Introduction à la mécanique des milieux continus

P. GERMAIN P. MULLER

MASSON

INTRODUCTION
A LA
MÉCANIQUE
DES
MILIEUX CONTINUS

Paul GERMAIN

Professeur à l'École Polytechnique

Patrick MULLER

*Maître-Assistant à l'Université
P. et M. Curie*

MASSON

Paris New York Barcelone Milan

1980

ISBN : 2-225-65197-3

MASSON S.A.	120 bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING USA Inc.	14 East 60th Street, New York, N.Y. 10022
TORAY-MASSON S.A.	Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.	Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano

En MECANIQUE DES FLUIDES, *l'accent a été presque exclusivement mis sur les fluides incompressibles. Nous avons tenu à conserver aux écoulements irrotationnels d'un fluide parfait une place en rapport avec leur importance, sachant bien que c'est une question sur laquelle bien souvent on ne revient plus dans les enseignements ultérieurs. Et dans le chapitre sur les écoulements de fluides visqueux, nous avons cherché essentiellement à mettre en évidence les effets spécifiques de la viscosité, notamment l'existence de la couche limite, bien que l'étude approfondie de cette question (qui demande une introduction aux techniques de perturbations singulières) sorte du cadre d'un premier cours de mécanique des milieux continus.*

Enfin, pour faciliter l'étude, nous avons ajouté en annexe un chapitre de rappels sur des notions supposées avoir fait l'objet d'un enseignement antérieur mais qui, l'expérience le montre, n'ont pas toujours été présentées sous la forme la plus aisément applicable, ainsi qu'un chapitre sur la formulation des équations générales en coordonnées curvilignes orthogonales permettant au lecteur d'étendre les notions qu'il a acquises sans peine en coordonnées cartésiennes orthonormées au cas où d'autres coordonnées - cylindriques ou sphériques notamment - se révèlent fort avantageuses.

En résumé, si ce volume est un livre d'introduction, il a été conçu pour que l'étudiant puisse s'y reporter lors de ses études ultérieures.

Comme il était destiné à des étudiants, nous avons accepté la réalisation d'une édition économique par reproduction photographique d'un original dactylographié. Nous tenons à remercier Madame Serot Almeras Latour *qui a bien voulu contribuer à cette entreprise en réalisant, avec beaucoup de patience et de savoir faire, un travail technique de grande qualité.*

P. Germain

P. Muller

Mai 1979.

AVANT-PROPOS

Le livre intitulé " Mécanique des Milieux Continus ", *publié en* 1962, *s'est trouvé épuisé il y a quelques années. Il est vite apparu qu'il manquait un ouvrage d'introduction pouvant aider les étudiants de la maîtrise de Mécanique et de la maîtrise de Mathématiques et Applications Fondamentales abordant l'étude de cette discipline. Nous avons entrepris de le refondre afin d'y apporter les modifications nécessaires, et nous avons proposé à la maison* MASSON *le manuscrit d'un volume, rédigé à l'intention des étudiants des universités et des élèves des écoles d'ingénieurs, exposant les questions fondamentales qui constituent le programme obligatoire du premier enseignement de Mécanique des Milieux Continus. Dans le choix des sujets traités et des méthodes d'exposition nous avons tenu compte de notre longue expérience. Pour garder à l'ouvrage son caractère, nous avons notamment limité la liste des questions abordées tout en donnant à chacune de celles qui étaient retenues le développement nécessaire pour que les idées fondamentales soient bien dégagées.*

Dans la PREMIERE PARTIE, *consacrée aux notions générales, nous avons, après avoir rappelé les notions fondamentales de mécanique, exposé les résultats essentiels concernant les déformations et les lois de conservation de la physique classique, y compris la loi de conservation de l'énergie. Par contre nous avons renoncé à un exposé, même succinct, de thermodynamique des milieux continus; mais nous avons indiqué néanmoins son rôle essentiel lors de la formulation des lois de comportement.*

En MECANIQUE DES SOLIDES, *nous nous sommes limités à l'élastostatique isotherme en petites déformations, élasticité classique et élasticité linéaire. Nous n'avons retenu ni la théorie des milieux curvilignes, ni la théorie des plaques en flexion qui nécessitent des développements un peu techniques pour une introduction. Mais nous avons par contre développé les applications des méthodes de l'énergie afin de donner une première idée des méthodes de calcul approché par éléments finis.*

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Du même auteur.

