B. Booß

Topologie und Analysis

Eine Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel

Hochschultext

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Bernhelm Booß

Topologie und Analysis

Einführung in die Atiyah-Singer-Indexformel

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1977

Bernhelm Booß

Geschäftsführer des Forschungsschwerpunktes „Mathematisierung der Einzelwissenschaften" der Universität Bielefeld
Postfach 8640, D-4800 Bielefeld (z. Z. beurlaubt)

Lektor am Universitetscenter Roskilde, Dänemark
Postbox 260, DK-4000 Roskilde

AMS Subject Classification (1970): primary 58-02, 58 G 05, 58 G 10, 58 G 15
secondary 00 A 25, 01 A 65, 14 F 05, 14 H 05, 15 A 60, 16 A 42, 22 E 10, 26 A 57, 30 A 52, 30 A 78, 30 A 88, 30 A 98, 31 A 25, 34 B 25, 35 A 30, 35 J 45, 35 J 50, 35 S 05, 35 S 15, 42 A 68, 45 E 10, 45 K 05, 46 C 05, 46 E 35, 47 A 05, 47 A 55, 47 B 05, 47 B 30, 47 B 35, 47 D 15, 55 F 45, 55 F 50, 58 A 05, 58 C 25, 58 F 10, 60 J 50

ISBN 3-540-08451-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-08451-7 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Booss, Bernhelm, 1941-. Topologie und Analysis. (Hochschultext). Bibliography: p. Includes index. 1. Operator theory. 2. Manifolds (Mathematics). 3. Index theorems. I. Title. QA329.B66. 515'.72. 77-11682

Gesamtherstellung: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2144/3140-543210

*Friedrich Hirzebruch, geboren am 17. 10. 1927,
zum 50. Geburtstag*

Vorwort

"Die Erfahrung des praktischen Lebens lehrt hingegen jeden, der auf sich achthaben will, von einer Seite die Schwierigkeiten in der Ausführung dessen, was ihn so kinderleicht dünkte, gehörig erkennen; von einer andern aber auch den Punkt des Erreichbaren, wohin man durch gleichförmige Anstrengung aller Kräfte, die in unserer Gewalt sind, gelangen kann, richtiger zu bestimmen und weiter hinauszurücken."

Der Göttinger Naturforscher Georg FORSTER (1787) über den britischen Entdecker James COOK

INHALTLICHE MOTIVATION. Intensivere Nutzung mathematischer Ideen, Methoden und Techniken in den Einzelwissenschaften und zur Lösung praktischer Probleme erfordert vom Mathematiker neben größerer außermathematischer "Anwendungsbereitschaft" zugleich eine umfassendere innermathematische "Orientiertheit". In der Praxis kommt es häufig nicht so sehr darauf an, aus *einer* mathematischen Idee besonders weitreichende Konsequenzen zu ziehen, sondern einen Gegenstands- oder Problembereich möglichst angemessen mit einer *Vielfalt* mathematischer Theorien versuchsweise zu überdecken. Dafür muß der Mathematiker Einheit *und* Spezifik unterschiedlicher mathematischer Ansätze kennen, über Erfahrung mit mathematischen "Querverbindungen" verfügen. Die Atiyah-Singer-Indexformel, die zu den "tiefsten und härtesten Ergebnissen der Mathematik gerechnet wird und in Topologie und Analysis weiter verzweigt ist als irgendein anderes einzelnes Resultat" (F. HIRZEBRUCH) bietet vielleicht ein besonders gutes Beispiel für eine solche Einführung in "die Mathematik": Bei aller Schwierigkeit und ihrem ungeheuren Beziehungsreichtum ist die Indexformel doch abgrenzbar und so in ihrer Idee und den verwendeten Methoden auch für Studenten mittlerer Semester faßlich.

Tatsächlich ist die Atiyah-Singer-Indexformel in den letzten 15 Jahren immer "leichter" und "durchschaubarer" geworden. Mit der Aufdeckung tiefliegender und weitreichender Anwendungen (vgl. § III.4) ging in den facettenreichen immer neuen Darstellungen der Materie vor allem durch M.F. ATIYAH und I.M. SINGER selbst wie etwa in den eigengewichtigen Arbeiten von L. HÖRMANDER und anderen eine kraftvolle methodologische Durchdringung des Stoffes einher. Die Quellen und Bestandteile der Indexformel sind enger zueinander gerückt. Im Vergleich zu [PALAIS 1965], der "klassischen" Einführung in die Indexformel, haben wir u.a. die folgenden Vorteile:

1. Neben dem ursprünglichen "Kobordismusbeweis" kennen wir heute zwei weitere Beweise, wobei wir hier dem "*Einbettungsbeweis*", dem konzeptionell - vor allem in seiner direkten Verbindung zum Bottschen Periodizitätssatz - einfachsten Beweis der Indexformel folgen werden (vgl. § III.3).

