Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Scuola Normale Superiore, Pisa
Adviser: E. Vesentini

943

Vincenzo Ancona
Giuseppe Tomassini

Modifications Analytiques

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Scuola Normale Superiore, Pisa
Adviser: E. Vesentini

943

Vincenzo Ancona
Giuseppe Tomassini

Modifications Analytiques

Springer-Verlag
delberg New York 1982

Auteurs

Vincenzo Ancona
Istituto Matematico "U.Dini", Università di Firenze
Viale Morgagni 67 A, 50139 Firenze, Italy

Giuseppe Tomassini
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri 7, 56100 Pisa, Italy

AMS Subject Classifications (1980): 14-XX, 32-XX

ISBN 3-540-11570-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-11570-6 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printed in Germany

ısbach/Bergstr.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Une <u>modification</u> d'espaces analytiques (ou de variétés algébriques) est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

de morphismes d'espaces analytiques (ou de variétés algébriques) où p et f sont propres et surjectifs, i et j sont des plongements fermés et f induit un isomorphisme de $X' \setminus i(Y')$ sur $X \setminus j(Y)$.

Le problème de l'existence des modifications se pose de la manière suivante. Etant donné les diagrammes

$$(C)\quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ Y & & \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ccc} Y' & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

trouver sous quelles conditions

(C') il existe $X, j : Y \to X$ et $f : X' \to X$ tels que

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

soit une modification (existence d'une contraction)

(D') il existe X', $i:Y' \longrightarrow X'$ et $f:X' \longrightarrow X$ tels que

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

soit une modification (existence d'une dilatation).

Le but de ce livre est de donner une exposition des résultats principaux concernants la théorie des modifications analytiques (i.e. des modifications d'espaces analytiques) et les questions liées.

Le livre se compose de cinq chapitres, chacun desquels est précédé par une introduction. Ici donc nous nous bornons à rappeler très rapidement les étapes les plus significatives dans le développement de la théorie.

On peut dire que la théorie débute avec le travail fondamental de Castelnuovo et Enriques sur la théorie des surfaces algébriques ([29]), qui est née en géometrie algébrique en liaison avec le problème de la décomposition en produit d'éclatements des transformations birationnelles et de l'existence des modèles minimaux. Dans cette direction les résultats principaux ont été démontrés par Hironaka et Moišezon ([48], [68], [69]).

Dans le cas analytique le premier résultat sur l'existence des "contractions à un point" (i.e. Y est un point) est dû à Grauert ([40]) qui dégage la notion de négativité faible d'un fibré et qui démontre que la contraction de X' à X existe pourvu que le fibré normal de Y' dans X' soit faiblement négatif.

Le théorème d'existence des contractions dans le cas où $\dim_{\mathbb{C}} Y > 0$ est dû à Nakano (cas lisse) et Fujiki ([73], [38], [37]).

Mais déjà Moišezon avait étudié en détail le cas où Y',X' et Y étaient des variétés analytiques compactes connexes ayant le nombre maximal de fonctions méromorphes globales (variétés de Moišezon) ([68]).

Un autre cadre naturel pour l'étude des modifications est celui des espaces algébriques de M. Artin ([13], [58]). A M. Artin on doit la notion de modification formelle d'espaces algébriques (ou analytiques) formels et la démonstration de l'existence des modifications à partir de l'existence des modifications formelles ([15]) (la démonstration de la version analytique des théorèmes d'existence de Artin a constitué une des motivations principales des recherches des auteurs ([7])).

D'autre part Artin démontre aussi que la catégorie des espaces algébriques complets sur $\mathbb{C}$ est équivalente à celle des espaces de Moišezon (théorème d'algébrisation) ainsi révélant que certains problèmes concernants les modifications analytiques sont, en fait, des problèmes de nature algébrique.

En effet, il existe un lien très étroit entre les modifications analytiques, les espaces de Moišezon (et les espaces algébriques sur $\mathbb{C}$). Les fibres d'une modification analytique sont des espaces de Moišezon donc des espaces algébriques et, réciproquement, tout espace de Moišezon peut se plonger comme "sous-espace exceptionnel" d'une modification ([8]). De plus on peut dégager une notion relative d'espace de Moišezon, de façon que si $f:(Y',X') \longrightarrow (Y,X)$ est une modification, X' est de Moišezon relativement à X et Y' est de Moišezon relativement à Y. Cette notion est due à Moišezon ([71]). On démontre alors un théorème d'algébrisation des espaces de Moišezon relatifs, analogue à celui de Artin et on trouve que toutes les modifications sont relativement algébrisables ([3]).

