ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS

EDITED BY

S. FLÜGGE

VOLUME I

MATHEMATICAL METHODS I

WITH 37 FIGURES

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1956

HANDBUCH DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

S. FLÜGGE

BAND I

MATHEMATISCHE METHODEN I

MIT 37 FIGUREN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1956

Inhaltsverzeichnis.

Der ursprünglich für **Band I** oder **II** vorgesehene Artikel über: „Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ausgleichsrechnung und mathematische Statistik“ muß aus äußeren Gründen in einem anderen Band dieses Handbuches erscheinen.

Grundbegriffe der klassischen Analysis, gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionentheorie.

Von

J. Lense.

Mit 17 Figuren.

I. Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen.

1. Mengen. Eine Gesamtheit von Dingen heißt eine *Menge*, wenn von jedem Ding festgestellt werden kann, ob es zur Menge gehört oder nicht, und die zur Menge gehörigen Dinge, ihre *Elemente*, voneinander wohl unterscheidbar sind. Eine Menge M_1 ist *Teilmenge* der Menge M, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M ist.

Im folgenden betrachten wir Mengen von reellen Zahlen oder, falls wir die reellen Zahlen als Abszissen der Punkte der Abszissenachse eines Koordinatensystems deuten, *Punktmengen auf einer Geraden*. Unter einem *abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ versteht man die Menge aller reellen Zahlen x, für die $a \leq x \leq b$ gilt. Sollen die Endpunkte des Intervalls nicht in die Menge aufgenommen werden $(a < x < b)$, so spricht man vom *offenen Intervall* (a, b), dagegen vom *halboffenen Intervall* $[a, b)$ oder $(a, b]$, falls $a \leq x < b$ bzw. $a < x \leq b$ gelten soll.

Umgebung eines Punktes ist ein den Punkt enthaltendes offenes Intervall. Liegen in einer noch so kleinen Umgebung eines Punktes x_0 unendlich viele Punkte einer Menge M, so heißt x_0 ein *Häufungspunkt* oder eine *Häufungsstelle* der Menge (der Häufungspunkt braucht nicht zu M zu gehören).

Sind die Zahlen einer Menge M sämtlich $\leq b$, so nennt man M *nach oben beschränkt*, b eine *obere Schranke* von M; sind sie alle $\geq a$, so heißt die Menge *nach unten beschränkt*, a eine *untere Schranke*. Im ersten Fall gibt es eine kleinste obere Schranke G, die sog. *obere Grenze* oder das *Supremum* von M, im zweiten eine größte untere Schranke g, die *untere Grenze* oder das *Infimum*. G und g müssen nicht zur Menge gehören.

Eine Menge heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Sie hat eine größte Häufungsstelle U, den sog. *limes superior* (geschrieben $\overline{\lim}$) und eine kleinste u, den *limes inferior* ($\underline{\lim}$). Es ist $g \leq u \leq U \leq G$. Ist die Menge nach oben nicht beschränkt, so schreibt man $U = G = +\infty$, ist sie nach unten nicht beschränkt, $u = g = -\infty$.

2. Funktionen einer Veränderlichen. Ist jeder Zahl x einer Menge M eine und nur eine Zahl y zugeordnet, so nennt man y eine *(eindeutige) Funktion* von x und schreibt $y = f(x)$. Statt des Buchstabens f können auch andere gewählt werden, manchmal pflegt man auch $y = y(x)$ zu schreiben. x heißt die *unabhängige*, y die *abhängige Veränderliche*, die Menge M ist der *Definitionsbereich* der Funktion.

$\overline{M}$ sei die Menge aller Werte y, welche die Funktion in ihrem Definitionsbereich annimmt, der *Wertevorrat* der Funktion, wobei aber Funktionswerte, die zu verschiedenen x-Werten gehören, im Sinne der obigen Definition der Menge (Ziff. 1) als unterschieden gelten sollen. Man überträgt nun die in Ziff. 1 definierten Begriffe beschränkt, obere Grenze usw. von $\overline{M}$ auf die Funktion, nennt also z.B die Funktion beschränkt, wenn $\overline{M}$ beschränkt ist, die obere Grenze G von $\overline{M}$ bezeichnet man als obere Grenze der Funktion usw. Gehört G bzw. g zu $\overline{M}$, so ist G der *größte*, g der *kleinste Wert* der Funktion in M. $G-g=s \geqq 0$ heißt die *Schwankung (Oszillation)* der Funktion in M. Ähnlich werden diese Begriffe für jede Teilmenge M_1 von M definiert. Kennzeichnen wir sie durch den Zeiger 1, so gilt

$$g \leq g_1 \leq G_1 \leq G \quad \text{und} \quad s_1 \leq s.$$

Deutet man x und y als rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes in der Ebene, so erhält man eine Punktmenge in der Ebene, das geometrische Bild der Funktion. Jede Zahl a, für die $f(a)=0$ ist, heißt eine *Nullstelle* der Funktion (Schnittpunkt des geometrischen Bildes mit der Abszissenachse). Gilt die Gleichung $f(x)=0$ für alle Werte des Definitionsbereiches, so sagt man: die Gleichung ist *identisch* erfüllt. Ist für eine in einem Intervall definierte Funktion für je zwei beliebige Werte $x_1 < x_2$ des Intervalls immer $f(x_1) \leqq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geqq f(x_2)$, so nennt man die Funktion *monoton wachsend* bzw. *abnehmend*, und zwar *fortwährend* oder *im strengen Sinn*, wenn in den beiden letzten Gleichungen nur das Ungleichheitszeichen gilt.