2. Die *Struktur des Raumes* F der Fredholmoperatoren ist heute durch den K-theoretischen Begriff des "Indexbündels" einer stetigen Familie von Fredholmoperatoren (vgl. insbesondere den auf dem Kuipertheorem über die Zusammenziehbarkeit von $B^{\times}$, § I.6, beruhenden Satz von Atiyah-Jänich, § I.7) und durch das

praktische Beispielreservoir der Wiener-Hopf-Operatoren (vgl. § I.9) viel übersichtlicher geworden.

3. In der *Theorie der Pseudodifferentialoperatoren* (und Fourierintegraloperatoren, vgl. den Satz von Kuranishi, § II.3) erfuhr der für die Analysis elliptischer Operatoren wesentliche Kalkül der "Integraldifferentialoperatoren" eine grundlegende Klärung.

4. Der *Bottsche Periodizitätssatz*, der das topologische Fundamentaltheorem der Indextheorie bildet, konnte in der "K-Theorie mit kompaktem Träger" viel einfacher formuliert werden, wobei auch sein funktionalanalytischer Kern, nämlich der Indexsatz von Gochberg-Krein für Wiener-Hopf-Operatoren, deutlicher hervortrat.

VORGESCHICHTE DIESES BUCHES. Das Buch geht auf einen Fortbildungskurs für Mathematiklehrer (Santiago de Chile, 1971) zurück. Sein Konzept wurde später in weiteren Vorträgen, in Gastvorlesungen an den Universitäten Kaiserslautern-Trier und Marburg (Einladungen von B. GRAMSCH und M. BREUER) sowie in Seminaren in Bielefeld mit Studenten des dritten Studienjahres erprobt.

ZUR STRUKTURIERUNG. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Topologie der allgemeinen linearen Gruppe $GL(N,\mathbb{C})$, der Geometrie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und dem Lösungsverhalten elliptischer Differentialgleichungen? Wie läßt sich der analytisch definierte "Index" durch topologische Invarianten ausdrücken? Bei der Nachzeichnung der Lösung dieses Einzelproblems, die zum besseren Verständnis nicht in größter Allgemeinheit und nicht in geodätischer Kürze erfolgt, steht die Darstellung der gegensätzlichen Methoden, die bei der Bezwingung des Indexproblems ineinander greifen, im Mittelpunkt. Ich habe mich bemüht, hier an einem Brennpunkt der Mathematikentwicklung unseres Jahrhunderts die leitenden Ideen, den tieferen Grund und die weiteren Aussichten der Verschmelzung von Topologie und Analysis, dieser zwei getrennten Hauptgebiete der Mathematik, herauszustellen. Zur Bewältigung der großen Stoffülle wurde bei den geringen Vorkenntnissen, die man erfahrungsgemäß nur voraussetzen kann, ein gemischter Lösungsansatz gewählt. Der größte Teil des benötigten Stoffes wird *ausführlich und mit allen Details* bewiesen:

Schlangenlemma der kohomologischen Algebra	I.2.B
Additivität des Index bei Komposition	I.2.C
Die kompakten Operatoren bilden ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal K in der Banachalgebra B der beschränkten Operatoren im Hilbertraum	I.3.C

