidmet, wobei ein bestimmter Kegelschnitt und eine spezielle Kurve vierter Ordnung vom Geschlecht null (das affine Bild einer Steiner'schen Hypocycloide) ins Spiel kommen. Auch die Ausartung im Falle eines Brennpunktes im Unendlichen findet besondere Untersuchung. Schliesslich werden die Formeln dritter Ordnung für eine optische Abbildung in allgemeiner und übersichtlicher Form entwickelt, wobei eine Modifikation der üblichen Ausgangsgleichung der Optik sich nützlich erweist.

II. **Dynamik**

2, 8, 11, 16, Kl. Mit.[4] **3**

In der Doktor-Dissertation [**2**, 1906] wird für das Problem der Schwungradberechnung einer Kolbenmaschine eine strenge, von den üblichen Vernachlässigungen freie, Lösung aufgrund der Lagrange'schen Gleichungen der Dynamik gegeben. Einige damit zusammenhängende Fragen, wie die der sog. Minimal-Umlaufzahl einer Pumpe werden erörtert. Angeregt wurde die Arbeit durch die Veröffentlichung einer unvollständigen Lösung durch Wittenbauer im Jahre 1905.

In der Theorie des Regulators (des sog. Watt'schen Pendels) wurde stets angenommen, dass ein bestimmtes Mass von Dämpfung, d.h. einer der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandskraft, die Stabilität des Systems sicherstellt. Meine Abhandlung [**8**, 1908] leitet ein Stabilitätskriterium ab unter der der Wirklichkeit entsprechenden Annahme eines konstanten (aber die Richtung wechselnden) Stellwiderstandes vom Typus der Reibung starrer Körper. Die Untersuchung führt auf eine mathematisch interessante Frage betreffend einen unendlichen Schwingungsvorgang, der von einer Differentialgleichung dritter Ordnung mit sprunghaft sich ändernden Integrationskonstanten beherrscht wird. Die Lösung wird bis zu praktisch verwertbaren numerischen Werten durchgeführt. Sie ist in die zweite Auflage des Lehrbuchs von Tolle über Regelung der Kraftmaschinen aufgenommen.

Felix Klein hatte im Winter 1908—1909 eine Diskussion der von Paul Painlevé herrührenden Kritik der Coulomb'schen Reibungsgesetze eingeleitet. Der in meiner Note [**11**] zum Ausdruck gebrachte Standpunkt ist der: Es gibt Fälle in der Mechanik starrer Körper, in denen die Annahme eines konstanten Reibungskoeffizienten zu Widersprüchen führt; jede Schwierigkeit wird beseitigt, wenn man annimmt, dass der Koeffizient bei unbeschränkt wachsendem Normaldruck gegen null geht. Die von Painlevé vorgeschlagene Modifikation der Reibungsgesetze schiesst weit übers Ziel hinaus, die von Prandtl beigetragene Bemerkung, dass die betreffenden

(4) This abbreviation stands for "Kleine Mitteilungen".

Vorgänge sich durch Heranziehung der Elastizitätstheorie erklären lassen, geht an der eigentlichen Fragestellung vorbei ([5]).

Der ausführliche, mehr als 200 Seiten umfassende Bericht [**16**] für den Mechanik-Band der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (geschrieben 1909—1911) behandelt eine grosse Zahl von Einzelproblemen der Maschinenlehre, die hier zum ersten Mal von einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammengefasst erscheinen. Hierbei war es notwendig, fast in jedem einzelnen Problem über das bisher Bekannte hinausgehende allgemeine Ansätze zu formulieren. Dies gilt z.B.für das Regulatorproblem (Abschn. [14—18]), für die Theorie des Schiffskreisels (Abschn. [25]), für die Schwingungen der Luftfahrzeuge (Abschn. [26]) und vieles andere. Zu dem Problem der Lagerreibung (Abschn. [19]) liefert die spätere Note [kl. Mit. **3**] von 1921 eine Ergänzung.

III. Elastizität und Festigkeit

12, 23, 66, 19, 58, 63, 71, 54, 59, 60, Kl. Mit. **7, 99, 106, 41**

Schon während meiner Studienzeit beschäftigte mich lebhaft das Problem der Knickung und der Streit um die verschiedenen ,,Knickformeln" von Euler, Tetmajr, Schwarz-Rankine usf. Ich gelangte zu der damals nicht trivialen Erkenntnis, dass die Festigkeitslehre zwei ganz verschiedene Fragen zu behandeln hat: die Bestimmung von Maximalspannungen im Gleichgewicht unter gegebenen Belastungen und andrerseits die Entscheidung darüber, ob ein Gleichgewichtszustand stabil ist. (Später veranlasste ich, dass der Art. IV Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, der mir als Manuskript in ganz anderer Fassung vorlag, in diesem Sinne eingeteilt wurde ([6]).