En utilisant ce théorème on peut faire une étude détaillée des faisceaux amples sur les espaces analytiques et démontrer le théorème de Fujiki en toute généralité (V, §3) ([4], [5]).

Nous nous sommes proposés, dans ce livre, de donner une description assez complète de tous ces faits et, dans le cas analytique d'exposer en détail les démonstrations des résultats les plus récents. Ce qui en résulte, il nous semble, c'est surtout qu'il existe un lien plus étroit qu'on peut l'imaginer au début entre l'étude des modifications analytiques et celui des modifications algébriques.

CHAPITRE I

GEOMETRIE ANALYTIQUE FORMELLE

Dans ce chapitre on rappelle les définitions et les faits généraux de la théorie des espaces analytiques formels et des algèbres analytiques formelles en renvoyant à [44] et [24] pour les détails.

Dans le dernier paragraphe on démontre un "théorème de rigidité" pour les algèbres analytiques formelles ([7]) qui sera à la base du théorème d'existence des modifications analytiques du chapitre IV.

§ 1. Espaces analytiques formels

1. Pour la théorie générale des espaces analytiques formels voir [44], [20], [24].

Soient $(X,\mathcal{O}_X)$ un espace analytique (sur $\mathbb{C}$), $Y \subset X$ un sous-espace analytique fermé défini par un $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent $\mathcal{I}$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Notons $\hat{\mathcal{F}}$ la limite projective $\lim \mathrm{proj}\ \mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F}$ du système $\{\mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

La restriction de $\hat{\mathcal{F}}$ à Y, qu'on note encore $\hat{\mathcal{F}}$, est appelée le <u>complété formel</u> de $\mathcal{F}$ le long de Y. En particulier si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ on appelle <u>complété formel</u> de X le long de Y l'espace annelé $\hat{X}_{|Y} = (Y,\hat{\mathcal{O}}_X)$.

Si $x \in Y$, l'anneau local $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est noethérien et pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$ le complété $\hat{\mathcal{F}}$ est un $\hat{\mathcal{O}}_X$-module cohérent ([20]). Un morphisme $f:X' \longrightarrow X$ d'espaces analytiques définit, de façon naturelle, un morphisme $\hat{f}:\hat{X}'_{|Y'} \longrightarrow \hat{X}_{|Y}$, où $Y' = f^{-1}(Y)$, qu'on appelle <u>complété formel</u> de f.

Soient $\mathcal{I}$ un $\hat{\mathcal{O}}_X$-idéal cohérent, $\mathcal{X} = \mathrm{supp}\ \hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{I}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ la restriction à $\mathcal{X}$ du faisceau $\hat{\mathcal{O}}_X/\mathcal{I}$.

On appelle $(X, \mathcal{O}_X)$ un <u>modèle local</u> d'espace analytique formel.

Un <u>espace analytique formel</u> est un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres locales tel que tout point admet un voisinage isomorphe à un modèle local.

Les espaces analytiques formels forment une catégorie dans laquelle les produits fibrés finis existent, qui contient celle des espaces analytiques ordinaires ([24]).

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique formel notons I_X le $\mathcal{O}_X$-idéal cohérent défini par

$$I_X(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) : s_x \in M_x, \forall x \in U\}$$

U étant un ouvert de X, M_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et s_x le germe de s en x.

On appelle <u>idéal de définition</u> de $(X, \mathcal{O}_X)$ tout $\mathcal{O}_X$-idéal J ayant la propriété suivante: pour tout $x \in X$ il existe un entier $k = k(x)$ tel que au voisinage de x on ait $I_X^k \subset J \subset I_X$. Avec cette définition I_X est "le plus grand idéal de definition" de X.

Si J est un idéal de définition de X, pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'espace annelé $X_k = (X, \mathcal{O}_X / J^{k+1})$ est un espace analytique ordinaire et dans la catégorie des espaces analytiques formels on a l'égalité $X = \lim \text{ind}\ X_k$ ([24]).