Rieszsches Lemma index $\mathrm{Id} + K = 0$, $K \in \mathcal{K}$	I.4.A
Atkinsonsche Darstellung des Raumes $\mathcal{F}$ der Fredholmoperatoren durch die Gruppe der Einheiten der "Calkinalgebra" $\mathcal{B}/\mathcal{K}$	I.5.A
Lokale Konstanz des Index	I.5.C
Wegweiser Zusammenhang der Einheitengruppe $\mathcal{B}^{\times}$	I.6.A
Kuipertheorem $[X,\mathcal{B}^{\times}] = 0$	I.6.B
Konstruktion des Indexbündels einer stetigen Familie von Fredholmoperatoren	I.7.B
Atiyah-Jänich: $[X,\mathcal{F}] \cong K(X)$	I.7.C
Indexformel für diskrete Wiener-Hopf-Operatoren	I.9.E
Satz von Vekua über den Index schiefwinkliger Randwertsysteme	II.1.G
Existenz von C^{∞}-Zerlegungen der Eins	II.2.B
Satz von Kuranishi über die Darstellung allgemeinerer "Fourierintegraloperatoren" als Pseudodifferentialoperatoren	II.3.C
Diffeomorphieinvarianz von Pseudodifferentialoperatoren	II.3.C
Surjektivität des Symbols	II.3.D
Abgeschlossenheit des Raumes der Pseudodifferentialoperatoren bzgl. Komposition und Bildung der formal Adjungierten	II.3.D
Sobolewsätze $W^1(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$, $W^s(T^n) \to W^{s-1/2}(T^{n-1})$ und $W^s(\mathbb{R}^n) \nrightarrow W^s(\mathbb{R}^{n-1})$	II.4.D
Die funktionalanalytische Ordnung eines Pseudodifferentialoperators stimmt mit der "analytischen" seiner Amplitude überein	II.5.A

Hauptsätze über elliptische Operatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten (Existenz einer "Parametrix", Regularität der Lösungen, Endlichkeit und Homotopieinvarianz des Index)	II.5.B
Konstruktion von "Indikatorbündel" und "Randisomorphismus" für elliptische Randwertsysteme von Differentialoperatoren	II.6.C
Fortsetzung des Symbols eines Systems von elliptischen Differentialgleichungen 1. Ordnung über einer berandeten Mannigfaltigkeit X auf das Ballbündel über dem Rand	II.7.A
Bottscher Periodizitätssatz	III.1.E
Indexformel im euklidischen Fall (für Operatoren, die im Unendlichen die Identität sind)	III.2.C
Indexformel für elliptische Operatoren auf Hyperflächen	III.3.A
Isomorphie von homotop gelifteten Vektorraumbündeln	Anhang
$[Y, GL(N,\mathbb{C})] \cong \mathrm{Vekt}_N(S(Y))$, wo $S(Y)$ die Einhängung von Y ist	Anhang

Daneben finden sich *expositorische Darstellungen in Aufgabenform* mit präzisen Formulierungen, Lösungshinweisen und Quellenangaben sowie breit eingefügte zusammenfassende *Kommentare*, in denen ich versucht habe, das erforderliche Hintergrundwissen bereitzustellen.

ZUM GEBRAUCH. Das Buch richtet sich an Leser mit minimalen Voraussetzungen an Wissen und Erfahrung, denen eine bestimmte Sache, die Indexformel, ganz klar gemacht und denen zugleich ein gewisses Methodenbewußtsein vermittelt werden soll. Es ist als Lehrbuch zum Selbststudium und als Vorlage für ein- bis zweisemestrige Vorlesungen aus diesem Gebiet und über verwandte Themen, vor allem aber als Textbuch für Seminare mit Studenten mittlerer Semester geschrieben worden. Die Paragraphen bieten durchweg relativ abgeschlossene Themen, so daß sie gut zur Durcharbeitung an einzelne studentische Arbeitsgruppen vergeben werden können, die sich bei gewichtigeren Paragraphen zur Bearbeitung der einzelnen Unterabschnitte weiter unterteilen sollten. Für die Abhandlung der einzelnen Paragraphen muß man im Seminarplan jeweils mit ein bis vier Vorträgen von 60 bis 90 Minuten Dauer rechnen. Erfahrungsgemäß kommt man bei geeigneter Auswahl in zwei Semestern mit dem Stoff durch - bis zur Indexformel. Eine angemessene Darstellung der ganzen Anwendungsbreite der Atiyah-Singer-Theorie dürfte dagegen im Rahmen eines normalen Mathematikstudiums kaum möglich sein. Das Eigengewicht der unterschiedlichen Anwendungsgebiete ist zu groß. Es empfiehlt sich daher, sich bei der Arbeit mit Studenten auf einen einzigen Anwendungsbereich - entsprechend den vorhandenen Vorkenntnissen und weiterreichenden Forschungsinteressen - zu konzentrieren und dort exemplarisch und detaillierter als in unserer Übersicht in § III.4 die Beziehungen zur Indexformel herauszuarbeiten.