Ist für eine Funktion identisch in x die Gleichung $f(x+a)=f(x)$ erfüllt, so heißt die Funktion *periodisch* mit der *Periode* a; jedes ganzzahlige Vielfache einer Periode ist ebenfalls Periode.

Eine Funktion nennt man *gerade*, wenn die Gleichung $f(-x)=f(x)$ identisch in x gilt; ist dagegen $f(-x)=-f(x)$ identisch in x, so heißt die Funktion *ungerade*. Das Kurvenbild einer geraden Funktion ist spiegelbildlich zur y-Achse, das einer ungeraden spiegelbildlich zum Nullpunkt.

Eine Funktion von der Gestalt $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit festen Koeffizienten a_ν nennt man ein *Polynom* oder eine *ganze rationale Funktion vom Grad* n, falls $a_n \neq 0$ ist. Eine *gebrochene rationale Funktion* ist der Quotient zweier Polynome.

3. Grenzwert. x_0 sei eine Häufungstelle des Definitionsbereiches einer Funktion $f(x)$. Man sagt, die Funktion hat in x_0 den *Grenzwert* A oder sie *konvergiert* gegen A, wenn sich zu jeder beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ finden läßt, so daß $|f(x)-A| < \varepsilon$ ist, sobald $0 < |x-x_0| < \delta$ ist, d.h. wenn man den Unterschied zwischen dem Funktionswert und Grenzwert dem Betrage nach dadurch beliebig klein machen kann, daß man x hinreichend nahe an x_0 wählt[1]. Man schreibt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ oder $f(x) \to A$ für $x \to x_0$. Notwendig und hinreichend für das Vorhandensein eines Grenzwertes ist folgende Bedingung: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ muß sich eine Zahl $\delta > 0$ bestimmen lassen, so daß $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$ für alle x' und x'' ist, für die $0 < |x'-x_0| < \delta$ und $0 < |x''-x_0| < \delta$ ist (*Konvergenzkriterium von* CAUCHY). Erfolgt die Annäherung von Werten $x < x_0$ bzw. $x > x_0$, so spricht man von einem *linksseitigen* bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* und schreibt $f(x_0-0)=A$ bzw. $f(x_0+0)=A$. Eine in einem Intervall definierte beschränkte monotone Funktion hat bei unbegrenzter Annäherung an die Endpunkte des Intervalls immer je einen rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert.

Haben $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to x_0$ die Grenzwerte A und B, so sind auch die Grenzwerte der Funktionen $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $B \neq 0$), $|f(x)|$, $|g(x)|$

[1] $|a|$ bedeutet in bekannter Weise den *absoluten Betrag* von a, also $|a|=a$ für $a>0$, $|a|=-a$ für $a<0$, $|0|=0$. Es ist immer $||a|-|b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a|+|b|$, $|ab|=|a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

vorhanden und bzw. gleich $A \pm B$, AB, A/B, $|A|$, $|B|$. Ferner ist $A \geqq B$, falls $f(x) \geqq g(x)$ ist, wobei zu beachten ist, daß $A = B$ sein kann, wenn auch $f(x) > g(x)$ ist.

Ist der Definitionsbereich von x nicht beschränkt, so sagt man $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ oder $f(x) \to A$ für $x \to +\infty$, wenn sich zu jeder beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N > 0$ so finden läßt, daß $|f(x) - A| < \varepsilon$, sobald $x > N$ ist, und ähnlich $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, sobald $x < -N$ ist, d.h. wenn sich $f(x)$ dem Wert A unbegrenzt nähert, falls x dem Betrage nach über alle Schranken wächst und dabei immer positiv oder negativ bleibt.

Neben den bisher besprochenen *eigentlichen Grenzwerten* betrachtet man auch *uneigentliche*, d.h. man definiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ bzw. $-\infty$ oder $f(x) \to +\infty$ bzw. $-\infty$ für $x \to x_0$, wenn sich zu jeder Zahl $N > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ angeben läßt, so daß $f(x) > N$ bzw. $f(x) < -N$, wenn $0 < |x - x_0| < \delta$, d.h. wenn $f(x)$ dem Betrage nach über alle Schranken wächst und dabei immer positiv oder negativ bleibt falls sich x der Zahl x_0 unbegrenzt nähert. Auch diese Grenzwerte können einseitig sein, wenn die Annäherung an x_0 nur von einer Seite erfolgt und ebenso kann $\pm \infty$ an Stelle von x_0 treten.

Aus dieser Definition ergeben sich folgende Formeln: Aus $f(x) \to +\infty$ folgt $-f(x) \to -\infty$, $\frac{1}{f(x)} \to 0$; aus $f(x) \to +\infty$ und $g(x) \to c > 0$ folgt $f(x) \pm g(x) \to +\infty$, $f(x)g(x) \to +\infty$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$; aus $f(x) \to +\infty$ und $g(x) \to +\infty$ folgt $f(x) + g(x) \to +\infty$, $f(x)g(x) \to +\infty$.