Lorsque $X = X_{|Y}$, l'espace analytique X_k s'appelle le k-ième <u>voisinage infinitésimal</u> de Y dans X.

Finalement on dit qu'un morphisme d'espaces analytiques formels $f : X \longrightarrow X'$ est <u>adique</u> si pour tout idéal de définition J de X, $f^{\star} J$ est un idéal de définition de X'.

2. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique formel et $X = \lim \text{ind}\ X_k$. On dit que X est un <u>espace formel de Stein</u> si X_o (et donc tous les X_k) est un espace de Stein.

Dans le cadre des espaces analytiques formels on peut poser le problème suivant: soient $X = X_{|Y}$ et $X' = X'_{|Y'}$ deux complétés formels d'espaces analytiques; étant donné un isomorphisme $X \approx X'$ est-ce qu'il existe un isomorphisme d'un voisinage de Y dans X sur un voisinage de Y' dans X'?

On sait, d'après M. Artin ([14]) que la réponse est affirmative dans le cas local (i.e. lorsque X,Y,X',Y' sont des germes d'espaces analytiques). En général il y a des contrexemples ([12]).

Au chapitre IV on verra des conditions suffisantes pour l'existence d'un tel isomorphisme.

§ 2. Algèbres analytiques formelles

1. On appelle algèbre analytique formelle tout anneau local en un point d'un espace analytique formel.

Si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est une algèbre analytique formelle on appelle idéal de définition de A tout idéal $I = \mathcal{I}_x$ où $\mathcal{I}$ est un idéal de définition d'un voisinage ouvert de x dans X.

Un homomorphisme local $A \longrightarrow B$ d'algèbres analytiques formelles est dit adique si pour tout idéal de définition I de A, IB est un idéal de définition de B.

La catégorie des algèbres analytiques formelles (dans laquelle les morphismes sont les homomorphismes locaux) contient celle des $\mathbb{C}$-algèbres analytiques et celle des $\mathbb{C}$-algèbres formelles (i.e. des algèbres quotient $\mathbb{C}[T_1,..,T_N]/B$). Dans cette catégorie les co-produits fibrés finis existent.

Soit $A = \mathcal{O}_{X,x}$ une algèbre analytique formelle. Pour tout système $T = \{T_1,..,T_N\}$ d'indéterminées notons $A\{T_1,..,T_N\}^-$ (ou $A\{T\}^-$ en abrégé) l'algèbre analytique formelle $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N,(x,o)}$. Le complété de $A\{T\}^-$ par rapport à son idéal maximal est l'algèbre $\hat{A}[[T]] = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}[[T]]$ ($\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ étant le complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ par rapport à son idéal maximal).

Un élément de $A\{T\}^-$ est donc en particulier une série formelle en $T_1,..,T_N$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Soient $A = \mathcal{O}_{X,x}$ une algèbre analytique formelle, f un élément de $A\{T_1,..,T_N\}^-$ et $a_1,..,a_N$ des éléments de l'idéal maximal de A. On peut calculer $f(a_1,..,a_N)$ de la manière suivante. Les $a_1,..,a_N$ déterminent, au voisinage de x, un morphisme $X \longrightarrow \mathbb{C}^N$ (qui envoie x dans l'origine) d'où un morphisme $X \longrightarrow X \times \mathbb{C}^N$ (qui envoie x dans (x,o)). Il s'ensuit qu'il existe un (seul) homomorphisme $u:\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N,(x,o)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ qui est l'identité sur $\mathcal{O}_{X,x}$ (identifié a un sous-anneau local de $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N,(x,o)}$ par la projection $X \times \mathbb{C}^N \longrightarrow X$) et tel que $u(t_j) = a_j$, $1 \leq j \leq N$, $(t_1,..,t_N)$ coordonnées dans $\mathbb{C}^N$). On pose alors par définition $f(a_1,..,a_N) = u(f)$.

Si $I \subset A$ est un idéal, $f \in \hat{A}\{T_1,..,T_N\}^-$ est tel que $f(0,..,0) \in I$ et $a_1,..,a_N \in I$ alors $f(a_1,..,a_N) \in I$.