COURS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS, par P. GERMAIN.
Tome 1. *Théorie générale.* 1973, 436 pages, 104 figures.

MÉCANIQUE EXPÉRIMENTALE DES FLUIDES, par R. COMOLET.
Tome 1. *Statique et dynamique des fluides non visqueux.* 1979, 3e édition revue et corrigée, 248 pages, 220 figures.
Tome 2. *Dynamique des fluides réels.* 1976, 2e édition revue et corrigée, 464 pages, 318 figures.
Tome 3. *Recueil de problèmes.* 1973, 2e édition revue et augmentée, 424 pages, 269 figures.

DYNAMIQUE GÉNÉRALE DES VIBRATIONS, par Y. ROCARD. 1971, 4e édition, 460 pages, 337 figures.

INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE, par P. Y. WILLEMS. 1979, 208 pages, 40 figures.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, en physique et en mécanique des milieux continus, par S. COLOMBO. 1976, 196 pages, 28 figures.

INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE RATIONNELLE DES MILIEUX CONTINUS, par C. TRUESDELL. Traduit de l'anglais. 1973, 384 pages.

LES MÉTHODES TENSORIELLES DE LA PHYSIQUE. Calcul tensoriel dans un continuum amorphe, par J. WINOGRADZKI. 1979, 224 pages, 3 figures.

ÉLASTICITÉ LINÉAIRE, par L. SOLOMON. 1968, 742 pages, 122 figures.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET STRUCTURES, par S. LAROZE (co-édition EYROLLES et MASSON).
Tome 1. *Milieux continus solides. Plaques et coques.* 1979 (2e tirage), 224 pages, 88 figures.
Tome 2. *Théorie des poutres.* 1979 (2e tirage), 196 pages, 127 figures.
Tome 3. *Dynamique des structures. Contraintes et déformations d'origine thermique.* 1979, 272 pages, 59 figures.

MÉCANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE. Ouvrage publié avec le concours du C.N.R.S., par H. D. BUI. 1978, 232 pages, 70 figures.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE

OBJET DU CHAPITRE

L'étude de ce cours présuppose une certaine connaissance de la mécanique générale. Néanmoins, il apparaît utile de rappeler au départ les notions essentielles introduites en mécanique pour schématiser les phénomènes physiques dont on veut rendre compte. Au cours de cette rapide introduction, on essaiera de mettre en valeur les aspects les plus intéressants pour l'étude ultérieure des milieux continus en mouvement.

Dans les rappels de cinématique qui font l'objet du paragraphe 1, *on insiste sur la description analytique d'un système en mouvement qui n'est pas en général explicitée au niveau des exposés introductifs de cinématique et les résultats classiques de la cinématique du corps rigide sont présentés en faisant appel aux notions ainsi introduites. Le second paragraphe est consacré à des questions de cinétique. La schématisation des efforts extérieurs qui s'exercent sur un système est introduite ensuite* (I.3) *par deux voies générales qui conduisent* (I.4) *aux deux énoncés fondamentaux de la dynamique classique. Enfin en* (I.5), *on analyse la nature des lois supplémentaires qu'il est nécessaire de formuler pour étudier les systèmes de corps rigides. En conclusion, il est alors possible de dégager les principales questions auxquelles il convient de répondre pour fonder la mécanique des milieux continus.*

La plupart des résultats sont rappelés sans démonstration. Nous avons toutefois insisté plus longuement sur l'introduction des distributeurs de vitesses d'un corps rigide et des torseurs d'efforts exercés sur un corps rigide. Cette dualité vitesse-effort manifestée par la notion de puissance est essentielle et se retrouve dans tous les développements de mécanique des milieux continus. C'est pourquoi nous avons jugé utile de la souligner au cours de ces rappels dans le cas très classique des corps rigides.