4. Stetigkeit. Eine Funktion $f(x)$ heißt *stetig* an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ vorhanden und gleich $f(x_0)$ ist, d.h. wenn sich bei unbegrenzter Annäherung an die Stelle x_0 auch die Funktionswerte dem Funktionswert an der Stelle x_0 unbegrenzt nähern. Die Funktion heißt stetig in einem Intervall, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls stetig ist. Summe, Differenz, Produkt, Quotient von stetigen Funktionen sind ebenfalls stetig, wenn man beim Quotienten die Nullstellen des Nenners ausschließt. Ebenso ist der Betrag einer stetigen Funktion stetig. Ist $u = g(x)$ stetig an der Stelle x_0 und $y = f(u)$ stetig an der Stelle $u_0 = g(x_0)$, so ist die zusammengesetzte Funktion $y = f[g(x)]$ stetig an der Stelle x_0, also $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)] = f(u_0) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Verwendet man in der obigen Definition der Stetigkeit nur einen einseitigen Grenzwert, so sagt man, die Funktion sei stetig bei einseitiger Annäherung an x_0, hat also $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ bzw. $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Läßt sich das Definitionsintervall einer Funktion in eine endliche Anzahl von Teilintervallen einteilen, so daß die Funktion in jedem offenen Teilintervall stetig ist und die eigentlichen links- und rechtsseitigen Grenzwerte bei Annäherung an die Endpunkte jedes Teilintervalls vorhanden sind, so nennt man die Funktion *abteilungsweise* oder *stückweise stetig*.

Jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist beschränkt, nimmt in diesem Intervall mindestens je einmal einen größten und kleinsten Wert an und ist *gleichmäßig stetig*, d.h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ läßt sich eine Zahl $\delta > 0$ angeben, so daß $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ für alle Wertepaare x_1, x_2 des Intervalls ist, die der Gleichung $0 < |x_1 - x_2| < \delta$ genügen. Ist $f(x)$ in x_0 stetig und $f(x_0) \neq 0$, so läßt sich eine Umgebung der Stelle x_0 angeben, so daß in dieser Umgebung die Funktion nicht null ist und ihr Vorzeichen mit dem von $f(x_0)$ übereinstimmt.

Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, so nimmt die Funktion jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Wert innerhalb des Intervalls mindestens einmal an.

Ist $y = f(x)$ in einem Intervall im strengen Sinn monoton und stetig, so ist jedem y der Menge der Funktionswerte genau ein x-Wert zugeordnet, d.h. es ist die *eindeutige Umkehrungsfunktion* $x = g(y)$ vorhanden und diese Funktion ist in ihrem Definitionsintervall ebenfalls im strengen Sinn monoton und stetig.

Die rationalen Funktionen sind stetig für alle Werte der Veränderlichen x, abgesehen von den Nullstellen des Nenners.

5. Potenz. $y = x^n$ (n positiv ganz) ist für $x \geq 0$ eine stetige, fortwährend wachsende Funktion von x und hat daher eine ebensolche Umkehrungsfunktion, die mit $x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ bezeichnet wird. Definiert man für positive x in bekannter Weise

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{und} \quad x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{mq}}\right)^{mp}$$

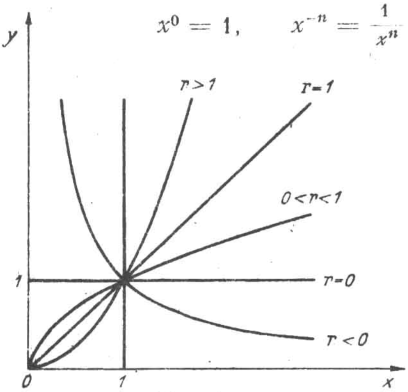

Fig. 1. Potenz.

(m, q positiv ganz, p ganz, p und q teilerfremd), so gelten die Rechenregeln des Potenzierens nun auch für beliebige rationale Exponenten. Für die verschiedenen Werte der rationalen Zahl $r = p/q$ ergeben sich die Kurven der Fig. 1. Alle auftretenden Funktionen sind monoton.

Berücksichtigt man auch negative x-Werte, so hat man die Kurven an der y-Achse zu spiegeln, falls p gerade, q ungerade ist, am Nullpunkt, falls beide ungerade sind. Ist p ungerade, q gerade, so erhält man für negative x-Werte keinen Funktionswert. Weil aber in diesem Fall die Gleichung $\eta^q = \xi$ für gegebenes positives ξ zwei entgegengesetzt bezeichnete reelle Lösungen η hat, erhält man in diesem Fall noch einen zweiten Kurvenzug, der sich durch Spiegelung an der x-Achse ergibt.

Ist β eine irrationale Zahl und r rational, so ist $\lim\limits_{r \to \beta} x^r$ für $x > 0$ vorhanden. Man definiert dann $x^\beta = \lim\limits_{r \to \beta} x^r$ und kann damit die Gültigkeit der Rechenregeln für das Potenzieren auch auf irrationale Exponenten bei positiver Basis ausdehnen. Es gelten folgende Ungleichungen für positive Basis und beliebige reelle Exponenten:

Aus $a > b$ folgt $a^\beta \gtreqless b^\beta$, je nachdem $\beta \gtreqless 0$ ist.

Aus $\alpha > \beta$ folgt $a^\alpha \gtreqless a^\beta$, je nachdem $a \gtreqless 1$ ist.