En effet on a $f(a_1,..,a_N) \in I\hat{A}$ parce que dans ce complété f n'est rien d'autre qu'une série formelle à coefficients dans A; donc $f(a_1,..,a_N) \in I$ puisque $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A.

2. Soient maintenant X, $a \in X$ et $f_1,..,f_m \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^m,(a,o)}$, $t = (t_1,..,t_m)$ un système de coordonnées de $\mathbb{C}^m$. Dénotons par $J_f(x,t)$ le déterminant jacobien $\det(\partial f_i/\partial t_j)$; $J_f(x,t) \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^m,(a,o)}$. On a le "théorème des fonctions implicites":

<u>Théorème</u> 1. <u>Soient</u> $f_1,..,f_m \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^m,(a,o)}$, $a \in X$ <u>telles que</u>:

(i) $f_1(O) \equiv \quad \equiv f_m(O) \equiv O \bmod M_a$ (M_a <u>idéal maximal de</u> $\mathcal{O}_{X,a}$)

(ii) $J_f(a,O) \not\equiv O \bmod M_a$.

<u>Alors il existe</u> $g_1,..,g_m \in M_a$ <u>tels que</u> $f_j(g_1,..,g_m) = O$, $1 \leq j \leq m$. <u>De plus</u> $g_1,..,g_m$ <u>sont univoquement déterminés</u>.

<u>Preuve</u>. Soit $U = V \times W$ un voisinage de (a,O) dans $X \times \mathbb{C}^m$ tel que $f_1,..,f_m \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^m}(U)$. L'application $U \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$(y,z) \longrightarrow J_f(y,z) \mod M_y$ est continue, donc, quitte à restreindre U, on peut supposer $J_f(y,z) \not\equiv 0 \mod M_y$ sur U. Or, comme on a $\mathcal{X} = \lim \text{ind } X_k$ (X_k espace analytique) les $f_1,..,f_m$ déterminent pour tout entier k des éléments $f_1^{(k)},...,f_m^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{X_k \times \mathbb{C}^m}(U)$ tels que, pour tout $(y,z) \in U$, on ait $J_{f^{(k)}}(y,z) \equiv J_f(y,z) \not\equiv 0 \mod M_y \mathcal{O}_{X_k,y}$.

On peut alors appliquer le théorème classique des fonctions implicites pour obtenir des éléments uniques $g_i^{(k)} \in \mathcal{O}_{X_k}(V)$, $1 \leq i \leq m$, tels que $f_j^{(k)}(g_1^{(k)},...,g_m^{(k)}) = 0$, $1 \leq j \leq m$.

A cause de l'unicité les éléments $g_1^{(k)},...,g_m^{(k)}$ donnent par passage à la limite projective des éléments $g_1,...,g_m$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$ qui satisfont au théorème.

<u>Théorème</u> 2. <u>Soit</u> $A = \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ <u>et soit</u> $f \in A\{T\}^-$. <u>Si</u> $S_1,..,S_N$ <u>sont des indéterminées on a dans</u> $A\{T,S\}^-$ <u>la formule de Taylor</u>.

$$f(T+S) = f(T) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial T_j}(T)S_j + \sum_{i,j=1}^{N} G_{ij}(T,S)S_iS_j$$

<u>où</u> $G_{ij} \in A\{T,S\}^-$, $1 \leq i,j \leq N$.

<u>Preuve</u>. Précisons d'abord la signification de $f(T+S)$. f est un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathbb{C}^N,(x,0)}$ donc il définit un morphisme $f: U \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ où U et V sont des voisinages de x et o, respectivement dans $\mathcal{X}$ et $\mathbb{C}^N$.

D'autre part on a le "morphisme somme" $\sigma: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ et par suite un morphisme $g: \mathcal{X} \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{C}^N$; $f \circ g$ donne bien un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N,(x,0,0)}$ qu'on note $f(T+S)$.

