ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
ERSTER BAND
1

KNOTENTHEORIE

VON

K. REIDEMEISTER

MIT 114 FIGUREN

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
231 WEST 29TH STREET, NEW YORK 1, N. Y.
1948

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

Vorwort des Herausgebers.

Der Berichterstattung über wissenschaftliche Literatur fallen zwei verschieden geartete Aufgaben zu: einesteils hat sie mit möglichster Vollständigkeit und Raschheit über die jeweils erscheinende Zeitschriftenliteratur zu orientieren, andererseits muß versucht werden, auch von Zeit zu Zeit ein Fazit aus dem nun wirklich Erreichten zu ziehen. Während in allen Wissenschaften seit langem klar ist, wie die erste Aufgabe im Prinzip zu bewältigen ist, sind die prinzipiell verschiedensten Versuche gemacht worden, auch das zweite Problem zu lösen.

Nach einer nun etwa 30jährigen Erfahrung steht wohl fest, daß die Form einer den gesamten Bereich der Mathematik und ihrer Nachbargebiete umfassenden Enzyklopädie noch nicht das ist, was alle Wünsche befriedigt. Weit davon entfernt, zu glauben, daß das hier beginnende Unternehmen allen Anforderungen gerecht werden könnte, die man an eine zusammenfassende Berichterstattung stellen kann, so soll hier doch der Versuch gemacht werden, mit einer grundsätzlich anderen Methode vorzugehen.

Die „*Ergebnisse der Mathematik*" sollen nämlich so elastisch als möglich der Entwicklung unserer Wissenschaft zu folgen vermögen. Ihr Ziel ist, in einzelnen selbständigen Berichten in Problemstellung, Literatur und hauptsächliche Entwicklungsrichtung spezieller moderner Gebiete einzuführen. Sie wollen damit auch der tatsächlichen Lage der Dinge Rechnung tragen, indem sie jedem Forscher Gelegenheit geben wollen, sich die Berichte zu beschaffen, die sein Arbeitsgebiet direkt betreffen, ohne ihn zu zwingen, sich gleichzeitig mit einem dem Einzelnen praktisch unerschwinglichen Apparat eines umfangreichen Handbuches der Gesamtwissenschaft zu belasten.

Es werden demgemäß von nun an eine Reihe von Berichten aus allen in Entwicklung begriffenen Gebieten der Mathematik und ihrer nächsten Anwendungen erscheinen, die auf einem Umfang von durchschnittlich je 6 bis 7 Bogen über die Entwicklung der letzten Dezennien referieren sollen. Je nach dem Tempo des Fortschrittes werden dann in späterer Zeit laufend Fortsetzungen erscheinen. Bei der ganzen Lage der Dinge ist es selbstverständlich, daß keine streng formale Einheitlichkeit dieser Berichte erstrebt werden kann: je nach dem Stand der bereits vorliegenden Literatur wird mehr oder weniger als bekannt vorauszusetzen sein, wird demnach mehr der Typus eines reinen Literaturberichtes oder einer stärker lehrbuchartigen Darstellung gewählt werden müssen. Der Gesamtplan der „Ergebnisse" ist allerdings so angelegt, daß in absehbarer Zeit Berichte über fast alle modernen Gebiete wenigstens der reinen Mathematik vorliegen werden, so daß im ganzen doch eine möglichst umfassende Übersicht über die neuere Entwicklung der Mathematik erreicht werden kann. In der Zusammenfassung von je 5 Berichten zu einem Band wird aber auf eine sachliche Gruppierung verzichtet — zeigt doch die Erfahrung, daß alle derartigen Systematisierungsversuche eher eine Belastung als eine Erleichterung für den Nachsuchenden darstellen.

Für die Literaturangaben werden die seit kurzem international anerkannten Regeln zur Anwendung gelangen.

Die Schriftleitung des Zentralblattes für Mathematik und ihre Grenzgebiete.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Knotentheorie knüpft an die anschauliche Aufgabe an, zu entscheiden, ob sich zwei geschlossene Fäden aus dehnbarer, aber undurchdringlicher Substanz durch stetige Abänderung in Fäden von kongruenter Gestalt überführen lassen. Schlägt man z. B. in einen offenen Faden einen Knoten im Sinne der Umgangssprache und vereinigt alsdann die beiden Enden des Fadens, so entsteht ein Gebilde, das nicht mehr stetig in Kreisgestalt deformiert werden kann.