I.1. - CINEMATIQUE : DESCRIPTION ANALYTIQUE D'UN SYSTEME EN MOUVEMENT.

I.1.1. - Définition du mouvement.- La cinématique fournit le cadre spatio-temporel dans lequel peuvent être décrits les mouvements. La cinématique classique est construite à partir de l'espace euclidien de dimension 3 de la géométrie classique (et de l'espace vectoriel associé) et d'une définition du temps, ou *chronologie*, reposant sur la notion de simultanéité absolue, le temps pouvant être représenté par une variable réelle t.

En mécanique du point ou du corps rigide, il n'est pas indispensable de préciser la notion de système en mouvement, tant celle-ci est intuitive. Il n'en est pas de même en mécanique des milieux continus. Nous avons à traiter de systèmes qui peuvent au cours du temps prendre des formes très différentes et pourtant nous entendons parler d'un même système composé des mêmes particules, en dépit des apparences changeantes que nous observons. Il est donc nécessaire d'analyser les implications mathématiques sous-jacentes à une telle situation physique. C'est ce que traduit l'énoncé suivant :

Une famille d'ensembles S^t*, dépendant du temps* t*, définit la famille des configurations* S^t *d'un système cinématique* S *en mouvement si, et seulement si, quels que soient les temps* t', t, *il existe une application ponctuelle bijective* $\Pi(t',t)$ *de* $S^{t'}$ *sur* S^t *possédant les propriétés suivantes :*

$$\Pi(t,t) = I \tag{1}$$

$$\Pi(t',t) = \Pi(t'',t) \circ \Pi(t',t'') \tag{2}$$

$$\Pi(t',t) \circ \Pi(t,t') = I\,. \tag{3}$$

On note I l'application identique (de S^t sur S^t). La deuxième relation est une relation de transitivité (Fig. 1), la dernière, qui est une conséquence des deux autres, montre que $\Pi(t,t')$ est la transformation réciproque de $\Pi(t',t)$. La famille de sous-ensembles D^t de S^t, homologues par la transformation $\Pi(t_o,t)$ d'un même sous-ensemble D^{t_o} de S^{t_o}, définit une partie D du système cinématique

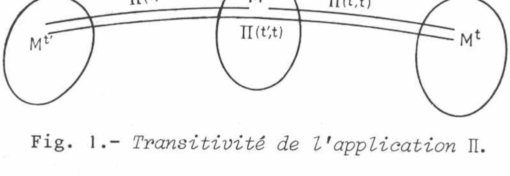

Fig. 1.- *Transitivité de l'application* Π.

S en mouvement. Si on considère la famille D^t lorsque t varie, on dit que l'*on suit la partie D dans son mouvement*. Les points M^t de S^t homologues par Π définissent un *point cinématique* M de S - on dit aussi *une particule* - et peuvent s'interpréter comme les positions successives de la particule M que l'on suit dans son mouvement.

On peut dire encore que les relations (1), (2), (3) définissent dans l'ensemble des "points datés" M^t une relation d'équivalence et que le point cinématique M est une classe d'équivalence ou un élément de l'ensemble quotient ainsi défini.