Revenons à la démonstration. On peut supposer que $\mathcal{X}$ est le complété formel d'un espace analytique X le long d'un sous-espace analytique fermé Y défini par un $\mathcal{O}_X$-idéal I. Alors f est déterminé par une suite $(f^{(0)},f^{(1)},...)$ où $f^{(k)} \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N}(U \times V)$, $U \times V$ voisinage de Stein de (x,o) dans $X \times \mathbb{C}^N$, et $f^{(k+1)} - f^{(k)} \in \Gamma(U \times V, I^{k+1} \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N})$. Posons

$$g = f(T + S) - f(T) - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial T_j}(T) S_j ;$$

$g \in \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N, (x,o,o)}$ et il est clair que g est déterminé par une suite $(g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots)$ où $g^{(k)} \in \Gamma(U \times V, \mathcal{Y})$, $g^{(k+1)} - g^{(k)} \in \Gamma(U \times V, I^{k+1}\mathcal{Y})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N}$, telle que

$$g^{(k)} = f^{(k)}(T + S) - f^{(k)}(T) - \sum_{j=i}^{N} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial T_j}(T) S_j .$$

Il en découle que pour tout k, $g^{(k)}$ est dans l'idéal de $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N, (x,o,o)}$ engendré par les monômes $S_i S_j$ $1 \leq i,j \leq N$ et donc g est dans l'idéal de $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N, (x,o,o)}$ engendré par les monômes $S_i S_j$, $1 \leq i,j \leq N$.

<u>Théorème</u> 3. <u>Soit</u> $\varphi : A \longrightarrow B$ <u>un homomorphisme adique d'algèbres analytiques formelles</u>. <u>Il existe un entier</u> N <u>tel que</u> B <u>soit isomorphe en tant que</u> A-<u>algèbre à un quotient</u> $A\{T_1, \ldots, T_N\}^-/J$ <u>où</u> J <u>est un idéal</u>.

<u>Preuve</u>. Posons $A = \mathcal{O}_{X,x}$, $B = \mathcal{O}_{X,x'}$ et soit $f : X' \longrightarrow X$ le morphisme correspondant à φ (au voisinage de x'). Soit $\mathcal{I}$ un idéal de définition de X de telle sorte que $\mathcal{I}\,\mathcal{O}_{X'}$ est un idéal de définition de X'. Soit $I = \mathcal{I}_x$ et posons $B_1 = B/IB$ et $A_1 = A/IA$. On a un homomorphisme local $A_1 \longrightarrow B_1$ et, comme A_1 et B_1 sont des anneaux locaux d'espaces analytiques on a un homomorphisme surjectif $\psi : A_1\{z_1, \ldots, z_q\} \longrightarrow B_1$. Soient $c_1, \ldots, c_q$ des éléments de B qui relèvent $\psi(z_1), \ldots, \psi(z_q)$. Soient $m_1, \ldots, m_q \in IB$ dont les classes modulo I^2B engendrent le B/IB-module IB/I^2B. On a $m_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\ell} a_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ où $a_{\alpha\beta} \in I$ et $b_{\alpha\beta} \in B$. Notons $c_{q+1}, \ldots, c_N$ les éléments $b_{\alpha\beta}$.

Soit $A' = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N,(x,0)}$.

Compte tenu de la remarque faite dans 1, il existe un seul A-homomorphisme $u:A' \longrightarrow B$ qui coïncide avec φ sur A et tel que $u(t_j) = c_j$, $1 \leq j \leq N$.

On doit montrer que u est surjectif. A ce propos soit H un voisinage compact, semi-analytique, de Stein, de x' dans X' tel que:

(i) $c_1,..,c_N$ soient définis au voisinage de H

(ii) il existe un voisinage compact K, de Stein, de x tel que $K \subset f^{-1}(H)$ et que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Z \times \mathbb{C}^N}(K \times L) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z'}(H)$ soit encore surjectif (où $L \subset \mathbb{C}^N$ est un voisinage compact de Stein de l'origine, $Z = (X,\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ et $Z' = (X',\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'})$;

(iii) si $B_H = \mathcal{O}_{X'}(H)$ et $I_K = \mathcal{I}(K)$, les classes modulo $I_K^2 B_K$ des combinaisons linéaires à coefficients dans I_K de $c_{q+1},..,c_N$ engendrent le B_H/I_KB_H-module $I_KB_H/I_K^2B_H$

(tout cela est possible puisque B_H est noethérien ([24])).