DEFINITION DER VORKENNTNISSE. Wir setzen die folgenden Vorkenntnisse voraus:

1. Grundbegriffe der *linearen Algebra* (Vektorräume, lineare Abbildungen, Matrizenringe, Determinanten) *und der reellen Analysis* (offene, abgeschlossene, kompakte Mengen, stetige und differenzierbare Funktionen, Integralbegriff - und zwar spätestens für §§ 8-9 auch die Grundbegriffe des Lebesgueintegrals). Vielleicht mit Ausnahme des Lebesgueintegrals gehört dieser Stoff zur Standardausbildung des 1. Studienjahres. Für einen Steilkurs im Lebesgueintegral verweisen wir auf [HIRZEBRUCH-SCHARLAU 1971, 43-51] oder [TRIEBEL 1972, 680-684].

2. Begriff des *komplexen separablen Hilbertraums* (Skalarprodukt, Schwarzsche Ungleichung, Norm, Vollständigkeit, Orthogonalität, orthogonale Basis, Orthogonalprojektion auf abgeschlossene Unterräume und Identifizierung eines Hilbertraumes mit seinem Dualraum vermöge des Skalarproduktes). Die genauen Definitionen und Sätze mit vollständigen Beweisen findet man "überall" in elementarer Form, siehe z.B. [ACHIESER-GLASMANN 1954/1968, 1-26 und 50-52] oder [DIEUDONNÉ 1974, Kap. VI] oder [HIRZEBRUCH-SCHARLAU 1971, 83-93] oder [JÖRGENS 1970, 36-40] oder [TRIEBEL 1972, 81-90].

3. Das *Prinzip der offenen Abbildung*, wonach jede stetige Abbildung von einem Hilbertraum *auf* einen anderen offen ist, also offene Mengen auf offene Mengen abbildet. (Dazu gehört auch als Korrolar der "Satz vom inversen Operator", wonach die Umkehrabbildung einer bijektiven stetigen linearen Abbildung von einem Hilbertraum in einen anderen wieder stetig ist). Einen vollständigen Beweis findet man z.B. in [HIRZEBRUCH-SCHARLAU 1971, 22 und 39-41]; in etwas anderer Form aber auch in [ACHIESER-GLASMANN 1954/1968, 53f, 65f und 126] und in [TRIEBEL 1972, 199-201].

4. Einige wenige Standardresultate aus der *elementaren Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Alle wesentliche Information findet man z.B. in [ERWE 1961, 88-102] in den Abschnitten über "Linear homogene Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten" und "Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten". Wir werden im Einzelfall noch zusätzliche Literaturhinweise geben.

5. Begriff der *differenzierbaren Mannigfaltigkeit*. Zwar werden wir in einem Steilkurs die für uns wichtigsten Definitionen und Sätze mit ausführlichen Literaturhinweisen zusammenstellen. Besser ist aber, wenn der Leser - z.B. aus dem Studium der quadratischen Flächen (Kegelschnitte) in der linearen Algebra - zumindest über eine gewisse räumliche Vorstellung und Rechenfertigkeit (Koordinatenwechsel) verfügt.

DANKSAGUNGEN. Für die "stilistische" Anlage des Buches erhielt ich wichtige Hinweise von H. DINGES (Frankfurt),K. KRICKEBERG (Paris), W. MARK (Bozen), M. OTTE (Bielefeld) und F. WALDHAUSEN (Bielefeld). Für die kritische Durchsicht von größeren Manuskriptteilen danke ich den Topologen E. BRIESKORN (Bonn/Paris), A. DRESS (Bielefeld), J. DUPONT (Aarhus) und U. KOSCHORKE (Bonn/Siegen) sowie den Analytikern G. BENGEL (Münster), R. BÖHME (Erlangen), L. BOUTET de MONVEL (Grenoble), G. GRUBB (Kopenhagen), S. PRÖSSDORF (Berlin) und B.-W. SCHULZE (Berlin). Die Korrekturen las E. HØYRUP (Kopenhagen), und Frau Ch. MÖNKEMÖLLER (Bielefeld) schaffte es mit ihrer Schreibmaschine , daß der Autorenvertrag mit nur relativ geringfügigen zeitlichen und umfänglichen Überschreitungen eingehalten werden konnte.

Ganz besonders möchte ich aber an dieser Stelle M.F. ATIYAH (Oxford) und I.M. SINGER (M.I.T.) für die Geduld danken, mit der sie mir in den vielen Gesprächen immer wieder Auskunft auf meine Fragen gaben, sowie meinem Lehrer F. HIRZEBRUCH (Bonn), von dem ich in die Analysis und die Topologie eingeführt worden bin.