Zur mathematischen Formulierung der genannten Aufgabe hat man mathematische Repräsentanten für die Fäden anzugeben und sodann Deformationen für dieselben zu erklären. Das ist natürlich auf verschiedene Weise möglich. Naheliegend ist z. B., für die Fäden doppelpunktfreie, geschlossene, stetige Kurven des dreidimensionalen euklidischen Raumes zu nehmen und unter Deformationen stetige Abänderungen dieser Kurven ohne Selbstdurchdringungen zu verstehen. Genauer: sind x_1, x_2, x_3 kartesische Koordinaten und

$$\mathfrak{x}_i(t) = \big(x_{1i}(t), x_{2i}(t), x_{3i}(t)\big) \qquad (i = 1, 2; \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi) \tag{1}$$

zwei punktfremde Kurven in Parameterdarstellung, welche durch t eineindeutig und stetig auf den Kreis

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t \tag{2}$$

abgebildet sind, so möge $\mathfrak{x}_1(t)$ in $\mathfrak{x}_2(t)$ deformierbar heißen, wenn es eine Schar von Kurven

$$\mathfrak{x}(t, \tau) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi, \; 0 \leqq \tau \leqq 1) \tag{3}$$

mit

$$\mathfrak{x}(t, 0) = \mathfrak{x}_1(t), \qquad \mathfrak{x}(t, 1) = \mathfrak{x}_2(t)$$

gibt, die durch t je eineindeutig und stetig auf den Kreis (2) abgebildet werden und die eine doppelpunktfreie Fläche $\mathfrak{x}(t, \tau)$ überstreichen. Statt dieser Einbettungen in Kurvenscharen kann man auch Abbildungen des Gesamtraumes auf sich als Klassifikationsprinzip verwenden: Zwei Raumkurven (1) mögen äquivalent heißen, wenn es eine eineindeutige stetige Abbildung

$$x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

des euklidischen Raumes auf sich gibt, für die

$$x_{k2}(t) = f_k\big(x_{11}(t), x_{21}(t), x_{31}(t)\big) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ist.

Beide Fassungen sind aber zu allgemein, weil allgemeine stetige Kurven anschaulich nicht faßbare Eigenschaften haben und spezielle stetige Kurven, z. B. Polygone, hinreichen, um an ihnen die anschaulichen Kurven zu studieren. Dementsprechend werden im folgenden nur Polygone aus endlich vielen euklidischen Strecken betrachtet und verlangt, daß die Kurvenschar (3) ebenfalls nur aus Polygonen besteht. Die erlaubten Abänderungen der Polygone kann man aus solchen speziellen Deformationen zusammensetzen, bei denen jeweils nur eine oder zwei aneinanderstoßende Strecken des Polygons betroffen werden. So ergibt sich die Begriffsbildung in **1**, 1 als eine natürliche Konsequenz aus dem anschaulichen Ausgangspunkt.

Daß sich nicht alle stetigen Kurven in Polygone deformieren lassen und die in (1) und (3) formulierte Klassifikationsaufgabe umfassender als die in **1**, 1 formulierte ist, zeigt z. B. eine von TIETZE in den Mh. Math. Phys. Bd. 19 S. 34 angegebene Kurve mit unendlichfacher Verknotung; sie entsteht durch unendlich oft iteriertes Aneinanderhängen von Polygonknoten. Die in Polygone deformierbaren Raumkurven lassen sich in dreidimensionale Schläuche einbetten, die von Kugeln überstrichen werden, deren Mittelpunkte längs der Kurven entlang wandern; sie sind also auch hiernach in der Tat zur Repräsentation anschaulicher Fäden, die ja immer eine gewisse Dicke nicht unterschreiten, geeignet.

Man kann die Knotentheorie tiefer fundieren, indem man nach den für die Knotenklassifikation maßgebenden Eigenschaften des euklidischen Raumes fragt. Es sind dies gewisse topologische Eigenschaften des Raumes: das Knotenproblem ist nichts anderes als das sog. Isotopieproblem für einfache Kurven in der dreidimensionalen Sphäre. Ein Aufbau der Knotentheorie als Teil von Isotopieuntersuchungen ist jedoch in extenso noch nicht vorgenommen. Die Methoden der kombinatorischen Topologie z. B. kommen nur in einem Versuch DEHNS, den Kreis zu kennzeichnen, zur Anwendung, und gerade diese Arbeit läßt die eigenartigen Schwierigkeiten erkennen, mit denen die kombinatorische Methode zu kämpfen hat. So läßt sich die Definition der Knoten mit Hilfe euklidischer Polygone heute auch aus der Lage der wissenschaftlichen Entwicklung rechtfertigen.