Daraus erkennt man, daß Fig. 1 auch für den Fall irrationaler Exponenten die betreffenden Kurvenbilder liefert. Die Funktionen sind auch in diesem Fall stetig und monoton. Die einzelnen Kurven folgen stetig aufeinander im Sinne wachsender bzw. abnehmender Exponenten. Für die entsprechenden Umkehrungsfunktionen bedarf es keiner neuen Kurvenbilder. Statt von der x-Achse auszugehen, verwendet man die y-Achse und sucht den entsprechenden x-Wert (Umklappen um die Winkelhalbierende des ersten Quadranten). Ebenso kann das Verhalten im Unendlichen aus der Abbildung entnommen werden.

6. Exponentialfunktion und Logarithmus. Für die Funktion $y = a^x$ $(a > 0)$ ergibt sich Fig. 2, entsprechend den verschiedenen Werten der Basis a. Die Funktionen sind stetig und im strengen Sinn monoton und haben ebensolche

Umkehrungsfunktionen, ausgenommen für $a = 1$. Man bezeichnet die Umkehrungsfunktion mit $x = {}^a\log y$ (*Logarithmus* von y mit der *Basis* a). Dadurch ergeben sich aus den Rechenregeln und Ungleichungen für die Potenz die des Logarithmus:

$$
\begin{aligned}
{}^a\log(x_1 x_2) &= {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2, \\
{}^a\log \frac{x_1}{x_2} &= {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2, \\
{}^a\log(x_1^{x_2}) &= x_2 \cdot {}^a\log x_1.
\end{aligned}
$$

Fig. 2 liefert auch die Kurvenbilder für den Logarithmus, wenn man statt von der x-Achse von der y-Achse ausgeht (Umklappen um die Winkelhalbierende).

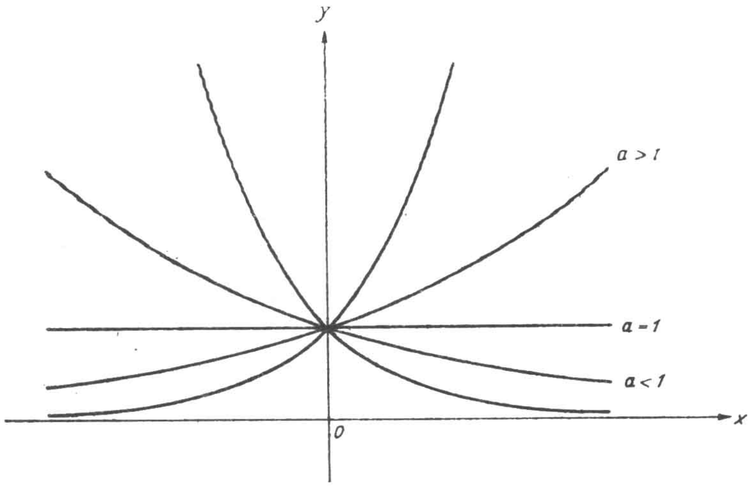

Fig. 2. Exponentialfunktion.

Ebenso liest man die Ungleichungen und das Verhalten im Unendlichen aus der Abbildung ab. Die Kurven folgen aufeinander stetig im Sinne wachsender bzw. abnehmender Werte der Basis.

Umrechnung der Logarithmensysteme ineinander:

$$ {}^b\log y = {}^a\log y \cdot {}^b\log a, \qquad {}^b\log a \cdot {}^a\log b = 1. $$

Besondere Fälle.

a) *Natürliche* oder NEPER*sche Logarithmen*, gewöhnlich log geschrieben.

$$ \text{Basis } e = \lim_{k \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = 2{,}7182818284\ldots $$

ist irrational und genügt keiner Gleichung $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0$ mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten a_ν und beliebigem, positivem, ganzem n, ist also keine *algebraische*, sondern eine *transzendente* Zahl.

$$
\begin{aligned}
&\log 10 = 2{,}3025850930\ldots, \\
&e^x = \lim_{\nu \to \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)^\nu = \lim_{\delta \to 0} (1 + \delta x)^{1/\delta}, \\
&a^x = e^{x \log a}, \qquad {}^a\log y = \frac{\log y}{\log a}.
\end{aligned}
$$

b) *Gewöhnliche, dekadische* oder BRIGGS*sche Logarithmen*, gewöhnlich Log geschrieben.

$$\text{Basis } 10, \qquad \operatorname{Log} e = 0{,}4342944819\ldots.$$

7. Kreisfunktionen. Unter dem *Bogenmaß* eines Winkels α versteht man die Länge des Bogens, den die Schenkel des Winkels auf einem Kreis vom Halbmesser 1 (Einheitskreis) ausschneiden, dessen Mittelpunkt mit dem Scheitel des Winkels zusammenfällt. Zwischen dem Bogenmaß arc α (gelesen arcus = Bogen) und dem Gradmaß $\alpha°$ bestehen die Beziehungen

$$\alpha° = \frac{180}{\pi} \operatorname{arc} \alpha = 57{,}29578\ldots \operatorname{arc} \alpha,$$

$$\operatorname{arc} \alpha = \frac{\pi}{180} \alpha° = 0{,}017453292\ldots \alpha°.$$

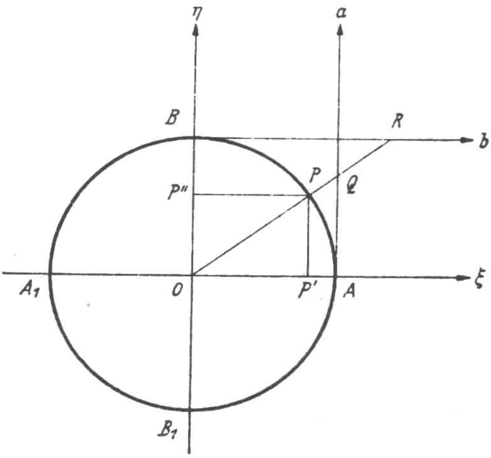

Fig. 3. Kreisfunktionen am Einheitskreis.