Roskilde und Bielefeld, im Juli 1977 B. B o o ß

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Operatoren mit Index

"Wenn uns die Beantwortung eines mathematischen Problems nicht gelingen will , so liegt häufig der Grund darin , daß wir noch nicht den allgemeineren Gesichtspunkt erkannt haben , von dem aus das vorgelegte Problem nur als einzelnes Glied einer Kette verwandter Probleme erscheint." (D. HILBERT, 1900)

1. Fredholmoperatoren

A. HIERARCHIE MATHEMATISCHER OBJEKTE

"In der Hierarchie von Zweigen der Mathematik sind gewisse Punkte erkennbar, wo ein bestimmter Übergang von einer Abstraktionsebene zu einer höheren stattfindet. Die erste Ebene mathematischer Abstraktion führt uns zu dem Konzept der einzelnen Zahlen in der Bezeichnung z.B. durch arabische Ziffern, jedoch noch ohne jedes unbestimmte Symbol zur Darstellung einer unspezifizierten Zahl. Dies ist die Stufe elementarer Arithmetik; in der Algebra nutzen wir unbestimmte Buchstabensymbole, betrachten aber nur einzelne ganz bestimmte Kombinationen dieser Symbole. Die nächste Stufe ist die der Analysis, und ihr Grundbegriff ist die beliebige Abhängigkeit einer Zahl von einer oder von mehreren anderen: die Funktion. Noch diffiziler ist der Zweig der Mathematik, dessen Ausgangskonzept die Überführung einer Funktion in eine andere ist, oder, wie man auch sagt, der Operator."

So charakterisierte Norbert WIENER die "Hierarchie" mathematischer Objekte [WIENER 1933,1]. Ganz grob kann man nun sagen: Klassische Fragestellungen der Analysis zielen vor allem auf Untersuchungen innerhalb der dritten oder vierten Stufe; das gilt für die reelle und komplexe Funktionentheorie wie auch, was uns hier besonders interessiert, für die Funktionalanalysis der Differentialoperatoren mit ihrer Konzentration auf Existenz- und Eindeutigkeitssätze, Regularität der Lösungen, asymptotisches oder Rand-Verhalten, wobei die Forschung im Arbeitsprozeß zu immer komplizierter zusammengesetzten, allgemeineren Operatoren fortschreitet, ohne die Fragestellung meist prinzipiell zu ändern; die Arbeit bleibt hauptsächlich auf qualitative *Ergebnisse gerichtet.*

Demgegenüber waren es Topologen, wie verschiedentlich von Michael ATIYAH vermerkt, die sich bei der topologischen Untersuchung algebraischer Mannigfaltigkeiten systematisch quantitativen *Fragestellungen, der Bestimmung quantitativer Maße qualitativen Verhaltens, der Definition globaler topologischer Invarianten, der Berechnung von Schnitt- und Dimensionszahlen z.B. zuwandten und so wieder die starre Trennung der "hierarchischen Ebenen" auf breiter Front durchbrachen und Beziehungen zwischen den Ebenen, vor allem von der zweiten und dritten Ebene (algebraische Fläche = Nullstellenmenge einer algebraischen Funktion) zur ersten, aber auch schon von der vierten Ebene (Laplaceoperatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten,* *Cauchy-Riemann-Operatoren, Hodge-Theorie) zur ersten zum eigentlichen Forschungsgegenstand machten.*

Diese letzte Richtung, beginnend mit dem Werk von William V.D. HODGE, gefolgt von Kunihiko KODAIRA und Donald SPENCER, von Henri CARTAN und Jean Pierre SERRE, von Friedrich HIRZEBRUCH, Michael ATIYAH und anderen, kann man vielleicht am besten mit dem Stichwort "Differentialtopologie" oder "Analysis auf Mannigfaltigkeiten" kennzeichnen. Dabei liegt ihr Zusammenhang und *ihre Besonderheit gegenüber der eigentlichen Analysis also darin, "daß - grob gesprochen - die Analytiker sich mit komplizierten Operatoren und einfachen Räumen beschäftigten (oder nur einfache Fragen stellten), während die algebraischen Geometer und Topologen sich nur mit einfachen Operatoren beschäftigten, aber ziemlich allgemeine Mannigfaltigkeiten untersuchten und verfeinerte Fragen stellten". [ATIYAH 1968b, 57]. Wie sehr der Gegensatz zwischen quantitativen und qualitativen Fragestellungen und Methoden über den hier skizzierten Bereich hinaus durchgehend als eine Triebkraft der Mathematikentwicklung angesehen werden muß, läßt sich z.B. bei [BRIESKORN 1974, 278-283] und in der dort angegebenen Literatur nachlesen.*