Posons $A'_K = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N}(K \times L)$, et envisageons l'homomorphisme $\operatorname{gr} \tilde{u}:\operatorname{gr} A'_K \longrightarrow \operatorname{gr} B_H$, gradué associé de $\tilde{u}:A'_K \longrightarrow B_H$. Par construction, les homomorphismes $A'_K/I_KA'_K \longrightarrow B_H/I_KB_H$ et $I_KA'_K/I_K^2A'_K \longrightarrow I_KB_H/I_K^2B_H$ sont surjectifs; par récurrence sur n, on déduit aussitôt qu'il en est de même de l'homomorphisme $I_KA'_K/I_K^nA'_K \longrightarrow I_KB_H/I_K^nB_H$ pour tout n, et a fortiori, de $\operatorname{gr} \tilde{u}$. On déduit de [28] (ch. 3, § 2, n. 8, cor. 2 du théorème 1) que l'extension de $\tilde{u}$ aux complétés I_K-adiques de A'_K et B_K, $\hat{A}'_K$ et $\hat{B}_H$, est surjective. Comme tout élément de $\hat{A}'_K$ ($\hat{B}_H$) donne par restriction un élément de $\mathcal{O}_{X \times \mathbb{C}^N,(x,0)}$ $(\mathcal{O}_{X',x'})$ on en déduit que u est surjectif en prenant un système fondamental de voisinages de x' dans X' du type H.

§ 3. Solutions d'équations analytiques formelles et théorème de rigidité.

1. Soit $\varphi:A \longrightarrow A'$ un homomorphisme adique d'algèbres analytiques formelles. On a vu que A' est isomorphe, en tant que A-algèbre, à un

quotient $A\{T_1,..,T_N\}^-/B$ où B est un idéal et N un entier convenable.

Si $B = (f_1,..,f_q)$ notons $J(B)$ l'idéal de $A\{T_1,..,T_N\}^-$ engendré par les mineurs d'ordre N de la matrice $(\partial f_i/\partial T_j)$ $(q \geq N)$. Si $\sum_{j=1}^{q} b_{ij} f_j = 0$, $1 \leq i \leq m$, est un système complet de relations entre les $f_1,..,f_q$ on note $C(B)$ l'idéal de $A\{T_1,..,T_N\}^-$ engendré par les mineurs d'ordre $q-N$ de la matrice (b_{ij}).

$J(B)$ et $C(B)$ seront appelés respectivement l'<u>idéal jacobien</u> et l'<u>idéal de Cramer</u> de B ([15]).

Les images $J(\varphi)$ et $C(\varphi)$ dans A' de $J(B)$ et $C(B)$, sont indépendantes de la raprésentation de A' comme quotient de $A\{T\}^-$ et seront appelées respectivement l'<u>idéal jacobien</u> et l'<u>idéal de Cramer</u> de φ.

Si $f: X' \longrightarrow X$ est un morphisme adique d'espaces analytiques formels on peut définir, à l'aide de ce qui précède, deux idéaux $\mathcal{O}_{X'}$-cohérents $J(f)$ et $C(f)$ qu'on appelle respectivement le <u>faisceau jacobien</u> et le <u>faisceau de Cramer</u> de f.

<u>Proposition</u> 4. <u>Un homomorphisme adique</u> $\varphi: A \longrightarrow A'$ <u>d'algèbres analytiques formelles est un isomorphisme si et seulement si</u> $J(\varphi) = C(\varphi) = A'$

<u>Preuve</u>. Si φ est un isomorphisme il est clair que $J(\varphi) = C(\varphi) = A'$. On va montrer le réciproque. Comme $C(\varphi) = A'$, il existe dans $C(\varphi)$ un élément inversible, donc, avec les notations ci-dessus, $C(B)$ contient un élément inversible dans A, ce qui entraîne que l'idéal $B = (f_1,..,f_q)$ est engendré par N éléments de $\{f_1,..,f_q\}$ on peut donc supposer $q = N$. De plus $J(\varphi)$ est engendré par l'élément $\det(\partial f_i/\partial T_j)$ $1 \leq i,j \leq N$, qui est alors inversible puisque $J(\varphi) = A'$. Le théorème des fonctions implicites (§2) assure alors que le A-endomorphisme de $A\{T_1,..,T_N\}^-$ qui envoie T_i sur f_i, $1 \leq i \leq N$, est un automorphisme