Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

880

Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups

Proceedings, Marseille-Luminy 1980

Edited by J. Carmona and M. Vergne

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

880

Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups

Actes du Colloque d'Analyse Harmonique Non Commutative, 16 au 20 juin 1980 Marseille-Luminy

Edited by J. Carmona and M. Vergne

Springer-V

Berlin Heidelberg New York 1981

Editors

Jacques Carmona
Université d'Aix-Marseille, U.E.R. Scientifique de Luminy
70, Route Léon Lachamp, 13288 Marseille Cedex 2, France

Michèle Vergne
Maitre de Recherches au C.N.R.S.
Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques
2, Place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05, France

AMS Subject Classifications (1980): 10D20, 17B10, 17B15, 17B35, 17B56, 22E27, 22E30, 22E35, 22E41, 22E45, 22E46, 22E47, 43A25

ISBN 3-540-10872-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-10872-6 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Non-commutative harmonic analysis and lie groups: proceedings des actes du Colloque d'Analyse Harmonique Non Commutative. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer
Bis 1978 (1979) u.d.T.: Non commutative harmonic analysis
1980. 16 au 20 juin 1980, Marseille-Luminy. – 1981.
(Lecture notes in mathematics ; Vol. 880)
ISBN 3-540-10872-6 (Berlin, Heidelberg, New York);
ISBN 0-387-10872-6 (New York, Heidelberg, Berlin)
NE: Colloque d'Analyse Harmonique Non Commutative; GT

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

TABLE DES MATIERES.

EQUATIONS DE HUA ET NOYAU DE POISSON

Nicole BERLINE et Michèle VERGNE

INTRODUCTION

Introduisons cette étude par l'exemple dont elle est issue [7]. Considérons le domaine $\Omega_{m,n} \subset \mathbb{C}^{m\times n}$ formé des matrices Z (à m lignes et n colonnes, $m \leq n$) telles que $I_m - ZZ^*$ soit définie positive. Le domaine Ω admet un bord de Shilov : l'ensemble S des matrices U telles que $UU^* = I_m$, un noyau de Cauchy - Szegö, et par suite un noyau de Poisson positif $P(Z,U) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S)} \det(I_m - ZZ^*)^n |\det(I_m - ZU^*)|^{-2n}$ tel que, si F est une fonction holomorphe dans Ω qui se prolonge continûment à la frontière, alors

$$F(Z) = \int_S P(Z,U)\, F(U)\, dU$$

Le noyau de Poisson peut être décrit de façon invariante : Soit $G \simeq SU(m,n)$ le groupe des transformations biholomorphes de Ω; pour tout $Z \in \Omega$ le stabilisateur K_Z de Z dans G agit transitivement sur S ; la mesure $P(Z,U)\,dU$ est la mesure (unique) sur S, invariante sous K_Z, de masse totale 1. Par suite, pour toute fonction φ sur S, l'intégrale de Poisson $\check{P}\varphi(Z) = \int_S P(Z,U)\varphi(U)\, dU$ est une fonction harmonique dans Ω.

De plus, Hua a montré que la fonction $Z \longmapsto P(Z,U)$ est annulée par l'opérateur différentiel d'ordre 2 (à valeurs matricielles)

$$\Delta_Z = (I_m - ZZ^*)\, \bar{\partial}_Z\, (I_n - Z^*Z)\, {}^t\partial_Z$$

(la trace de Δ_Z est le Laplacien de $\Omega_{m,n}$) et Stein a posé le problème de caractériser, comme solutions d'un système d'équations différentielles, les intégrales de Poisson des fonctions sur le bord de Shilov.

Nous montrons que l'opérateur Δ_Z répond à cette question.