Das Bogenmaß 1 hat also der Winkel von $180/\pi$ Graden $= 57° 17' 44{,}8\ldots''$.

Wir zeichnen im Einheitskreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$ (Fig. 3) zwei senkrechte Durchmesser ($AOA_1 = \xi$-Achse, $BOB_1 = \eta$-Achse), sowie die Tangenten in A und B (a-Achse und b-Achse). Ist x das Bogenmaß des Winkels AOP, wobei der positive Drehsinn im Einheitskreis dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt läuft, so definiert man die *Kreis-* oder *trigonometrischen Funktionen* durch die gerichteten Strecken

$$\sin x = \overrightarrow{OP''}, \quad \cos x = \overrightarrow{OP'}, \quad \tan x = \overrightarrow{AQ}, \quad \cot x = \overrightarrow{BR}.$$

Es bestehen die Beziehungen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \tan x \cdot \cot x = 1,$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x,$$

d.h. Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen mit der Periode 2π, Tangens und Cotangens solche mit der Periode π,

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$$

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x,$$

d.h. Sinus, Tangens und Cotangens sind ungerade Funktionen, Cosinus ist eine gerade Funktion.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x,$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x,$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Damit ergibt sich Fig. 4. Alle Funktionen sind in den betreffenden Intervallen stetig und monoton. Tangens bzw. Cotangens haben in den ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ bzw. den Vielfachen von π die uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$, je nach der Seite der Annäherung.

Manchmal werden auch die Funktionen Secans und Cosecans verwendet, die durch die Gleichungen $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ definiert sind.

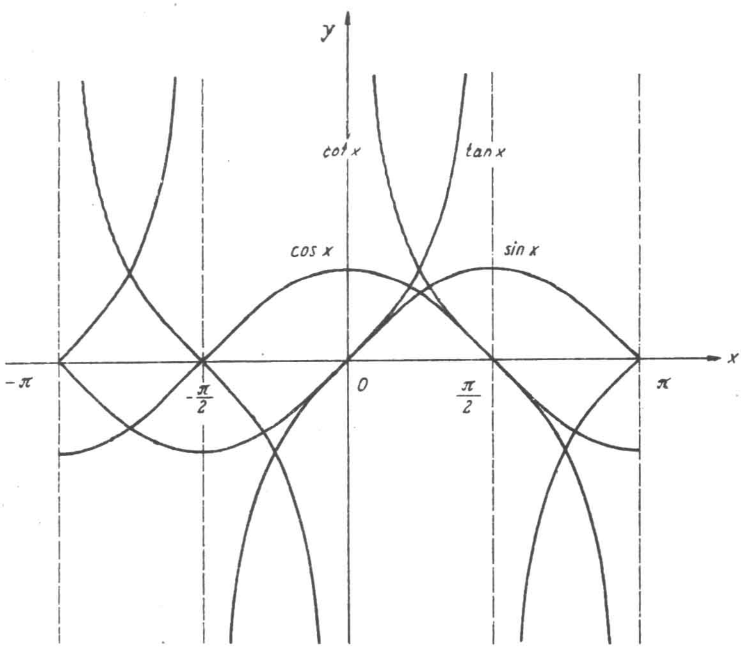

Fig. 4. Kreisfunktionen.

Wichtige Formeln (die *Additionstheoreme*):

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v,$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v,$$

$$\tan(u \pm v) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \qquad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2},$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2},$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2},$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2},$$

$$\sin n x = \sin x \left[\sin^{n-1} x - (n-2)\sin^{n-3} x + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\sin^{n-5} x - \right.$$
$$\left. - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^{n-7} x + \cdots\right],$$

$$\cos n x = \frac{1}{2}\left[(2\cos x)^n - n(2\cos x)^{n-2} + n\frac{n-3}{2}(2\cos x)^{n-4} - \right.$$
$$\left. - n\frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 3}(2\cos x)^{n-6} + n\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2\cdot 3\cdot 4}(2\cos x)^{n-8} - \cdots\right],$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin n x = \sin\frac{n x}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos n x = \cos\frac{n x}{2}\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 n x}{\sin x},$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin n x \cos n x}{\sin x}.$$

Fig. 4 liefert wieder, wenn man von der y-Achse ausgeht, die Umkehrungsfunktionen der Kreisfunktionen, die sog. *zyklometrischen Funktionen.* Gemäß der Periodizität der Kreisfunktionen erhält man als Umkehrung einer Kreisfunktion unendlich viele Funktionen, die sich um Vielfache der Periode unterscheiden, und beim Sinus und Cosinus außerdem noch eine zweite unendliche Schar von Umkehrungsfunktionen infolge der Beziehungen $\sin(\pi - x) = \sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$. Die Umkehrungsfunktionen sind also *unendlich vieldeutig* und man hat anzugeben, welcher Zweig der Umkehrungsfunktion jeweils in Frage kommt. Für die Umkehrungsfunktionen der Funktionen