Als erstes Ergebnis aus diesem Gedankenkreis entstand die 1911 erschienene Arbeit [12] über die Stabilität rotierender Wellen. Sie verdankt ihre Entstehung hauptsächlich der von mir gemachten Bemerkung von dem unmittelbaren Zusammenhang der Integralgleichungstheorie mit den Problemen der Statik: die sog. Einfluss-Funktion der Statiker ist der Kern einer Integralgleichung, eine Green'sche Funktion, das Gleichgewichtsproblem wird durch eine Gleichung erster Art gelöst und die Lösung der Stabilitätsfrage führt auf das Eigenwertproblem der Integralgleichung. Diese Bemerkung, die wohl um dieselbe Zeit auch an anderen Stellen auftauchte, erwies sich später als sehr fruchtbar. Unter anderm bestimmte sie fast das ganze wissenschaftliche Werk meines damaligen Schülers Erich

---

([5]) Weitere Ausführungen hierzu enthält die Dissertation von J. Wellstein.
([6]) Probably IV, Art. **27** (editor).

Trefftz. Die Arbeit selbst, in wenigen Tagen niedergeschrieben, enthält viele Flüchtigkeitsfehler.

Ein Problem, an dem ich mich seit 1905 immer wieder versuchte, fand seine endgültige Lösung in der 1913 entstandenen Abhandlung [**23**] über die Stabilität des durch äusseren Druck belasteten Kreiszylinders. Für den Ansatz eines solchen zweidimensionalen Stabilitätsproblems gab es Vorbilder (R. Lorenz, R. V. Southwell), aber niemals war die Durchrechnung gelungen, die in der Tat zu einem überraschenden Resultat führte: Die Kurve, die den kritischen Druck als Funktion der relativen Rohrstärke darstellt, besteht aus einem Polygonalzug, dessen Ecken einen Häufungspunkt im Nullpunkt haben. Die theoretischen Ergebnisse stimmten, namentlich in Hinsicht auf die Wellenzahl der deformierten Kreislinie mit den bis dahin bekannten Beobachtungen überein. Während des Weltkrieges wurden von der deutschen Kriegsmarine in Kiel in grossem Masstabe Versuche unter etwas veränderten Voraussetzungen ausgeführt: die Rohre waren an den Enden verschlossen, standen also auch unter achsialem Druck. In einem Gutachten, das ich 1917 ausarbeitete und das in seinem vollen Umfang nicht veröffentlicht wurde, erweiterte ich meine Lösung für diesen Fall und behandelte einige weitere Fragen, wie den Einfluss einer Exzentrizität der Belastung (infolge des Anwachsens des hydrostatischen Druckes mit der Tiefe), die Bedeutung von Versteifungsringen usf. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch war in manchen Punkten eine vollkommene. Die erweiterte Formel für allseits belastete Rohre ist von mir erst 1929 in [**66**] veröffentlicht worden. Eine englische Übersetzung der ursprünglichen Arbeit [**23**] wurde durch die amerikanischen Marinebehörden 1931 veranlasst und veröffentlicht (7). Auch ein Exemplar des Gutachtens hat — meiner Erinnerung nach — die amerikanische Marine erhalten.

Zurück in die Brünner Zeit (1906—1909) reicht die Beschäftigung mit den Grundgleichungen der Mechanik plastisch deformabler Körper. Äusserlich veranlasst durch das Erscheinen des etwas phantastischen Ansatzes von Haar und v. Kármán suchte ich [**19**, 1913] ein Gleichungssystem aufzustellen, das, in dem von der klassischen Mechanik gelieferten Rahmen, durch geläufige Erfahrungstatsachen bestimmt wird. Später fand sich, dass M. Lévy in einer unbeachtet gebliebenen Arbeit von 1871 einen ähnlichen Ansatz, mit anderer Begründung und ohne den entscheidenden Zusatz der „Plastizitätsbedingung" gegeben hatte. Meine Plastizitätsbedingung erwies sich später als mit den Beobachtungen in bester Übereinstimmung und sie findet noch heute vielfache Verwendung. Als 1923 Hencky die schöne differentialgeometrischen Eigenschaften der Spannungslinien im zweidimensionalen Fall der plastischen Deformation gefunden

(7) See bibliography.