Plus généralement soient G/K un espace hermitien symétrique (que nous supposons irréductible : on passe facilement au cas général) et Ω la réalisation d'Harish-Chandra de G/K comme ouvert borné de l'espace tangent holomorphe à l'origine p^+. L'action de G se prolonge à la frontière de Ω dans p^+, le bord de Shilov S est une orbite sous G et sous K,[14] et l'intégrale de Poisson d'une fonction φ sur S est encore donnée par

$$\check{P}\varphi\,(Z) = \int_S \varphi(u)\, d\mu_Z(u) \quad \text{pour } Z \in \Omega .$$

où μ_Z est l'unique mesure de masse 1 sur S invariante par le stabilisateur K_Z de Z dans G [12].

Lorsque G/K est de type tube, Johnson et Koranyi - généralisant les résultats précédents de Koranyi-Malliavin [13] et Johnson [8,9] - ont caractérisé les intégrales de Poisson du bord de Shilov par un système d'équations différentielles d'ordre 2, analogue à l'opérateur de Hua ci-dessus [10]. Remarquons que, si G/K est de type tube, le bord de Shilov S est défini par le système d'équations algébriques (de degré 2) $\frac{1}{2}[U,\overline{U}] = Z$ (où Z est l'élément du centre de l'algèbre de Lie k_C de K qui définit la structure complexe de G/K). L'opérateur de Johnson - Koranyi, que nous noterons $C(\partial,\overline{\partial})$ peut s'interpréter comme une "quantification" de cette équation de S.

Lorsque G/K n'est pas de type tube, le bord de Shilov n'est pas, en général, défini par des équations de degré 2 et l'opérateur $C(\partial,\overline{\partial})$ n'annule plus les intégrales de Poisson ; cependant les éléments U de S satisfont toujours le système (de degré 3) $\frac{1}{2}[[\overline{U}, U], \overline{U}] = \overline{U}$. Nous "quantifions" ce système en un opérateur différentiel $C(\partial, \overline{\partial}, \partial)$ et obtenons le

Théorème : Soit F une fonction harmonique sur G/K. Alors F est l'intégrale de Poisson d'une hyperfonction sur le bord de Shilov si et seulement si $C(\partial, \overline{\partial}, \partial)\, F = 0$

Indiquons le plan de cet article :

Dans la section 1, nous expliquons comment le problème étudié s'interprète en termes de dualité entre séries principales.

La section 2 est consacrée aux notations et rappels concernant les espaces hermitiens symétriques, et à l'énoncé précis des résultats.

Les sections 3 et 4 sont consacrées aux démonstrations.

Dans la section 5, qui est heuristique, nous relions à la "méthode des orbites" les équations satisfaites par les intégrales de Poisson du bord de Shilov ou, plus généralement, d'un des bords de Satake - Furstenberg- Moore.

Nous remercions S. Helgason, K. Johnson, V. Kac, M. Kashiwara, A. Koranyi, D. Peterson, E. Stein et D. Vogan qui ont contribué à notre compréhension de ces questions.

Nicole Berline remercie le M.I.T. de son hospitalité pendant l'automne 1979.

1. Généralités sur le noyau de Poisson.

Dans cette section G est un groupe semi-simple connexe, de décomposition d'Iwasawa G = KAN. Nous rappelons la définition et les propriétés du noyau de Poisson associé au "bord maximal" G/MAN.

1.1. On notera $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ etc... les algèbres de Lie de G,K, etc... et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, etc... leurs complexifications. On notera ℓ (resp. r) la représentation naturelle à gauche, (resp. à droite) du groupe G, de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et de son algèbre enveloppante $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, dans un espace de fonctions sur G à valeurs dans un espace vectoriel complexe.

Si G_1 est un sous-groupe fermé de G et $\underline{v}$ un G_1-module, on considèrera les sections du fibré $G \times_{G_1} \underline{v}$ comme des fonctions sur G à valeurs dans $\underline{v}$; en particulier, on identifiera les fonctions sur G/G_1 aux fonctions sur G invariantes à droite par G_1.

1.2. Soit dk la mesure de Haar de masse 1 sur K.

L'intégrale de Poisson d'une fonction f sur G/MAN est définie par

$$Pf(g) = \int_K f(gk)dk \qquad \text{pour } g \in G$$

Il est clair que Pf est une fonction sur G/K et que P commute aux translations à gauche par G.