Wie steht es nun mit den Ergebnissen der Knotentheorie? Die elementaren an die Gestalt der Knotenprojektionen anknüpfenden Überlegungen, die sich zunächst aufdrängen, haben keine bewiesenen Resultate gezeitigt. Es ist zwar leicht, notwendige Bedingungen der topologischen Äquivalenz von Kurven anzugeben, aber es gelingt nicht, diese Eigenschaften an einer vorgelegten Kurve festzustellen. Dieselbe Schwierigkeit machte sich zunächst geltend, als POINCARÉ den Mannigfaltigkeiten und damit den Knoten gewisse Gruppen zuordnete (die Gruppe des Knotens ist die Fundamentalgruppe des Raumes, der aus dem euklidischen Raume entsteht, wenn man die Punkte des Knotens aus ihm herausnimmt). WIRTINGER und DEHN gaben zwar Methoden an, die Erzeugenden und definierenden Relationen dieser Gruppe aus der Knotenprojektion abzulesen, und es ließ sich jetzt z. B. beweisen, daß die Kleeblattschlinge kein Kreis ist und daß die Kleeblattschlinge nicht in ihr Spiegelbild deformierbar ist. Die Beantwortung allgemeiner Fragen scheiterte aber an der Schwierigkeit, das gruppentheoretische Hilfsmittel auszuwerten, das die Entdeckung POINCARÉs dem Geometer in die Hand gegeben hatte.

So erscheint die weitere Fortentwicklung der Knotentheorie eng mit dem Fortschreiten der Gruppentheorie verknüpft. In der Tat kann man die meisten bekannten Knoteneigenschaften nach einem einheitlichen gruppentheoretischen Verfahren aus der Gruppe des Knotens bestimmen, nämlich aus dem Verfahren, Erzeugende und definierende Relationen von Untergruppen aufzustellen. Wenn auch die Torsionszahlen und das L-Polynom des Knotens von ALEXANDER ohne direkte Benutzung dieses Verfahrens angegeben wurden, so ordnet sich doch seine Ableitung ganz naturgemäß den allgemeineren Überlegungen ein, die zum Beweis des genannten gruppentheoretischen Verfahrens dienen.

Über die Gruppe hinaus geht die dem Knoten zugeordnete quadratische Form; in ihr drückt sich die Tatsache aus, daß die aus der Knotenprojektion abgelesenen Erzeugenden und definierenden Relationen der Knotengruppe von spezieller, nicht durch die Gruppenstruktur bestimmter Natur sind.

Es ist nicht schwer, einen Aufbau der Knotentheorie zu entwerfen, in welcher die Gruppe des Knotens und das Verfahren zur Bestimmung von Untergruppen in den Mittelpunkt gerückt ist. Man kann z. B. an Kapitel 1 sofort die geometrisch inhaltliche Definition der Knotengruppe in **3**, 8 und 9 und die Bestimmung der Torsionszahlen und des L-Polynoms in **3**, 6 und 7 anschließen. Dieser Aufbau bietet sogar merkliche Vorteile, weil er die Invarianzbeweise für die Gruppe, für die Torsionszahlen und das L-Polynom auf die Angabe ihrer invarianten geometrischen Bedeutung reduziert. Ich habe es aber vorgezogen, den formal elementaren Charakter der aus Matrizen bestimmbaren Eigenschaften des Knotens herauszuarbeiten und diese Zusammenhänge für sich in Kapitel 2 zu begründen, um so den Arbeiten von ALEXANDER einerseits und der merkwürdigen quadratischen Form des Knotens andererseits besser gerecht zu werden.

Erstes Kapitel.

Knoten und ihre Projektionen.

§ 1. Definition des Knotens.

Um den Begriff des Knotens (*5*; *28*)* zu erklären, betrachten wir geschlossene doppelpunktfreie Polygone des euklidischen Raumes aus endlich vielen euklidischen Strecken und verstehen unter der Deformation eines Polygons die Erzeugung eines neuen Polygons aus einem vorgelegten durch einen der folgenden beiden Prozesse:

Δ. *Sei* $P_p P_1$ *eine Strecke des Polygons mit den Endpunkten* P_p *und* P_1, *seien* $P_p P_{p+1}$ *und* $P_{p+1} P_1$ *zwei dem Polygon nicht angehörende Strecken mit den Endpunkten* P_p, P_{p+1} *bzw.* P_{p+1}, P_1. *Die Dreiecksfläche* $P_p P_{p+1} P_1$ *habe außer der Strecke* $P_p P_1$ *keinen Punkt mit dem Polygon gemeinsam. Alsdann werde* $P_p P_1$ *durch* $P_p P_{p+1}$, $P_{p+1} P_1$ *ersetzt.*