Le système S *est un corps rigide si, et seulement si, quels que soient* t *et* t', *l'application* $\Pi(t',t)$ *est une isométrie. Un point cinématique P est dit lié au corps rigide* S *si le système constitué par la réunion de* S *et de* P *est lui-même un corps rigide. On appelle référentiel R l'ensemble des points liés à un corps rigide* S *tels que* S^t *contienne au moins 4 points non situés dans un même plan. Bien évidemment R peut être muni d'une géométrie euclidienne.*

Reprenons maintenant le cas général d'un système cinématique S. On dit qu'il est *en équilibre* dans le référentiel *R* si tous les points M de S' sont liés à *R*. Dans le cas contraire, on dit que S est en *mouvement* dans le référentiel *R* ou par rapport à *R* . Soulignons que la *définition précise du mouvement d'un système implique la donnée du référentiel dans lequel on l'observe.*

Il est commode d'introduire dans *R* un repère défini par une origine O et une base orthonormée $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ (*pour simplifier en effet nous ne considérons, sauf mention contraire, que des repères orthonormés).* Dans ce repère qui détermine le référentiel et que nous désignerons par R , un point M^t à un instant t fixé a des coordonnées x_1, x_2, x_3 qui définissent à cet instant la position dans *R* de la particule M. L'application Π se traduit par des formules telles que (i = 1, 2, 3),

$$x_i = F_i(x'_1, x'_2, x'_3, t', t) \quad , \tag{4}$$

donnant à l'instant t la position M^t de la particule M qui à l'instant t' occupe la position $M^{t'}$ définie par les coordonnées x'_i. En règle générale, nous supposons les fonctions F_i continues et continûment dérivables par rapport aux variables, autant de fois qu'il est nécessaire pour les calculs que nous avons à effectuer. Nous écrirons souvent (4) sous la forme condensée

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}', t', t) \tag{5}$$

en désignant par exemple par $\underline{x}$ l'ensemble des 3 coordonnées x_1, x_2, x_3 ou encore la matrice unicolonne définie par ces coordonnées.

Les fonctions F_i ne peuvent être choisies arbitrairement. Les relations (1) et (2) qui traduisent les propriétés ([1]) de l'application Π s'écrivent en effet (conditions nécessaires et suffisantes) :

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}, t, t) \tag{6}$$

$$\underline{F}(\underline{x}', t', t) = \underline{F}(\underline{F}(\underline{x}', t', t''), t'', t) \tag{7}$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\underline{F}(\underline{x}', t', t) = \underline{F}(., t'', t) \circ \underline{F}(\underline{x}', t', t'') .$$

Par ailleurs (3) implique que si

$$\underline{x} = \underline{F}(\underline{x}', t', t) ,$$

alors

$$\underline{x}' = \underline{F}(\underline{x}, t, t') ;$$

ce résultat ne fait que traduire l'identité

$$\underline{x} = \underline{F}(., t', t) \circ \underline{F}(\underline{x}, t, t') .$$

Notons enfin que $\underline{x}'$ et $\underline{x}''$ sont les positions aux instants t' et t'' d'une même particule M s'il existe *une* valeur de t telle que

$$\underline{F}(\underline{x}', t', t) = \underline{F}(\underline{x}'', t'', t) , \tag{8}$$

et d'ailleurs cette relation est alors vraie à *tout* instant t.

Afin de dégager exactement les concepts mathématiques sous-jacents plaçons nous dans l'espace-temps en choisissant pour coordonnées :

$$\hat{x}_1 = x_1 , \hat{x}_2 = x_2 , \hat{x}_3 = x_3 , \hat{x}_4 = t . \tag{9}$$

De manière analogue à ce qui précède on notera :

$$\underline{\hat{x}} = (\hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 , \hat{x}_4) = (\underline{x} , t) . \tag{10}$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$t \rightarrow s = t - t' . \tag{11}$$

Les relations (5) et (11) s'écrivent, dans l'espace-temps

$$\underline{\hat{x}} = \underline{\hat{G}}(\underline{\hat{x}}' , s) \tag{12}$$

à condition de poser :

$$G_i(\underline{\hat{x}}', s) = F_i(\underline{x}', t', t) \qquad i = 1,2,3 \tag{13}$$

([1]) Nous avons déjà noté que la condition (3) est une conséquence de (1) et de (2), comme on le voit en faisant t' = t dans (2).