Notons $\mathcal{U}^K$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}$ formée des éléments invariants par l'action adjointe de K. Alors $\mathcal{U}^K \cap \mathcal{U}\mathfrak{k}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{U}^K$ et la représentation r induit un isomorphisme de $\mathcal{U}^K/\ \mathcal{U}^K \cap \mathcal{U}\mathfrak{k}$ sur l'algèbre $\mathfrak{D}(G/K)$ des opérateurs différentiels sur G/K qui commutent aux translations à gauche $\{\ell(g),\ g \in G\}$ [4]
On notera $\mathcal{U}^K_+$ l'ensemble $\mathcal{U}^K \cap \mathcal{U}\mathfrak{g}$ des éléments sans terme constant de $\mathcal{U}^K$. Une fonction F sur G/K est dite harmonique si elle est C^∞ et si $r(u)F = 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}^K_+$.

L'intégrale de Poisson Pf est harmonique pour toute fonction f sur G/MAN. [1]

Notons $\mathcal{L}_o$ le module d'Harish - Chandra formé des fonctions K-finies à gauche sur G/MAN. Alors P induit un isomorphisme de $\mathcal{L}_o$ sur l'espace des fonctions harmoniques et K - finies sur G/K, [5,6].

Si F est une fonction harmonique sur G/K, alors F est somme de la série de ses K-types : $F = \sum_{\lambda \in \hat{K}} F_\lambda$ [3]. Chacune des fonctions K-finies F_λ est intégrale de Poisson Pf_λ d'une fonction $f_\lambda \in \mathcal{L}_o$ et la série Σf_λ converge vers une hyperfonction f sur G/MAN telle que F = Pf. Ainsi la transformation P se prolonge en une bijection de l'espace des hyperfonctions sur G/MAN sur l'espace des fonctions harmoniques sur G/K [11]

1.3. Dans le cas où G/K est hermitien symétrique, le bord de Shilov S est homogène sous K, donc a fortiori sous G, et on peut choisir un point base $U_o \in S$ tel que le stabilisateur de U_o dans G soit un parabolique Q contenant MAN (voir 2.13 ci-dessous). On identifie ainsi S à G/Q et il est clair que, si φ est une fonction sur S, on a $P\varphi = \check{P}\varphi$.

1.4. Revenons au cas général. Soit $V \subset \mathcal{L}_o$ un sous $(K, \mathcal{U})$ - module. Notons $\bar{V}$ l'adhérence de V dans l'espace des hyperfonctions sur G/MAN.

Le problème de caractériser les intégrales de Poisson du bord de Shilov apparaît comme un cas particulier du problème général de caractériser, par un système d'équations différentielles, les fonctions sur G/K qui s'écrivent Pf, avec $f \in \bar{V}$. Ce problème admet la solution abstraite suivante :

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{U}_V$ l'idéal à gauche de $\mathcal{U}$, formé des éléments u tels que $r(u)\,Pf = 0$ pour toute $f \in V$. Alors une fonction F sur G/K est l'intégrale de Poisson d'une hyperfonction $f \in \bar{V}$ si et seulement si elle est C^∞ et satisfait $r(u)\,F = 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}_V$.

Ce résultat a été observé par plusieurs auteurs (Koranyi, Kashiwara, ...). Faute de référence nous en exposons la démonstration, qui repose sur des considérations de dualité que nous utiliserons de toutes façons dans la suite.

1.5. Soit Q un sous-groupe parabolique de G, contenant MAN. Notons C (G/Q) l'espace des fonctions continues sur G/Q et $\mathcal{L}_o(Q)$ le module d'Harish - Chandra, formé des fonctions K - finies(à gauche) sur G/Q.

Soit q l'algèbre de Lie de Q.