Δ' sei der zu Δ inverse Prozeß: Das aus drei zyklisch aufeinanderfolgenden Eckpunkten P_p, P_{p+1}, P_1 des Polygons gebildete Dreieck $P_p P_{p+1} P_1$ habe außer den Strecken $P_p P_{p+1}$, $P_{p+1} P_1$ keinen Punkt mit dem Polygon gemeinsam. Alsdann werde $P_p P_{p+1}$, $P_{p+1} P_1$ durch $P_p P_1$ ersetzt.

Polygone, die durch eine Kette von Deformationen auseinander hervorgehen, mögen *isotop* und eine Klasse isotoper Polygone ein *Knoten* heißen. Wir nennen übrigens auch das Polygon selbst einen Knoten, obgleich wir es genauer als den Repräsentanten eines Knotens bezeichnen müßten.

Eigenschaften eines Polygons, die bei Abänderungen Δ, Δ' erhalten bleiben, nennen wir Knoteneigenschaften des Polygons. Die Aufgabe der Knotentheorie ist es, einen Überblick über alle Eigenschaften eines Knotens zu gewinnen, d. h. alle Deformationsinvarianten eines geschlossenen doppelpunktfreien Polygons anzugeben.

Ein Knoten, der zu einem Dreieck isotop ist, möge ein *Kreis* genannt werden. Ein Polygon, das nicht zu einem Dreieck isotop ist, heiße *verknotet*.

Einen Knoten kann man durch Festlegung eines Durchlaufungssinnes richten und die Klassifikationsaufgabe auf diese gerichteten Streckenzüge erweitern. Der zu einem gerichteten Knoten entgegengesetzt gerichtete heiße der inverse Knoten; ein Knoten heiße sym-

---

* Diese Ziffern beziehen sich auf das am Schluß des Heftes befindliche Literaturverzeichnis.

metrisch, wenn die beiden durch Orientierung aus ihm entstehenden Knoten isotop sind. Ein Knoten heiße *amphicheiral*, wenn er zu seinem räumlichen Spiegelbild isotop ist.

An Stelle einzelner Polygone kann man Systeme von endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien und untereinander punktfremden Polygonen betrachten und den Abänderungen Δ und Δ' unterwerfen. Für diese Deformationen ist sinngemäß zu fordern, daß die Dreiecksfläche $P_p P_{p+1} P_1$ keinen Punkt mit den Polygonen des Systems, außer den Strecken, welche bei der Deformation ersetzt werden, gemeinsam habe. Zwei solche Systeme mögen isotop oder dieselbe *Verkettung* heißen, wenn sie sich durch endlich viele der Deformationen Δ und Δ' ineinander überführen lassen. Die einfachste Invariante einer Verkettung ist die Zahl der zu ihr gehörigen Polygone, sie heiße die Ordnung der Verkettung.

§ 2. Reguläre Projektionen.

Die bequemste Handhabe zur Festlegung eines einzelnen Knotens bieten die regulären Projektionen von Polygonen.

Wir nennen eine Parallelprojektion eines Polygons regulär, wenn ein projizierender Strahl höchstens zwei Strecken des Polygons trifft, wenn die Projektion also nur zweifache Doppelpunkte besitzt und kein Doppelpunkt der Projektion einem Eckpunkt des Polygons entspricht. Man erschließt sofort, daß eine reguläre Projektion nur endlich viele Doppelpunkte besitzt. Denn in einer Projektion mit unendlich vielen Doppelpunkten müssen die Projektionen zweier Strecken des Polygons eine Strecke s von Doppelpunkten gemeinsam haben, und s wird dann von solchen Doppelpunkten berandet, denen Eckpunkte des Polygons entsprechen. Die singulären Projektionsrichtungen können danach aus zwei Gründen singulär sein:

a) Es gibt keine Doppelpunkte, denen Eckpunkte des Polygons entsprechen. In diesem Fall gibt es mehrfache Doppelpunkte. Dann trifft der Projektionsstrahl durch diesen mehrfachen Punkt mindestens drei Geraden, auf denen Strecken des Polygons liegen. Diese Geraden müssen windschief sein, weil sonst ein Doppelpunkt auftreten würde, der einem Eckpunkt des Polygons entspricht; und der Projektionsstrahl gehört also dem durch die drei Geraden bestimmten einschaligen Hyperboloid an. Es sind also alle singulären Richtungen dieser Art unter den Richtungen enthalten, die wir erhalten, wenn wir je drei windschiefe Geraden, auf denen Strecken des Polygons liegen, herausgreifen, die durch sie bestimmten Hyperboloide und alsdann die Kegel zweiter Ordnung bilden, deren Erzeugende zu den Erzeugenden dieser Hyperboloide parallel sind.