$$\hat{G}_4\ (\hat{\underline{x}}'\ ,\ s)\ =\ t + s \quad . \tag{14}$$

Posons par commodité :

$$s_1 = t'' - t' \qquad , \qquad s_2 = t - t''$$

avec naturellement

$$s = s_1 + s_2 \quad .$$

Les deux propriétés indépendantes (1) et (2) de l'application Π s'écrivent respectivement, dans l'espace-temps :

$$\underline{\hat{G}}\ (\hat{\underline{x}}\ ,\ 0)\ =\ \hat{\underline{x}} \tag{15}$$

$$\underline{\hat{G}}\ (\hat{\underline{x}}',\ s_1 + s_2) = \underline{\hat{G}}(.,\ s_2)\ \mathrm{o}\ \underline{\hat{G}}(\hat{\underline{x}}',\ s_1) \quad . \tag{16}$$

Selon la terminologie mathématique, un système S *en mouvement détermine une variété de l'espace-temps et, sur cette variété, un groupe* Π *de transformations à un paramètre.*

I.1.2. - Trajectoires. Lignes d'émission. Champ de vitesses. Lignes de courant. - Nous nous proposons maintenant d'introduire ou de rappeler quelques notions de cinématique.

La trajectoire de la particule M *est le lieu dans R des positions* M^t *quand* t *varie.* Analytiquement

$$x_i\ =\ F_i(X_1,\ X_2,\ X_3,\ T,\ t) \quad , \tag{17}$$

où X_1, X_2, X_3, T sont fixes, définit une représentation paramétrique de la trajectoire de la particule M qui à l'instant T se trouve en $\underline{X}$. L'ensemble des trajectoires d'un système S dépend en général de 3 paramètres; on l'obtient en effet en maintenant T fixe et en faisant varier $\underline{X}$ dans S^T.

La ligne d'émission du point donné $\underline{X}$ *à l'instant donné* t *est le lieu des positions* $\underline{x}$ *à l'instant* t *des particules qui, à un instant* T *, sont passées ou passeront en* $\underline{X}$. Cette ligne d'émission est donc donnée paramétriquement par les fonctions $x_i(T)$:

$$x_i\ =\ F_i(X_1,\ X_2,\ X_3,\ T,\ t) \tag{18}$$

où X_1, X_2, X_3, t ont des valeurs fixées.

La vitesse à l'instant t *de la particule située en* $\underline{x}'$ *à l'instant* t' *est le vecteur* $\vec{U}$ *dont les composantes dans* R *sont données par*

$$U_i\ =\ \frac{\partial F_i}{\partial t}\ (\underline{x}'\ ,\ t'\ ,t) \quad . \tag{19}$$

On vérifie que l'expression est indépendante du choix du point $M^{t'}(\underline{x}',t')$ utilisé pour définir la trajectoire de M; en effet, pour un autre choix $M^{t''}(\underline{x}'', t'')$, comme (8) est vérifiée pour tout t, on peut écrire

$$\frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{x}', t', t) = \frac{\partial F_i}{\partial t}(\underline{x}'', t'', t) \quad . \tag{20}$$

Pour éviter toute confusion nous écrivons $F_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau', \tau)$ la fonction F_i en distinguant, par cette notation, les variables dont elle dépend, des valeurs que peuvent prendre ces variables. On peut écrire alors les composantes du vecteur vitesse $\vec{U}$ directement en fonction de $\underline{x}$ et de t :

$$U_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial F_i}{\partial \tau}(\underline{x}, t, t) \quad . \tag{21}$$

De même l'*accélération* de la particule M à l'instant t est donnée par ses composantes dans R

$$\gamma_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial \tau^2}(\underline{x}, t, t) \quad . \tag{22}$$

Les lignes de courant sont définies à un instant t_o *fixé. Ce sont à cet instant les lignes du champ des vitesses, c'est-à-dire les lignes qui en chacun de leurs points ont une tangente parallèle au vecteur vitesse.* Ces lignes sont donc les intégrales du système différentiel

$$\frac{dx_1}{U_1(x_1, x_2, x_3, t_o)} = \frac{dx_2}{U_2(x_1, x_2, x_3, t_o)} = \frac{dx_3}{U_3(x_1, x_2, x_3, t_o)} \tag{23}$$

dans lequel t a la valeur fixée t_o.