Soit δ_Q le caractère de Q défini par

$$\delta_Q(h) = |\text{dét}\ \ \mathrm{Ad}_{g/q}(h)\ | \quad \text{pour } h \in Q.$$

Soit $C(\delta_Q)$ l'espace des fonctions continues φ sur G (à valeurs complexes) qui vérifient

$$\varphi(gh) = \delta_Q(h)\ \varphi(g) \quad \text{pour } g \in G \text{ et } h \in Q$$

et $\mathcal{L}(\delta_Q)$ le module d'Harish-Chandra formé des fonctions $\varphi \in C(\delta_Q)$ qui sont K-finies à gauche.

Il existe sur $C(\delta_Q)$ une forme linéaire positive G-invariante (unique à un scalaire près) donnée par

$$\oint_{G/Q} \varphi = \int_K \varphi(k)\, dk$$

Pour des fonctions φ et Ψ sur G posons

$$(\varphi, \Psi) = \int_K \varphi(k)\ \ \Psi(k)\ \ dk$$

Si $f \in C(G/Q)$ et $\varphi \in C(\delta_Q)$ alors $f\varphi \in C(\delta_Q)$ et la forme bilinéaire ci-dessus définit donc une dualité G-invariante entre C(G/Q) et $C(\delta_Q)$. Cette dualité identifie $\mathcal{L}(\delta_Q)$ au module d'Harish-Chandra des formes linéaires K-finies sur $\mathcal{L}_o(Q)$.

Il y a dans $\mathcal{L}(\delta_Q)$ un unique élément K-invariant φ_Q tel que $\varphi_Q(k) = 1$ pour $k \in K$.

On peut alors écrire l'intégrale de Poisson d'une fonction $f \in C(G/Q) \subset C(G/MAN)$ sous la forme

$$Pf(g) = \int_K (\ell(g^{-1})f(k)\varphi_Q(k)dk = (\ell(g^{-1})f, \varphi_Q) = (f,\ \ell(g)\,\varphi_Q)$$

On en déduit immédiatement le

Lemme 1.5. : Soient $f \in C^\infty(G/Q)$ et $u \in \mathcal{U}$. On a

$$r(u)\, Pf\,(g) = (\, \ell(g^{-1})f,\ \ell(u)\varphi_Q)$$

1.6. Appliquons ce qui précède au cas du parabolique minimal MAN. Notons simplement δ le caractère de MAN introduit en 1.4, $\mathcal{L}(\delta)$ le module correspondant et φ_o son vecteur K-fixe. Reprenons les notations de la proposition 1.3 et notons $V^\perp$ l'orthogonal de V dans $\mathcal{L}(\delta)$. Le lemme 1.4 entraîne le suivant :

Lemme 1.6. : L'idéal à gauche $\mathcal{U}_V$ coincide avec l'ensemble des $u \in \mathcal{U}$ tels que $\ell(u)\varphi_o \in V^\perp$ (c'est-à-dire l'annulateur de φ_o mod $V^\perp$, élément de $\mathcal{L}(\delta)\,/\,V^\perp$)

1.7. La bijectivité de la transformation de Poisson se traduit algébriquement par l'énoncé suivant :

Théorème . Le vecteur φ_o engendre $\mathcal{L}(\delta)$ comme $\mathcal{U}$-module. L'annulateur de φ_o dans $\mathcal{U}$ est l'idéal à gauche engendré par k et $\mathcal{U}_+^K$.

La démonstration de la proposition 1.3 s'en déduit maintenant facilement : soit F une fonction C^∞ sur G/K telle que $r(u)\ F = 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}_V$. Comme $\mathcal{U}_V$ contient $\mathcal{U}_+^K$ la fonction F est harmonique, donc intégrale de Poisson Pf d'une hyperfonction f sur G/MAN. En développant F en série de fonctions K-finies on peut supposer que $f \in \mathcal{L}_o$. le Lemme 1.4 entraine que f est orthogonale au sous-module $\ell(\mathcal{U}_V)\varphi_o$ de $\mathcal{L}(\delta)$. Mais du théorème qu'on vient de rappeler on déduit, grâce au lemme 1.6, l'égalité $\ell(\mathcal{U}_V)\varphi_o = V^\perp$. On a donc $f \in V$, cqfd.