Dabei hatten Mathematiker wie Fritz NOETHER und Torsten CARLEMANN schon in den zwanziger Jahren im Zusammenhang mit Integralgleichungen das rein funktionalanalytische Konzept des "Index" eines Operators entwickelt und seine wesentlichen Eigenschaften festgestellt. Aber "obwohl die Konstruktion dieses Zweiges der Funktionalanalysis" (die Theorie der Fredholmoperatoren) "nicht die Entwicklung ganz besonderer Mittel benötigt, entwickelte er sich sehr langsam und erforderte die Anstrengungen sehr vieler Mathematiker" [GOCHBERG-KREIN 1957, 185]. Und obwohl sowjetische Mathematiker wie Ilja N. VEKUA schon Anfang der 50er Jahre auf den Index elliptischer Differentialgleichungen gestoßen waren, finden wir in dem zitierten Hauptwerk über Fredholmoperatoren noch keinen Hinweis auf diese Anwendungen. Erst nach dem programmatischen Aufsatz von Israil M. GELFAND (1959), der ein systematisches Studium elliptischer Differentialgleichungen unter diesem quantitativen Gesichtspunkt forderte und die Theorie der Fredholmoperatoren mit ihrem Satz über die Homotopieinvarianz des Index (s.u.) dabei als Ausgangspunkt nahm, nach den sich anschließenden Arbeiten von Michail S. AGRANOWITSCH, Alexander S. DYNIN, Aisik I. VOLPERT und schließlich nach den Arbeiten vor allem von Michael ATIYAH, Raoul BOTT, Klaus JÄNICH und Isadore M. SINGER wurde es klar, daß die Theorie der Fredholmoperatoren wirklich grundlegend für eine Vielzahl quantitativer Berechnungen ist, ein echtes Kettenglied in der Verbindung der höheren "hierarchischen Ebenen" mit der untersten, den Zahlen.

B. BEGRIFF DES FREDHOLMOPERATORS. Sei H ein (separabler) komplexer Hilbertraum und $\mathcal{B}$ die Banachalgebra (z.B. [HIRZEBRUCH-SCHARLAU, 29]) der beschränkten linearen Operatoren $T : H \to H$

mit der Operatornorm

$$\|T\| := \sup\{|Tu| \; ; \; |u| \leq 1\} < \infty ,$$

wo $|\cdot\cdot|$ die vom Skalarprodukt $<..,..>$ induzierte Norm in H ist.

Ein Operator $T \in \mathcal{B}$ heißt Fredholmoperator, wenn

$$\text{Kern } T := \{u \; ; \; u \in H \text{ und } Tu = 0\} \text{ und}$$

$$\text{Kokern } T := H/\text{Bild } T$$

beide endlich-dimensional sind. Das heißt: Die homogene Gleichung $Tu = 0$ besitzt nur endlich viele linear unabhängige Lösungen, und für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung $Tu = v$ ist es erforderlich, daß v einer endlichen Anzahl linearer Bedingungen genügt (siehe dazu unten Aufgabe 3.1 b). Wir schreiben $T \in \mathcal{F}$ und definieren den Index von T durch

$$\text{index } T := \dim \text{Kern } T - \dim \text{Kokern } T .$$

Für die Dimension von Kokern T sagt man auch Kodimension von Bild $T = T(H) = \{Tu \; ; \; u \in H\}$ oder auch Defekt von T . □

ANMERKUNG: Entsprechend können wir definieren, wann ein beschränkter linearer Operator $T : H \to H'$ Fredholmoperator heißt, wobei H und H' Hilberträume - oder Banachräume - oder allgemeine topologische Vektorräume sind. Wir werden dann die entsprechenden Räume mit $\mathcal{B}(H, H')$ und $\mathcal{F}(H, H')$ bezeichnen. Um aber einer Inflation von Bezeichnungen und Symbolen in diesem Abschnitt entgegenzuwirken, werden wir uns soweit wie möglich nur mit einem einzigen Hilbertraum H und seinen Operatoren beschäftigen. Die Übertragung auf den allgemeinen Fall $H \neq H'$ bedarf durchweg keiner neuen Argumente.

Alle Ergebnisse lassen sich auf Banachräume übertragen und ein Großteil auch auf Fréchetäume. Einzelheiten z.B. in [PRZEWORSKA-ROLEWICZ, 182-318]. Wir werden davon aber keinen Gebrauch machen und uns ganz auf die Hilbertraum-Theorie beschränken können, deren Abhandlung z.T. weitaus einfacher ist.