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \tan x, \qquad y = \cot x$$

schreibt man

$$x = \operatorname{arc}\sin y, \qquad x = \operatorname{arc}\cos y,$$
$$x = \operatorname{arc}\tan y, \qquad x = \operatorname{arc}\cot y.$$

Sie sind in den betreffenden Intervallen stetig und monoton. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß bei zwei Winkeln, die sich auf $\pi/2$ ergänzen, der Sinus des einen gleich dem Cosinus des anderen und der Tangens des einen gleich dem Cotangens des anderen ist, gelten bis auf Vielfache der Periode die Beziehungen

$$\operatorname{arc}\sin y + \operatorname{arc}\cos y = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc}\tan y + \operatorname{arc}\cot y = \frac{\pi}{2}.$$

Man ist übereingekommen, die Gültigkeit dieser Beziehungen exakt zu fordern (ohne Vielfache der Periode), indem man erklärt: Wenn unter den unendlich vielen Werten von $\operatorname{arc}\sin y$ für ein bestimmtes y einer gewählt ist, soll unter $\operatorname{arc}\cos y$ derjenige verstanden werden, welcher durch $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin y$ gegeben ist, und ähnlich für $\operatorname{arc}\cot y$, so daß man also die Funktionen $\operatorname{arc}\cos y$ und $\operatorname{arc}\cot y$

entbehren kann, indem sie einfach durch $\frac{\pi}{2}$ — arc sin y und $\frac{\pi}{2}$ — arc tan y ersetzt werden.

Unter den unendlich vielen Werten von arc sin y für ein bestimmtes y zeichnet man den sog. *Hauptwert* aus, d.h. denjenigen, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, und ebenso beim arc tan y. Damit ergeben sich folgende Behauptungen: Durchläuft x wachsend das abgeschlossene Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so durchläuft $y = \sin x$ wachsend das abgeschlossene Intervall von -1 bis $+1$ und die Beziehung zwischen x und y ist umkehrbar eindeutig, d.h. jedem x entspricht genau ein y-Wert.

Durchläuft x wachsend das offene Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so durchläuft $y = \tan x$ wachsend alle reellen Zahlen und die Beziehung zwischen x und y ist wieder umkehrbar eindeutig.

Sämtliche Lösungen der Gleichung $y = \sin x$ im Intervall $-1 \leq y \leq +1$ (außerhalb gibt es keine) sind demnach gegeben durch $x = \arcsin y + 2k\pi$ und $x = \pi - \arcsin y + 2k\pi$, wobei arc sin y den Hauptwert und k irgendeine ganze Zahl bedeuten. Ebenso sind sämtliche Lösungen der Gleichung $y = \tan x$ durch $x = \arctan y + k\pi$ gegeben, wobei arc tan y den Hauptwert und k irgendeine ganze Zahl bedeuten.

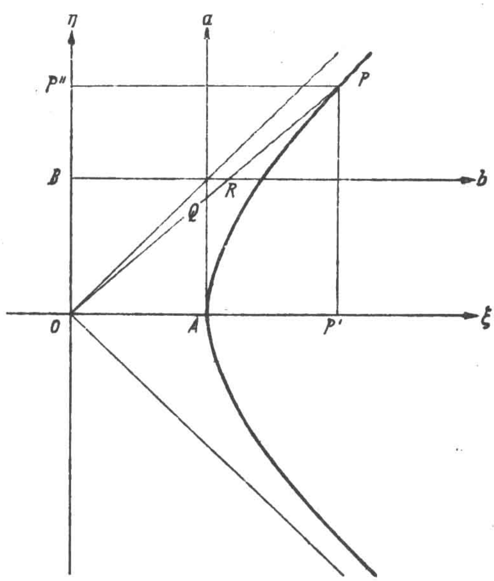

Fig. 5. Hyperbelfunktionen an der gleichseitigen Hyperbel.

8. Hyperbelfunktionen. In Fig. 5 sei $\xi \perp \eta$, $a \perp b$, AP Bogen der gleichseitigen Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$, x die doppelte Fläche des Ausschnittes AOP (nach unten negativ gezählt). Wir definieren die Hyperbelfunktionen durch die gerichteten Strecken

$$\operatorname{Sin} x = \overrightarrow{OP''}, \quad \operatorname{Cos} x = \overrightarrow{OP'}, \quad \operatorname{Tan} x = \overrightarrow{AQ}, \quad \operatorname{Cot} x = \overrightarrow{BR}.$$

Bedenkt man, daß x in Fig. 3 nicht nur den Bogen AP, sondern auch die doppelte Fläche des Kreisausschnittes OAP bedeutet, so erkennt man die vollkommene Analogie zwischen den Hyperbel- und Kreisfunktionen. Wenn der Punkt P über den ganzen Hyperbelzweig von unten nach oben wandert, durchläuft x wachsend alle reellen Zahlen.

Es bestehen die Beziehungen:

$$\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1, \quad \operatorname{Tan} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}, \quad \operatorname{Cot} x = \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}, \quad \operatorname{Tan} x \cdot \operatorname{Cot} x = 1,$$

$$\operatorname{Sin}(-x) = -\operatorname{Sin} x, \quad \operatorname{Cos}(-x) = \operatorname{Cos} x,$$
$$\operatorname{Tan}(-x) = -\operatorname{Tan} x, \quad \operatorname{Cot}(-x) = -\operatorname{Cot} x,$$

d.h. Sin, Tan, Cot sind ungerade Funktionen, Cos ist eine gerade Funktion.