1.8. Par un raisonnement analogue, la dualité entre $\mathcal{L}_o$ et $\mathcal{L}(\delta)$ permet, grâce au théorème 1.7, de déterminer des systèmes de générateurs de l'idéal à gauche $\mathcal{U}_V$:

Proposition : Soit $\mathcal{X}$ un idéal à gauche de $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{U}\mathfrak{k} + \mathcal{U}\,\mathcal{U}_+^K \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}_V$. Si toute $f \in \mathcal{B}_o$ telle que $r(\mathcal{X})\,Pf = o$ appartient au sous-module V alors $\mathcal{X} = \mathcal{U}_V$.

Démonstration : Grâce au lemme 1.5, l'hypothèse s'écrit
$V^\perp \subseteq \ell(\mathcal{X})\,\varphi_o \subseteq \ell(\mathcal{U}_V)\,\varphi_o$.

1.9. Considérons le cas où V est le sous-espace de $\mathcal{B}_o$ formé des fonctions invariantes à droite par un parabolique $Q \supseteq MAN$. On identifie V à $\mathcal{B}_o(Q)$, et, par suite, $\mathcal{B}(\delta_Q)$ à $\mathcal{B}_o/\mathcal{B}_o(Q)^\perp$ et φ_Q à φ_o mod $\mathcal{B}_o(Q)^\perp$. L'adhérence de $\mathcal{B}_o(Q)$ dans l'espace des hyperfonctions sur G/MAN coïncide avec l'espace des hyperfonctions sur G/Q (considérées comme hyperfonctions sur G/MAN, invariantes par Q). On a donc, dans ce cas :

Proposition : Soit $\mathcal{U}_Q$ l'idéal à gauche de $\mathcal{U}$ formé des éléments u tels que $r(u)\,Pf = 0$ pour toute fonction f sur G/Q. Alors

1) $\mathcal{U}_Q$ coïncide avec l'annulateur de φ_Q dans $\mathcal{U}$

2) Soit F une fonction sur G/K. Alors F est l'intégrale de Poisson d'une hyperfonction sur G/Q si et seulement si $r(u)\,F = 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}_Q$.

1.10. Nous présenterons dans la section 5 une description conjecturale de la variété caractéristique de l'idéal $\mathcal{U}_Q$, suggérée par la "philosophie" de la méthode des orbites. Mais le résultat principal de cet article est la caractérisation des intégrales de Poisson du bord de Shilov d'un domaine hermitien symétrique, autrement dit, la détermination explicite d'un ensemble de générateurs de l'idéal $\mathcal{U}_Q$ dans la situation, remarquablement privilégiée, où G/K est isomorphe à un domaine borné hermitien symétrique Ω et où Q est le stabilisateur d'un point du bord de Shilov de Ω.

2. Dans cette section nous faisons les rappels nécessaires concernant les domaines hermitiens symétriques et nous énonçons nos résultats.

2.1. On considère un espace hermitien symétrique irréductible non compact G/K. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan. On note $X \longmapsto \overline{X}$ la conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{g}$.

On a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$, avec $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$,

$$[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^+] \subseteq \mathfrak{p}^+ \quad , \quad [\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^-] \subseteq \mathfrak{p}^- \quad , \quad [\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-] \subseteq \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$$

$$[\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^+] = 0 \quad , \quad [\mathfrak{p}^-, \mathfrak{p}^-] = 0 \, .$$

La représentation adjointe de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{p}^+$ (ou dans $\mathfrak{p}^-$) est irréductible. Le centre de $\mathfrak{k}$ est de dimension 1, et on note Z l'élément du centre de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ tel que $[Z,X] = X$ pour tout $X \in \mathfrak{p}^+$. On a $Z \in i\mathfrak{k}$.

2.2. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{k}$. Alors $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

On note Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

On note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)$ l'espace radiciel de racine $\alpha \in \Delta$. On a $\overline{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(-\alpha)$.