Motiviert durch die Analysis auf symmetrischen Räumen - mit Gruppenoperation G - hat man auch Operatoren betrachtet, deren "Index" keine ganze Zahl, sondern ein Element des von den Charakteren endlich-dimensionaler Darstellungen von G erzeugten Darstellungsringes $R(G)$ [ATIYAH-SINGER 1968a, 519f] oder noch allgemeiner eine Distribution auf G ist [ATIYAH 1974, 9-17]. Diese weitgehend analoge Theorie werden wir hier aber nicht behandeln - und auch nicht die Verallgemeinerung der Fredholmtheorie auf die diskrete Situation der von-Neumann-Algebren, wie sie - mit reellwertigem Index - in [BREUER 1968/1969] zuerst durchgeführt wurde.

AUFGABE 1: $L^2(\mathbb{Z}_+)$ sei der Raum der Folgen $c = (c_o, c_1, c_2,\ldots)$ komplexer Zahlen mit quadratisch-summierbaren Absolutbeträgen, also

$$\sum_{n=o}^{\infty} |c_n|^2 < \infty .$$

$L^2(\mathbb{Z}_+)$ ist in natürlicher Weise ein Hilbertraum (vgl. unten § 8). Zeige, daß die verschiebende Abbildung

$$\text{shift}^+ : c \mapsto (0, c_o, c_1, c_2,\ldots)$$

und die abschneidende Abbildung

$$\text{shift}^- : c \mapsto (c_1, c_2, c_3,\ldots)$$

Fredholmoperatoren sind mit $\text{index}(\text{shift}^+) = -1$ und $\text{index}(\text{shift}^-) = +1$.

WARNUNG: So wie wir uns $L^2(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{C}^\infty$ als Limes der endlich-dimensionalen Vektorräume $\mathbb{C}^m$, $m \to \infty$, vorstellen können, läßt sich shift von Endomorphismen des $\mathbb{C}^m$ approximieren, die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{C}^m$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Beachte, daß Kern und Kokern dieser Endomorphismen eindimensional, ihr Index also Null ist. (Vgl. unten Aufgabe 2.1).

Wieder eine andere Situation haben wir, wenn wir den Hilbertraum $L^2(\mathbb{Z})$ betrachten, also Folgen $c = (\ldots c_{-2}, c_{-1}, c_o, c_1, c_2,\ldots)$ mit

$$|c_o|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) < \infty$$

und darauf den entsprechenden shift-Operator , der alle Folgenglieder um eine Stelle weiterrückt und damit jetzt bijektiv ist, also den Index Null hat. □

2. Algebraische Eigenschaften. Operatoren von endlichem Rang

AUFGABE 1: Für endlich-dimensionale Vektorräume macht der Begriff Fredholmoperator wenig Sinn, weil dann jede lineare Abbildung ein "Fredholmoperator" ist und sein Index nicht mehr von seinen "Koeffizienten" (z.B. den Zahlen in Matrixform) abhängt, sondern nur von der Dimension der Räume, zwischen denen die Abbildung operiert. Genauer: Zeige, daß jede lineare Abbildung

$$T : H \to H' ,$$

wo H und H' endlich-dimensionale Vektorräume, einen Index

$$\text{index } T = \dim H - \dim H'$$

besitzt. TIP: Man macht sich zunächst die natürliche, weil allgemeiner geltende Vektorraum-Isomorphie $H/\text{Kern } T \cong \text{Bild } T$ klar und kommt dann (H, H' endlich-dimensional!) zu der aus der linearen Algebra bekannten Bestimmungsgleichung

$$\dim H - \dim \text{Kern } T = \dim H' - \dim \text{Kokern } T .$$

WARNUNG: Wollte man mit den Dimensionen von H und H' gegen ∞ gehen, so erhielte man nur die Formel $\text{index } T = \infty - \infty$. Wir benötigen dann also eine zusätzliche Theorie, um dieser Differenz einen bestimmten Wert zu geben. □

AUFGABE 2: Betrachte für zwei Fredholmoperatoren $F : H \to H$ und $G : H' \to H'$ die direkte Summe

$$F \oplus G : H \oplus H' \to H \oplus H' .$$

Zeige, daß dann $F \oplus G$ Fredholmoperator ist mit

$$\text{index } F \oplus G = \text{index } F + \text{index } G .$$

TIP: Zunächst rechnet man nach, daß $\text{Kern } F \oplus G = \text{Kern } F \oplus \text{Kern } G$ und $\text{Bild } F \oplus G$ entsprechend. Dann zeigt man die Isomorphie

$$H \oplus H' / \text{Bild } F \oplus \text{Bild } G \cong H/\text{Bild } F \oplus H'/\text{Bild } G .$$