hatte, konnte ich die Theorie für diesen Fall viel weiter führen. In [**58**, (1925)] ist zum erstenmal die Differentialgleichung der Stromlinien der ebenen Deformation des plastischen Körpers, sowie eine Reihe von Beispielen und allgemeinen Sätzen gegeben ([8]). In diesen beiden Arbeiten handelte es sich ausschliesslich um den isotropen plastischen Körper. Inzwischen waren verschiedenartige Versuche über das Fliessen von Einkristallen vorgenommen worden und dies gab den Anlass zu der grösseren theoretischen Untersuchung [**63**], die 1928 erschien. Hier werden die allgemeinsten Formen der Plastizitätsbedingung erörtert, die den Invarianzbedingungen der verschiedenen Kristallsysteme entsprechen. Es heben sich besonders zwei Typen ab, die der Mohr'schen Theorie entsprechende Schubspannungsbedingung und die Verallgemeinerung meines Ansatzes für den isotropen Fall. Das Hauptresultat der Arbeit bildet die Einführung des Begriffes „Fliesspotential", der einen Zusammenhang zwischen der Fliessbedingung und den Deformationsgesetzen herstellt. Wert lege ich auch auf die Aufklärung des von den Experimentatoren viel gebrauchten, aber nie hinreichend definierten Begriffes der „inneren Gleitung". Die Ergebnisse dieser Arbeit sind später im Zusammenhang mit experimentellen Untersuchungen oft benutzt worden, scheinen mir aber noch nicht hinreichend ausgeschöpft worden zu sein.

Als ich aufgefordert wurde, auf dem Internationalen Mechanik Kongress in Stockholm 1930 einen allgemeinen Vortrag zu halten, wählte ich das Thema [**71**], das meinem Interesse an einer Weiterbildung der theoretischen Mechanik in Richtung einer Anwendung auf die mannigfaltige Stoffwelt unserer Umgebung entsprang. Neben einem Referat über die bisher behandelten Ansätze gab ich Andeutungen, in welcher Weise für die Untersuchung der in der Materialkunde auftretenden Probleme eine rationelle Grundlage geschaffen werden könne, — an Stelle der vielfach primitiven, unzusammenhängenden, zumteil einander widersprechenden Begriffsbildungen, die von Praktikern dauernd neu eingeführt werden. Aber auch der Theoretiker sollte sich mit der Frage beschäftigen, ob denn die Newton'sche Mechanik, ergänzt durch den Cauchy'schen Spannungsbegriff, auf die Dauer nichts anderes hervorbringen könne als den ideal elastischen Körper, die reibungslose und die zähe Flüssigkeit, eventuell noch ein vollendet plastisches Medium.

Das Interesse an den Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie

---

([8]) Weitere Ausführungen hierzu enthält die Dissertation von W. Jenne (auch für den dreidimensionalen Fall), dann die Arbeit von H. Geiringer (veröffentlicht in dem Stockholmer Kongressbericht) endlich die Dissertation von R. Lohan.

Vgl. a. die Arbeit von C. W. Oseen, Ark. f. Mat. Astron. sch. Fysik, Bd. 24A (1933).

hielt die Zeit hindurch unvermindert an. Es führte im Jahre 1923 zur Entdeckung der Stabilitätsgrenzen innerhalb der klassischen Theorie der Fachwerke — erstaunlich genug, dass diese nicht schon längst bekannt waren, bei der grossen praktischen Bedeutung, die vielen Einzelfällen zukommt. Die Abhandlung [**54**], die im wesentlichen den Inhalt eines im September 1923 auf der Marburger Tagung gehaltenen Vortrags wiedergibt, enthält neben der Theorie der ,,reinen'' Fachwerkknickung und der reinen ,,Rahmenknickung'' einen weit umfassenderen Ansatz, der alle Arten von Verbindungen ursprünglich gerader, elastischer Stäbe in sich schliesst. Diese Theorie ist allerdings nur für den Fall zweier Dimensionen durchgeführt (9). Nähere Ausführungen sowohl zum speziellen Problem der Fachwerke wie zu dem allgemeineren beliebigen Stabverbindungen enthalten die beiden Veröffentlichungen [**59**] und [**60**], deren endgültige Redaktion nach einem von mir verfassten Entwurf J. Ratzersdorfer übernahm. In [**54**] wurden aber auch — in einer gewissen programmatischen Form — mehrere grundsätzliche Fragen der Stabilitätstheorie beührt, die mir sehr wesentlich erschienen und noch so erscheinen, wie die Frage des Kirchhoff'schen Eindeutigkeitssatzes und die der definitiven Charakterisierung der verschiedenen Belastungsfälle als labil und stabil usf. Die in Aussicht genommene detaillierte Ausarbeitung dieser Fragestellungen ist nicht mehr zustande gekommen, hauptsächlich wohl infolge zunehmender Ablenkung durch die Beschäftigung mit anderen Dingen. Einiges ist in dem schönen Buch von J. Ratzersdorfer mitgeteilt (10).