Den Verlauf der Funktionen zeigt Fig. 6. Sie sind stetig und monoton in den betreffenden Intervallen, $y = \pm 1$ sind Asymptoten für Tan x und Cot x.

Die Additionstheoreme lauten:

$$\mathrm{Sin}\,(u+v) = \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,v + \mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,v,$$
$$\mathrm{Cos}\,(u+v) = \mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,v + \mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,v.$$

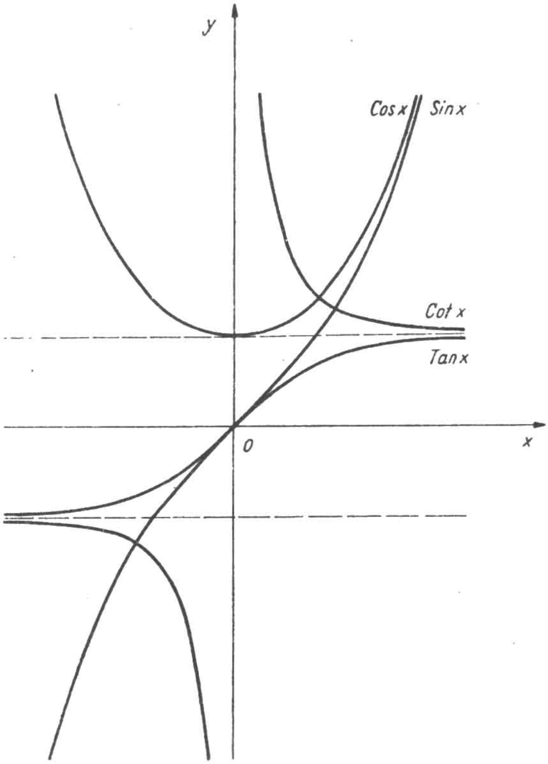

Fig. 6. Hyperbelfunktionen.

Für die Umkehrungsfunktionen erhält man folgendes: Die Gleichung $y = \mathrm{Sin}\,x$ hat für jedes reelle y genau eine Lösung $x = \mathrm{Ar\,Sin}\,y$ (Ar gelesen area = Fläche). Die Gleichung $y = \mathrm{Cos}\,x$ hat für jedes $y > 1$ genau zwei Lösungen $x = \mathrm{Ar\,Cos}\,y$, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden und für $y = 1$ mit $x = 0$ zusammenfallen, für $y < 1$ keine Lösung. Die Gleichung $y = \mathrm{Tan}\,x$ hat für jedes y im offenen Intervall $(-1, +1)$ genau eine Lösung $x = \mathrm{Ar\,Tan}\,y$, für die anderen y keine, die Gleichung $y = \mathrm{Cot}\,x$ hat für jedes $y > 1$ und jedes $y < -1$ genau eine Lösung $x = \mathrm{Ar\,Cot}\,y$, für die anderen y keine.

Es ist

$$\mathrm{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\mathrm{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\mathrm{Tan}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\mathrm{Cot}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\mathrm{Ar\,Sin}\,y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \quad \mathrm{Ar\,Cos}\,y = \log\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right),$$
$$\mathrm{Ar\,Tan}\,y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}, \quad \mathrm{Ar\,Cot}\,y = \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}.$$

II. Differentialrechnung.

9. Differentialquotient. $y = f(x)$ sei stetig in einem Intervall, x_0 und x_1 seien zwei Punkte dieses Intervalls. Die entsprechenden Werte von y mögen $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1)$ sein.

Man bezeichnet (Fig. 7) $\Delta x = x_1 - x_0$ als *Differenz der unabhängigen Veränderlichen*, $\Delta y = \Delta f(x) = y_1 - y_0$ als *Differenz der Funktion oder abhängigen Veränderlichen*, $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ als *Differenzenquotienten* oder *mittlere Steigung der Funktion* im Intervall $[x_0, x_1]$ (er ist ja die Steigung der Geraden $P_0 P_1$).

Wenn ein eigentlicher Grenzwert des Differenzenquotienten für $x_1 \to x_0$ vorhanden ist, nennt man ihn die *Ableitung* oder den *Differentialquotienten* der Funktion an der Stelle x_0 und schreibt

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{(Bezeichnung von Lagrange).}$$

Er bedeutet die Steigung der Geraden $P_0 Q$, der *Tangente* der Kurve $y = f(x)$ im Punkte P_0, und wird daher auch die *Steigung* der Kurve im Punkt P_0 genannt. Unter dem *Differential* der Funktion im Punkte P_0 bei Veränderung der unabhängigen Veränderlichen um Δx versteht man $dy = f'(x_0)\Delta x$. Δy ist also die Änderung der Funktion, wenn man auf der Kurve, dy die Änderung von y, wenn man auf der Tangente der Kurve im Punkte P_0 weiter schreitet.

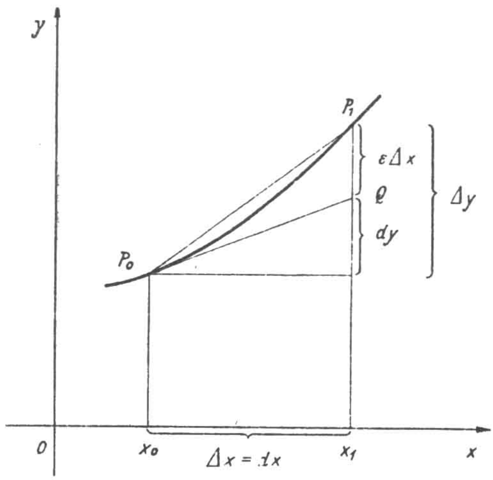

Fig. 7. Differentialquotient.