b) Die Projektion eines Eckpunktes fällt in die Projektion einer Strecke oder eines anderen Eckpunktes. Alsdann ist der Projektionsstrahl zu einer Ebene parallel, welche durch eine Strecke und einen Eckpunkt des Polygons hindurchgeht, der nicht Endpunkt jener Strecke ist.

Die regulären Projektionsrichtungen zerfallen danach in endlich viele Gebiete, deren Ränder auf den Kegeln und Ebenen der singulären Projektionsrichtungen liegen. Eine nähere Untersuchung der singulären Projektionen ist übrigens von großem Interesse. Das zeigt z. B. der folgende Satz über die Sehnen, welche ein Polygon in vier verschiedenen Punkten treffen (*26*). Ist c die Verknotungszahl des Polygons (vgl. **2**, 1), und ist c gerade, so ist die Anzahl der vierfachen Sehnen des Polygons mindestens c^2. Ein ähnlicher Satz gilt für Verkettungen aus zwei Polygonen $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$. Ist c_{12} die Verkettungszahl von $\mathfrak{k}_1$ bezüglich $\mathfrak{k}_2$ und c_{21} die Verkettungszahl von $\mathfrak{k}_2$ bezüglich $\mathfrak{k}_1$ (vgl. **2**, 1), so ist die Anzahl der vierfachen Sehnen der Verkettung mindestens $c_{12}c_{21}$.

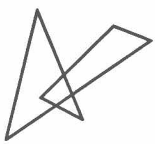

Fig. 1.

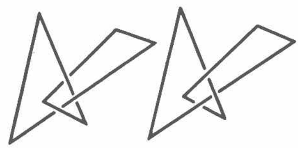

Fig. 2.

Eine reguläre Projektionskurve wird durch ihre Doppelpunkte $D_1, D_2, \ldots, D_n$ in $2n$ doppelpunktfreie Streckenzüge $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ zerlegt, und sie zerlegt die Projektionsebene in endlich viele Polygone $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_g$ und ein unendliches Gebiet Γ_0. Nach der EULERschen Polyederformel ist $g = n + 1$. Die Berandungsbeziehungen zwischen den D_i, z_k, Γ_l, die Angabe also der beiden Doppelpunkte, welche z_k beranden, und der beiden Gebiete, in deren Berandung z_k vorkommt, nennen wir kurz das *Schema der Projektion.*

Die Projektionen mögen nun normiert werden. Wir legen für jede Projektionsrichtung ein Oben und Unten fest und benennen die dem Doppelpunkt D_i der Projektion auf dem Knoten entsprechenden Punkte U_i und U^i; hierbei liege U_i unter U^i und heiße U_i eine Unterkreuzungsstelle, U^i eine Überkreuzungsstelle. Wir *normieren* die Projektion, indem wir bei jedem D_i bemerken, welche von D_i ausgehenden Streckenzüge z_k Projektionen von U_i bzw. U^i ausgehender Streckenzüge sind (Fig. 1 u. 2). Ebenso können wir das Schema der Projektion normieren. *Haben zwei Polygone dieselbe normierte Projektion, so sind sie isotop.* Haben zwei Polygone $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ dieselbe Projektionskurve, ist hingegen die Normierung ihrer Projektionen in allen Doppelpunkten entgegengesetzt, so ist $\mathfrak{k}_1$ zu dem Spiegelbilde von $\mathfrak{k}_2$ isotop.

Alternierend möge eine Knotenprojektion heißen, wenn jeder in einem Doppelpunkt überkreuzende Streckenzug im nächsten Doppelpunkt unterkreuzt, beim Durchlaufen des Knotens also Über- und Unterkreuzungsstellen abwechseln (Fig. 2). Wir sprechen auch von alternierenden Teilen einer Projektion. Eine reguläre Projektion läßt sich stets alternierend normieren, und zwar auf gerade zwei Weisen. Die zugehörigen Knoten sind dann Spiegelbilder (Fig. 2). In der am Schluß angegebenen Tabelle der Knoten bis zu neun Doppelpunkten bedeuten dementsprechend die nichtnormierten Projektionen stets alternierende Projektionen. Mit alternierenden Knoten meinen wir solche, die alternierende Projektionen besitzen.