On note $\Delta_{\mathfrak{k}}$ l'ensemble $\{\alpha \in \Delta ; \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) \subset \mathfrak{k}\}$ des racines compactes et $\Delta_{\mathfrak{p}}$ l'ensemble $\{\alpha \in \Delta , \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) \subset \mathfrak{p}\}$ des racines non compactes.

On pose $\Delta_{\mathfrak{p}}^+ = \{\alpha \in \Delta , \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha) \subset \mathfrak{p}^+\}$ et on choisit un ordre (provisoire, voir 2.7)) sur Δ tel que $\Delta_{\mathfrak{p}}^+$ soit l'ensemble des racines positives non compactes.

2.3. Pour toute $\alpha \in \Delta$, on choisit des vecteurs $E_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)$ et $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(-\alpha)$ de façon que $[E_\alpha , E_{-\alpha}] = H_\alpha$, avec $\alpha(H_\alpha) = 2$. On peut faire en sorte que $E_{-\alpha} = \overline{E}_\alpha$, lorsque $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}^+$.

2.4. On dit que deux racines α et β sont fortement orthogonales si $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ ne sont pas racines. On construit un ensemble maximal de racines fortement orthogonales $\Psi_1,\ldots,\Psi_r$ en prenant pour Ψ_1 la plus haute racine positive non compacte puis, pour $j = 1,2,\ldots$ en prenant pour ψ_{j+1} la plus haute racine positive non compacte fortement orthogonale à $\psi_1,\ldots,\psi_j$.

2.5. On note h_- le sous-espace $\mathbb{C}H_{\psi_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}H_{\psi_r}$ de $h_{\mathbb{C}}$. Lorsque deux formes linéaires α , β sur $h_{\mathbb{C}}$ ont même restriction à h_- on écrit $\alpha \equiv \beta$.
On note γ_i la restriction de ψ_i à h_- , pour $i = 1,\ldots,r$

2.6. Théorème [15]

1) On note $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des poids non nuls de h_- dans $g_{\mathbb{C}}$. Alors $\tilde{\Delta}$ est l'un des deux ensembles suivants

a) $\tilde{\Delta} = \{\pm \frac{1}{2}\gamma_i \pm \frac{1}{2}\gamma_j \, , \, \pm\gamma_i \, , \, 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant r \, , \, i \neq j\}$.

b) $\tilde{\Delta} = \{\pm \frac{1}{2}\gamma_i \pm \frac{1}{2}\gamma_j \, , \, \pm\gamma_i \, , \, \pm\frac{1}{2}\gamma_i \, , 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant r \, , \, i \neq j\}$.

Le domaine G/K est de type tube si et seulement si on est dans le cas a) [ ] .

2) Une racine non compacte a une restriction non nulle à h_- . Soit $\tilde{\Delta}_{p^+}$ l'ensemble des poids de h_- dans p^+ . Alors dans le cas a)

$$\tilde{\Delta}_{p^+} = \{\tfrac{1}{2}(\gamma_i+\gamma_j) \, , \, \gamma_i \, , \, 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant r \, , \, i \neq j\},$$

dans le cas b)

$$\tilde{\Delta}_{p^+} = \{\tfrac{1}{2}(\gamma_i+\gamma_j) \, , \, \gamma_i \, , \, \tfrac{1}{2}\gamma_i \, , \, 1 \leqslant i \, , \, j \leqslant r \, , \, i \neq j\}.$$

3) Si $\alpha \in \Delta$ et $\alpha \equiv \psi_i$ alors $\alpha = \psi_i$.

Vu 3) on abusera des notations en écrivant γ_i à la place de ψ_i.