Die kleine Mitteilung [**7**, 1924] von vorwiegend didaktischem Charakter gibt in kurzer Ableitung eine handliche Formel zur Berechnung der Ausbiegung eines Stabes nach Überschreiten der Knicklast. Näheres dazu ist im zehnten Kapitel von Frank-Mises gesagt (11).

Zwei Gelegenheitsveröffentlichungen aus späterer Zeit, die eine ein Beitrag zu einer Erinnerungsschrift für meinen Freund und früheren Schüler Erich Trefftz, die andere zu einem Festband für S. Timoshenko, fallen in das Gebiet der Elastizitätstheorie. In [**99**] wird der Verlauf der Hauptspannungswerte in der Umgebung eines singulären Punktes erster Ordnung im ebenen Spannungsfeld untersucht. Die Resultate sind ein Nebenprodukt des Beitrags zur geometrischen Optik, [**A**], der am Schluss von Abschn. **I** besprochen wurde. In [**106**] handelt es sich um den analogen Fall der Singularität zweiter Ordnung, wobei der Charakter der Spannungs-

(9) Eine Ausdehnung auf dreidimensionale Probleme enthält die Dissertation von Wenzl.

(10) J. Ratzersdorfer, *Die Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken*, Wien, Springer 1936. (editor).

(11) Diesem Gedankenkreis gehört auch der als kleine Mitteilung aus meinem Institut veröffentlichte Aufsatz von Malkin an.

trajektorien den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildet. Diese stellt eine Anwendung der später zu erwähnenden, geometrisch gerichteten Studie [**108**] über die Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung dar.

Der Vollständigkeit halber ist in diesem Abschnitt anzuführen die im Umdruckverfahren hergestellte Veröffentlichung [**41**] meiner an der Dresdner Technischen Hochschule 1919 gehaltenen Vorlesungen über Festigkeitslehre. Die Ausarbeitung stammt von meinem damaligen Assistenten J. Ratzersdorfer.

IV. Hydromechanik
4, 5, 6, 7, 10, 72

Meine Beschäftigung mit dem Gegenstand der Hydromechanik begann 1904, bald nach Beendigung meiner ersten geometrischen Arbeit [**1**]. Meine Ausgangspunkte waren: der äusserst niedrige Stand der damaligen Vorlesungen über Hydraulik, das Problem (das mich damals allein interessierte) der Auffindung der Stromwege in rotierenden Turbinen, die tatsächliche Unzulänglichkeit der bestehenden hydrodynamischen Theorie zur Lösung dieses Problems, endlich eine gewisse Zurückhaltung gegenüber den als Allheilmittel angekündigten Göttinger Theorien. Ich sah, dass die Prandtl'sche Grenzschicht (die man erst viel später anfing, die leminare Grenzschicht zu nennen) nichts mit Turbulenz zu tun habe und dass man die Erscheinung der sog. Ablösung im Sinne der Theorie idealer Flüssigkeiten als eine Helmholtz'sche Unstetigkeitsfläche erklären könne. Andrerseits erschien es unmöglich, irgend etwas mit der Theorie anzufangen, ohne eine entscheidende Hypothese einzuführen. Ich fand eine solche in der Annahme, dass die Grundströmung einer turbulenten Bewegung in gewissem Umfang den Gesetzen der idealen Flüssigkeit folge. Die Habilitationsschrift [**7**, 1908—1909] ist der Durchführung dieses Gedankens für das oben genannte Problem der Strömung in Turbinen gewidmet. Von Nebenresultaten seien genannt: Eine korrekte Darstellung der verschiedenen Arten rotationssymmetrischer Strömung (vgl. a. [**10**]) und Aufklärung der Lorenz'schen Theorie der Kreiselräder (vgl. a. [**4**, **5** und **6**]), eine vollständige und genaue Fassung der Integralsätze über Druck und Arbeitsleistung des Wassers (Impuls- und Energiesätze) — beide später aufgenommen in den Zusätzen zu Lamb's Hydrodynamik [**72**] — endlich Aufstellungen über die Fassung des allgemeinen Randwertproblems der idealen Flüssigkeit.

Übersicht der Abhandlungen

I. Geometrie, Statik, Vektoren, Geometrische Optik: 1; 3; 26; 34; 38; 55; 57; 91; 101; 107; B.