WARNUNG: Falls $H = H'$, könnten wir auch die einfache (nicht-direkte) Summe

$$F + G : H \to H$$

betrachten, die aber i.a. kein Fredholmoperator ist. Setze etwa $G := -F$. □

AUFGABE 3: Zeige mit algebraischen Mitteln, daß die Komposition $G \circ F$ zweier Fredholmoperatoren $F : H \to H'$ und $G : H' \to H''$ wieder ein Fredholmoperator ist.
TIP: Welche Ungleichung gilt zwischen

$$\dim \text{Kern } G \circ F \quad \text{und} \quad \dim \text{Kern } F + \dim \text{Kern } G$$

und zwischen

$$\dim \text{Kokern } G \circ F \quad \text{und} \quad \dim \text{Kokern } F + \dim \text{Kokern } G \, ?$$

WARNUNG: Warum gilt i.a. nicht die Gleichheit? Trotzdem läßt sich aber die Kettenregel $\text{index } G \circ F = \text{index } F + \text{index } G$ beweisen, weil sich bei der Differenzbildung die Ungleichheiten herausheben. Anders als sonst meist in der Mathematik, wo wie z.B. beim Beweis der Kettenregel für differenzierbare Funktionen die uns hauptsächlich interessierende Formel als Nebenprodukt aus dem Beweis der nicht sehr aufregenden allgemeineren Aussage, daß die Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar ist, abfällt, muß man hier allerdings zum Nachweis der Formel etwas weiter ausholen und entweder mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln die topologische Struktur ausnutzen (siehe unten Aufgabe 3.2) - oder die algebraische Argumentation verfeinern, was wir jetzt tun wollen. □

A. DAS SCHLANGENLEMMA. Wir erinnern an einen Grundbegriff der "Diagrammjagd": $H_1, H_2, \ldots$ sei ein System von Vektorräumen und $T_k : H_k \to H_{k+1}$ sei für jedes $k = 1,2, \ldots$ eine lineare Abbildung. Wir nennen

$$H_1 \xrightarrow{T_1} H_2 \xrightarrow{T_2} H_3 \xrightarrow{T_3} \ldots$$

eine exakte Sequenz, wenn für alle k

$$\text{Bild } T_k = \text{Kern } T_{k+1} \,.$$

Insbesondere bedeutet dann (wobei 0 einen 0-dimensionalen Vektorraum bezeichnet)

$$0 \longrightarrow H_1 \xrightarrow{T_1} H_2 \text{ exakt : Kern } T_1 = 0 \,, \text{ also } T_1 \text{ injektiv}$$

$$H_1 \xrightarrow{T_1} H_2 \longrightarrow 0 \text{ exakt : Bild } T_1 = H_2 \,, \text{ also } T_1 \text{ surjektiv}$$

$$0 \to H_1 \to H_2 \to 0 \qquad \text{exakt : } H_1 \cong H_2$$

$$0 \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to 0 \quad \text{exakt : } H_3 \cong H_2/H_1 \text{ und } H_2 \cong H_1 \oplus H_3 \,. \quad \square$$

SATZ 1 (Schlangenlemma): Wenn in dem folgenden Diagramm von Vektorräumen und linearen Abbildungen die Spalten exakt, die Pfeile kommutativ (also $jF = F'i$ und $qF' = F''p$) und die einzelnen Zeilen Fredholmoperatoren sind, dann gilt

$$\text{index } F - \text{index } F' + \text{index } F'' = 0 \,.$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & H_2 \arrow[d, "j"] \\
H_1' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "p"'] & H_2' \arrow[d, "q"] \\
H_1'' \arrow[r, "F''"] \arrow[d] & H_2'' \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

BEWEIS: (Vgl. auch die algebraische Standardlehrbuchliteratur, z.B. [MAC LANE, § II.5]). Wir führen den Beweis in zwei Abschnitten.

1. Hier wollen wir zeigen, daß die folgende Sequenz

$$\begin{aligned} &0 \to \text{Kern } F \to \text{Kern } F' \to \text{Kern } F'' \to \\ &\quad \to \text{Kokern } F \to \text{Kokern } F' \to \text{Kokern } F'' \to 0 \end{aligned} \tag{*}$$

exakt ist. Dafür müssen wir zunächst erklären, wie die einzelnen