2.7. Il existe un ordre sur Δ tel que Δ_{p^+} soit toujours l'ensemble des racines positives non compactes et que, en notant Δ_k^+ l'ensemble des racines positives compactes et $\tilde{\Delta}_k^+$ l'ensemble

$$\{\alpha|_{h_-} \, , \, \alpha \in \Delta_k^+ \, , \, \alpha|_{h_-} \neq 0\} \quad \text{on ait}$$

dans le cas a)

$$\tilde{\Delta}_k^+ = \{\tfrac{1}{2}(\gamma_i-\gamma_j) \, , \, 1 \leqslant i < j \leqslant r\}$$

dans le cas b)

$$\tilde{\Delta}_k^+ = \{\tfrac{1}{2}(\gamma_i-\gamma_j) \, , \, 1 \leqslant i < j \leqslant r\} \cup \{\tfrac{1}{2}\gamma_i \, , \, 1 \leqslant i \leqslant r\} .$$

On supposera désormais que Δ est muni de cet ordre là.

Pour $\beta \in \tilde{\Delta}$ on note

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\beta) = \bigoplus_{\alpha|\mathfrak{h}_- = \beta} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)$$

l'espace radiciel de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{h}_-$ correspondant.

On pose $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}(\beta) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\beta)$ et $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}(\beta) = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\beta)$.

D'après le théorème 2.6 on a, pour $1 \leqslant i , j \leqslant r$, $i \neq j$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\gamma_i) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\psi_i)$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}\right) \subset \mathfrak{p}^+$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i - \gamma_j}{2}\right) \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) .$$

De plus la dimension de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\gamma_i)$ est égale à 1, la dimension de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i \pm \gamma_j}{2}\right)$ est indépendante de (i,j), pour $i \neq j$, les dimensions de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)$ et $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)$ sont égales et indépendantes de i.

2.8. Posons $Z_o = \frac{1}{2}(H_{\gamma_1} + \ldots + H_{\gamma_r})$.

Si G/K est de type tube on a $Z = Z_o$ et ad Z a pour valeurs propres 0, 1 et -1, les espaces propres correspondants étant $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{p}^-$.

Si G/K n'est pas de type tube, alors ad Z_o a pour valeurs propres $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$. On notera a la multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ et b celle de la valeur propre 1. L'espace propre de valeur propre 1 est contenu dans $\mathfrak{p}^+$; les sous-espaces de $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ formés de vecteurs propres de valeur propre $\frac{1}{2}$ ont même dimension, égale à $\frac{a}{2}$.

2.9. On pose $X_{\gamma_i} = E_{\gamma_i} + E_{-\gamma_i}$, $i = 1,\ldots,r$.

Comme on a supposé que $E_{-\gamma_i} = \overline{E_{\gamma_i}}$, on a $X_{\gamma_i} \in \mathfrak{p}$. On pose

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R} X_{\gamma_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} X_{\gamma_r} ,$$

Alors a est une sous-algèbre abélienne maximale de p.

2.10. Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $g_{\mathbb{C}}$. On considère la "transformation de Cayley" $c \in G_{\mathbb{C}}$, définie par

$$c = c_1 \dots c_r \quad \text{où} \quad c_i = \exp\left(-\frac{\Pi}{4}(E_{\gamma_i} - E_{-\gamma_i})\right).$$

On a (comme cela se voit facilement dans $SL(2,\mathbb{C})$)

$$\mathrm{Adc}\,(H_{\gamma_i}) = X_{\gamma_i}$$

et

$$c = \exp\left(-\sum_{i=1}^{r} E_{\gamma_i}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{r} (\mathrm{Log}\sqrt{2}) H_{\gamma_i}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{r} E_{-\gamma_i}\right).$$

On a donc

$$\mathrm{Adc}(h_-) = a_{\mathbb{C}}.$$

Pour alléger les notations on écrira désormais c au lieu de Adc et pour $\mu \in h_-^*$, on notera $c(\mu)$ la forme linéaire sur $a_{\mathbb{C}}$ définie par

$$c(\mu)(X) = \mu(c^{-1}(X)) \quad \text{pour} \quad X \in a_{\mathbb{C}}.$$

L'ensemble R des racines de a dans g coïncide donc avec $c(\tilde{\Delta})|_a$.

On munit R de l'ordre pour lequel l'ensemble R^+ des racines positives est $c(\tilde{\Delta}_{p}^{+} \cup \tilde{\Delta}_{k}^{+})$. On note n^+ (resp. n^-) la somme des sous-espaces radiciels correspondant aux éléments de R^+ (resp. $-R^+$). On a $g = k \oplus a \oplus n^+$, décomposition d'Iwasawa de g.