§ 3. Die Operationen Ω. 1, 2, 3.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die normierte Projektion bei Deformation des Polygons und bei Veränderung der Projektionsrichtung verändert (*5*; *28*).

Wir stellen zunächst einige Typen von Abänderungen auf, die sich durch Knotendeformationen bewirken lassen.

$\Delta.\pi.1$. Die Abänderung der Projektionskurve ist selbst ein Prozeß Δ oder Δ'. Die Projektionskurve ist ja auch ein Polygon — wenn auch i. a. eines mit Doppelpunkten —, das diesen Deformationen unterworfen werden kann.

$\Delta.\pi.2$. Das bei den Deformationen Δ, Δ' auftretende Dreieck $P_p P_{p+1} P_1$ besitze als Projektion ein Dreieck $P'_p P'_{p+1} P'_1$, das von den übrigen Strecken der Projektionskurve gerade in zwei Punkten D und D' auf der Strecke $P'_p P'_1$ bzw. $P'_p P'_{p+1}$ getroffen werde und das im Innern keine Doppelpunkte enthält (Fig. 3).

Fig. 3. $\Delta.\pi.2$.

$\Delta.\pi.1, 2$ mögen *Deformationen der Projektionskurve* heißen. Sie lassen das Schema der Projektion unverändert. Ferner sieht man, daß sich Projektionskurven mit demselben Schema durch eine Kette von Deformationen $\Delta.\pi.1, 2$ ineinander überführen lassen. Daraus folgt: *Polygone, deren Projektionen dasselbe normierte Schema besitzen, sind isotop.*

Ferner lassen sich durch Deformationen Δ die folgenden drei Operationen bewirken, die auch das Schema der Projektion abändern.

$\Omega.1$. *Ein Teilstreckenzug, dessen Projektion doppelpunktfrei war, verwandelt sich in eine Schleife.* Es entsteht ein neuer Doppelpunkt. Die zugeordneten Unter- und Überkreuzungsstellen auf dem Polygon sind benachbart (Fig. 4).

Fig. 4. $\Omega.1$.

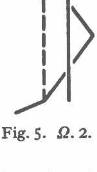

Fig. 5. $\Omega.2$.

$\Omega.2$. *Zwei Teilstreckenzüge des Knotens, deren Projektionen keine gemeinsamen Punkte hatten, schieben sich so übereinander, daß in dem einen Zuge zwei benachbarte Überkreuzungsstellen, im andern zwei benachbarte Unterkreuzungsstellen auftreten* (Fig. 5).

$\Omega.3$. *Ausgangsfigur: drei Teilstreckenzüge des Knotens* s_1, s_2, s_3

liefern in der Projektion drei Doppelpunkte, die zu je zweien benachbart sind. Und zwar überkreuze s_1 sowohl s_2 wie s_3. s_2 überkreuze s_3. Operation: s_1 wird über die Unter- und Überkreuzungsstelle von s_2 und s_3 hinweggeschoben (Fig. 6).

Die inversen Operationen bezeichnen wir mit $\Omega'.\,i$ ($i = 1, 2, 3$). Es läßt sich nun zeigen, daß sich jede Abänderung der Projektion, welche durch Knotendeformationen Δ, Δ' bewirkt wird, sich auch durch iterierte Anwendung der Deformationen $\Delta.\,\pi.\,1, 2$ und der Operationen $\Omega.\,i$ ($i = 1, 2, 3$) nebst ihren Inversen erzeugen lassen.

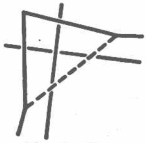
Fig. 6. $\Omega.\,3$.

Der Beweis dieser Behauptung sei kurz angedeutet. Der Knoten werde deformiert, indem die Strecke $P_p P_1$ durch die beiden Strecken $P_p P_{p+1}$, $P_{p+1} P_1$ ersetzt wird. P'_p, P'_{p+1}, P'_1, die Projektionen von P_p, P_{p+1}, P_1, mögen nicht in einer Geraden liegen. Die Projektionsrichtung werde so gewählt, daß sowohl der ursprüngliche wie der deformierte Knoten sich regulär projiziert. Das Dreieck $P'_p P'_{p+1} P'_1$ enthält dann gewiß nur endlich viele Doppelpunkte im Innern und auf dem Rande. Das Dreieck kann daher durch Strecken, die parallel zu $P_p P_1$ und $P_p P_{p+1}$ sind, so in Dreiecke und Parallelogramme unterteilt werden, daß die entsprechenden Dreiecke und Parallelogramme der Projektion nur höchstens einen Doppelpunkt im Innern enthalten und alsdann gerade von vier Streckenzügen z_i, sonst nur von höchstens einem Streckenzug z_i (1, 2) je einmal getroffen werden.