Da sich für die besondere Funktion $y = x$ in jedem Punkt $f'(x) = 1$, also $dy = dx = \Delta x$ ergibt, schreibt man für die Änderung der unabhängigen Veränderlichen Δx auch dx und damit im allgemeinen Fall $dy = f'(x)\, dx$ oder $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, woraus sich der Name Differentialquotient erklärt (Bezeichnung von Leibniz). Von Newton stammt die Bezeichnung *Fluxion* $\dot{y}$ für die Ableitung.

Nach der Definition des Grenzwertes ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon$, wobei $\varepsilon \to 0$ mit $\Delta x \to 0$, somit $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x = dy + \varepsilon \Delta x$, d.h. der Unterschied $\varepsilon \Delta x$ zwischen Δy und dy wird, wie man zu sagen pflegt, von höherer Ordnung klein als Δx; man kann somit in erster Annäherung die Kurve in der Nähe des Punktes P_0 durch ihre Tangente ersetzen.

Bildet man die Ableitung in allen Punkten des Intervalls, falls sie vorhanden ist, so erhält man wieder eine Funktion von x, die Ableitung $f'(x)$. Ist die Ableitung in einem Punkt bzw. in einem Intervall vorhanden, so nennt man die Funktion im Punkt bzw. im Intervall *differenzierbar*. Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig (die Umkehrung dieses Satzes braucht nicht richtig zu sein). Ist auch $f'(x)$ noch stetig, so heißt die Funktion *stetig differenzierbar*. Wird bei der Definition der Ableitung nur der links- oder rechtsseitige Grenzwert herangezogen, so spricht man von einer *links- oder rechtsseitigen Ableitung*, also z. B. in den Endpunkten eines Definitionsintervalls der Funktion. Stückweise stetige Funktionen mit stückweise stetiger Ableitung werden manchmal als *stückweise glatt* bezeichnet.

Ergibt sich als Grenzwert einer der beiden uneigentlichen Grenzwerte $\pm\infty$, so heißt die Funktion an der betreffenden Stelle *uneigentlich differenzierbar*. Die Tangente steht in diesem Fall auf der x-Achse senkrecht. Wenn man sagt, die Funktion sei differenzierbar, wird der Fall der uneigentlichen Differenzierbarkeit ausgeschlossen.

Ist $f'(x_0) > 0$, so gibt es eine Umgebung von x_0, in der $f(x) \gtreqless f(x_0)$ für $x \gtreqless x_0$, doch braucht die Funktion in dieser Umgebung nicht monoton zu sein. Ähnlich ist in einer Umgebung $f(x) \lesseqgtr f(x_0)$ für $x \gtreqless x_0$, falls $f'(x_0) < 0$.

10. Differentiationsregeln. Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so sind auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient (falls $v \neq 0$) dieser Funktionen differenzierbar, und zwar hat man für die Ableitung folgende Regeln:

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (uv)' = u'v + v'u, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Ist c eine Konstante, so ist $c' = 0$ und $(cu)' = cu'$. Ein Produkt von n differenzierbaren Faktoren wird differenziert, indem man nur je einen Faktor differenziert, die übrigen unverändert läßt und die n Ergebnisse addiert.

Ist $y = f(u)$, $u = g(x)$ und sind beide Funktionen differenzierbar, so ist auch $y = f[g(x)]$ differenzierbar, und zwar erhält man

$$\frac{dy}{dx} = f'[g(x)]\, g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textit{(Kettenregel)}.$$

Ist eine in einem Intervall stetige, im strengen Sinn monotone Funktion $y = f(x)$ differenzierbar, so ist auch ihre Umkehrungsfunktion $x = g(y)$ differenzierbar, falls $f'(x) \neq 0$ ist, und zwar ergibt sich

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Die Formel ist auch an Stellen uneigentlicher Differenzierbarkeit richtig, d.h. der Ableitung $\pm\infty$ der einen Funktion entspricht die Ableitung 0 der anderen.

Für die in den vorhergehenden Ziffern definierten elementaren Funktionen gelten folgende Differentiationsregeln:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad (e^x)' = e^x, \qquad (\log x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\operatorname{arc\,sin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(für den Hauptwert des Arcussinus)},$$

$$(\operatorname{arc\,tan} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{Sin} x)' = \operatorname{Cos} x, \qquad (\operatorname{Cos} x)' = \operatorname{Sin} x,$$

$$(\operatorname{Tan} x)' = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}, \qquad (\operatorname{Cot} x)' = -\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x},$$

$$(\operatorname{Ar\,Sin} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad (\operatorname{Ar\,Cos} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{für } \operatorname{Ar\,Cos} x \gtrless 0,$$

$$(\operatorname{Ar\,Tan} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad (\operatorname{Ar\,Cot} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Manchmal ist es von Vorteil, logarithmisch zu differenzieren:

$$f'(x) = f(x)\,\frac{d\log f(x)}{dx}.$$

11. Ableitungen höherer Ordnung. Da die Ableitung einer Funktion von x wieder eine Funktion von x ist, kann man, falls die betreffenden Grenzwerte vorhanden sind, den Differentiationsprozeß wiederholen und kommt so zu den Ableitungen