2.11. Posons $A_o = \frac{1}{2}(X_{\gamma_1} + \dots + X_{\gamma_r})$. On a $A_o = c(Z_o)$. Les valeurs propres de $\mathrm{ad}_g A_o$ sont donc 0, ±1, $\pm\frac{1}{2}$. On note n^1 (resp. $n^{1/2}$) l'espace propre de valeur propre 1 (resp. $\frac{1}{2}$) ; on note $g(o)$ l'espace propre de valeur propre 0 et on pose $n^o = n^+ \cap g(o)$. On a

$$n^+ = n^o \oplus n^{1/2} \oplus n^1$$

$$\dim n^{1/2} = a \;, \quad \dim n^1 = b \;.$$

2.12. Notons $n^{-1/2}$ (resp. n^{-1}) l'espace propre de valeur propre $-\frac{1}{2}$ (resp. -1) de $\mathrm{ad}_g A_o$ et posons

$$q = n^{-1} \oplus n^{-1/2} \oplus g(o).$$

On a alors

$$q = g \cap c(k_{\mathbb{C}} + p^-).$$

2.13. On note $K_{\mathbb{C}}$ le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $k_{\mathbb{C}}$. L'application $(X,k,Y) \longmapsto \exp X\, k\, \exp Y$ est un difféomorphisme holomorphe de $p^+ \times K_{\mathbb{C}} \times p^-$ sur un ouvert U de $G_{\mathbb{C}}$. On note $P^{\pm} = \exp p^{\pm}$ les sous-groupes analytiques, abéliens, de $G_{\mathbb{C}}$, d'algèbres de Lie $p^{\pm}$. Alors $K_{\mathbb{C}} P^-$ est un sous-groupe parabolique maximal de $G_{\mathbb{C}}$ et la variété $M = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ est un espace hermitien symétrique compact.

L'application $X \longmapsto \exp X\, K_{\mathbb{C}}\, P^-$ est un difféomorphisme holomorphe de p^+ sur un ouvert de M.

On écrira

$$g = \exp X(g) \quad k(g) \quad \exp Y(g)$$

la décomposition d'un élément $g \in U$ selon $P^+ K_{\mathbb{C}} P^-$.

On suppose que G et K sont les sous-groupes analytiques de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbres de Lie g et k . On a $G \subset U$ et $G \cap K_{\mathbb{C}} P^- = K$. L'application $g \longmapsto X(g)$ induit un difféomorphisme holomorphe de G/K sur un ouvert borné Ω de p^+ (c'est la réalisation d'Harisch-Chandra de G/K comme domaine borné [2]).

On considère l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω dans p^+ et le bord de Shilov $S \subset \bar{\Omega} \setminus \Omega$ défini par l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et holomorphes dans Ω.

Le groupe G agit naturellement sur M et préserve $\bar{\Omega}$. Le bord de Shilov S est une G-orbite . Le point $U_o = -\left(\sum_{i=1}^{r} E_{\gamma_i}\right)$ de p^+ appartient à S ; donc, d'après 2.10, le bord S considéré comme sous-ensemble de M, est la G-orbite du point $c\, K_{\mathbb{C}}\, P^-$. Le stabilisateur dans G de ce point est le sous-groupe parabolique $Q = G \cap c\, K_{\mathbb{C}}\, P^-\, c^{-1}$; il a pour algèbre de Lie l'algèbre q définie en (2.12). [14]

Soit A (resp. N^-) le sous groupe analytique de G d'algèbre de Lie a (resp. n^-). Soit M le centralisateur de A dans K. Le sous groupe $M A N^-$ est un sous groupe parabolique minimal de G. On a $MAN^- \subseteq Q$. On peut donc considérer les [hyper]-fonctions sur S comme des [hyper]fonctions sur le bord maximal G/MAN^-, invariantes à droite par Q.