Nun kann man $P_p P_1$ durch endlich viele der Operationen $\Delta.\,\pi.\,i$, $\Omega.\,i$ und $\Omega'.\,i$ in $P_p P_{p+1}$, $P_{p+1} P_1$ überführen und umgekehrt, indem man „etagenweise" die Dreiecke und Vierecke der Unterteilung abbaut.

Auch die durch Veränderung der Projektionsrichtung bewirkten Abänderungen der Projektion lassen sich aus den angegebenen Operationen $\Delta.\,\pi.$ und $\Omega.$ zusammensetzen. Wird die Projektionsrichtung stetig so verändert, daß sie dabei stets regulär bleibt, so lassen sich die Abänderungen der Projektion durch die $\Delta.\,\pi.$ erzeugen. Um eine bestimmte singuläre Projektionsrichtung zu passieren, deformieren wir den Knoten so, daß diese Richtung nicht mehr singulär ist, passieren dann die Richtung und deformieren alsdann den Knoten in seine ursprüngliche Gestalt zurück.

Damit ist gezeigt: *Die Knoteneigenschaften fallen mit denjenigen Eigenschaften des normierten Schemas der regulären Projektionen zusammen, die bei den Operationen $\Omega.\,i$, $\Omega'.\,i$ ($i = 1, 2, 3$) erhalten bleiben.* Das Knotenproblem ist also gleichwertig mit der Frage nach den verschiedenen Typen normierter regulärer Projektionen, die nicht durch Anwendung der Operationen $\Omega.$ ineinander übergeführt werden können. Analoges gilt für Verkettungen.

§ 4. Die Gebietseinteilung der Projektionsebene.

Die Gebiete Γ der Projektionsebene lassen sich so in zwei Klassen verteilen, bzw. so *schwarz* oder *weiß* färben, daß längs eines Bogens aneinanderstoßende Gebiete verschiedene Farben bekommen. In einem Doppelpunkt liegen sich dann immer Gebiete gleicher Färbung gegenüber.

Diese Einteilung läßt sich tatsächlich durchführen. Denn durchsetzt ein geschlossener Streckenzug der Projektionsebene die Knotenprojektion endlich oft, etwa c-mal, und passiert er keinen Doppelpunkt, so ist c stets eine gerade Zahl.

Das unendlich große Gebiet möge stets schwarz gefärbt sein. Die Gesamtheit der weißen Gebiete läßt sich alsdann als die Projektion eines im Endlichen verlaufenden Bandes auffassen, dessen Rand der Knoten ist. Dies Band kann orientierbar oder nichtorientierbar sein. Es läßt sich übrigens zeigen, daß sich in jeden Knoten ein orientierbares Band einspannen läßt (*18.*)

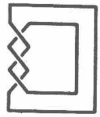

Fig. 7.

In Analogie zu einer späteren Begriffsbildung wollen wir einen Teil einer Knotenprojektion, der eine Kette von schwarzen bzw. weißen Gebieten berandet, die je nur zwei Doppelpunkte als Randpunkte besitzen und von denen je zwei benachbarte in einem dieser Doppelpunkte aneinanderstoßen, einen *Zweierzopfteil* nennen (Fig. 7). Durch Ω'. 2 kann man erreichen, daß ein Zweierzopfteil eliminiert oder alternierend wird.

Die einfachsten Knoten im Sinne der Schwarzweißfärbung sind die „*alternierenden Torusknoten*“, deren Projektionen nur zwei schwarze Gebiete besitzen. Sie lassen sich auf ein zur Torusfläche topologisch äquivalentes Polyeder legen und beranden ein zum Möbiusschen Band topologisch äquivalentes, mehrfach verdrilltes Band (Fig. 7). Ein alternierender Torusknoten mit 3 Doppelpunkten heißt „Kleeblattschlinge“. Analog erklären wir alternierende Torusverkettungen aus zwei Polygonen.

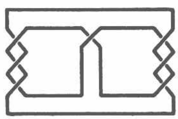

Fig. 8.

Als „*Brezelknoten*“ erklären wir eine Klasse von Knoten, deren Projektionen nur drei schwarze Gebiete besitzen. Die Überkreuzungen verteilen sich dabei auf drei Zweierzopfteile (Fig. 8).

Gibt es ein weißes Gebiet Γ_1, das mit einem schwarzen Gebiet Γ_2 längs zwei verschiedener durch Doppelpunkte voneinander getrennter Strecken aneinanderstößt (Fig. 9), so sei $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2$ ein einfaches Polygon, das diese Strecken je einmal in P bzw. Q durchsetzt. $\mathfrak{w}_i$ verlaufe ganz in Γ_i $(i = 1, 2)$. Ferner sei $\mathfrak{k}_1'$ der im Äußeren von $\mathfrak{w}$ liegende Teil der Projektion, $\mathfrak{k}_2'$ der im Inneren liegende Teil derselben. Fügen wir nun zu $\mathfrak{k}_i'$ je den Weg $\mathfrak{w}_1$ hinzu, so entstehen zwei Knoten $\mathfrak{k}_i$ $(i = 1, 2)$, welche als *Bestandteile* des ursprüng-

Fig. 9.

lichen Knotens bezeichnet werden mögen, wenn sowohl $\mathfrak{k}_1$ wie $\mathfrak{k}_2$ verknotet sind. Die Eigenschaften eines Knotens lassen sich unschwer auf die seiner Bestandteile zurückführen (**3**, 14). Im allgemeinen besitzt ein Knoten jedoch keine Bestandteile. In der am Schluß angegebenen Tabelle der Knoten bis zu neun Überkreuzungen sind die Knoten mit zwei oder mehr Bestandteilen fortgelassen.

Inzidiert ein Doppelpunkt D zweimal mit demselben Gebiet Γ, so müssen die beiden zu Γ gehörigen Ecken bei D kreuzweise liegen, weil sie gleichgefärbt sind. Einen solchen Doppelpunkt kann man durch eine Deformation des Knotens herausschaffen (Fig. 10). Es gibt nämlich einen ganz in Γ verlaufenden die Knotenprojektion nur in D einmal durchsetzenden geschlossenen Weg $\mathfrak{w}$. Dreht man den von diesem Weg eingeschlossenen Teil der Knotenprojektion in geeigneter Weise um 180°, so entsteht eine Projektion, die den Doppelpunkt D nicht mehr enthält. Diese Abänderung — sie heiße Ω. 4 — läßt sich durch eine Folge von Knotendeformationen bewirken, wie man an der zugehörigen räumlichen Abänderung des Knotens leicht erkennt.

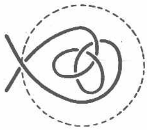

Fig. 10. Ω. 4.

Durch wiederholte Anwendung von Ω. 4 kann man erreichen, daß die Knotenprojektion keine Doppelpunkte besitzt, die mit einem Gebiet doppelt inzidieren. Wir bemerken noch: *Eine alternierende Projektion bleibt bei Ω. 4 alternierend.* In dem vom Wege $\mathfrak{w}$ eingeschlossenen Teil der Projektion werden nämlich hierbei die Überkreuzungen in Unterkreuzungen verwandelt und umgekehrt, und mit D ist eine Überkreuzungsstelle und eine Unterkreuzungsstelle vernichtet.

§ 5. Normale Knotenprojektionen.

Eine Knotenprojektion heiße normal für die beiden schwarzen (weißen) Gebiete Γ_i, Γ_k, wenn entweder Γ_i, Γ_k keinen oder nur einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, oder die gleichzeitig mit ihnen inzidierenden Doppelpunkte auf einem alternierenden Zweierzopfteil liegen. Die Projektion heiße normal, wenn sie für sämtliche Paare gleichgefärbter Gebiete normal ist und kein Gebiet an sich anstößt.

Jede reguläre normierte Knotenprojektion mit n Doppelpunkten läßt sich in eine normale mit höchstens ebensoviel Doppelpunkten verwandeln[1].

Sei eine Projektion noch nicht normal und inzidieren zwei Doppelpunkte D_1 und D_2 auf verschiedenen Zweierzopfteilen der Projektion z. B. mit den zwei schwarzen Gebieten Γ_i und Γ_k, so kann man in der Projektionsebene einen Weg $\mathfrak{w}_i \mathfrak{w}_k$ angeben, der die Projektion nur einmal je in D_1 und D_2 durchsetzt; $\mathfrak{w}_i$ laufe von D_1 bis D_2 in Γ_i und $\mathfrak{w}_k$ von D_2 bis D_1 in Γ_k. Nun möge die Projektion mittels $\Delta.\pi.$ und $\mathfrak{w}_i \mathfrak{w}_k$

[1] Goeritz, L.: Nicht veröffentlicht.