On prendra soin de ne pas confondre trajectoires et lignes de courant. Les premières sont les lieux des particules quand le temps varie. La définition de la vitesse montre qu'elles sont solutions du système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad , \tag{24}$$

dans lequel t *est une variable,* et que, par conséquent, elles ne sauraient être confondues, malgré la ressemblance de (23) et de (24), avec les secondes qui sont les lignes du champ des vitesses à un instant t donné.

On dit que le mouvement est *stationnaire* si

$$x_i = F_i(\underline{x}', t', t) = G_i(\underline{x}', t-t') \quad . \tag{25}$$

Seule intervient la différence des temps s = t-t' (et non les temps t et t' eux-mêmes).

D'après (21) il en résulte que le champ des vitesses $\vec{U}(\underline{x},t)$, pour un mouvement stationnaire, ne dépend pas du temps t car

$$U_i(\underline{x}, t) = \frac{\partial G_i}{\partial s}(\underline{x}, 0) \quad .$$

Dans ces conditions les lignes de courant sont définies indépendamment de t et sont donc les mêmes à tout instant. Dans ce cas particulier, lignes de courant et trajectoires sont constituées par le même réseau de courbes. Celles-ci sont d'ailleurs aussi les lignes d'émission; ceci résulte très simplement de l'égalité (25).

I.1.3. - Description lagrangienne.- Connaître le mouvement d'un système par rapport à R, c'est connaître les fonctions F_i traduisant l'application Π dans le repère R. Ces fonctions sont donc les inconnues d'un problème de mécanique des milieux continus. Mais ces fonctions présentent un inconvénient majeur : elles doivent vérifier des identités assez compliquées - par exemple (7). Ceci est évidemment lié à l'introduction de variables surabondantes. Pour éviter cette difficulté, il suffit de rapporter les configurations S^t du système à une configuration particulière S^o correspondant à un temps t = 0 fixé. Appelons a_i (i = 1, 2, 3) les coordonnées de M^o dans R. Les *variables* a_1, a_2, a_3, t *sont appelées variables de Lagrange.*

Posons :

$$\underline{F}(\underline{a}, 0, t) = \underline{\Phi}(\underline{a},t),\ \underline{F}(\underline{x},t,0) = \underline{\Psi}(\underline{x},t)\ ; \tag{26}$$

on a alors

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{a}, t),\ \underline{a} = \underline{\Psi}(\underline{x}, t)\quad . \tag{27}$$

La première égalité donne la position $\underline{x}$ à l'instant t de la particule M repérée par $\underline{a}$ dans la configuration S^o, la seconde la valeur de $\underline{a}$ associée à la particule qui se trouve en $\underline{x}$ à l'instant $\underline{t}$. Les fonctions $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$ forment un couple de fonctions réciproques :

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{\Psi}(\underline{x}, t), t),\ \underline{a} = \underline{\Psi}(\underline{\Phi}(\underline{a}, t), t)\quad . \tag{28}$$

Le fait que la configuration S^o soit la configuration particulière pour t = 0 implique les relations supplémentaires

$$\underline{a} = \underline{\Phi}(\underline{a}, 0),\ \underline{x} = \underline{\Psi}(\underline{x}, 0)\quad . \tag{29}$$

Réciproquement, un couple de fonctions réciproques tel que (27) *peut être interprété comme définissant un système en mouvement dans R.* En effet, il est possible de définir la fonction $\underline{F}$ introduite en *I.1.1* par

$$\underline{F}(\underline{x}',t',t) = \underline{\Phi}(\underline{\Psi}(\underline{x}', t'),t) = \underline{\Phi}(.,t) \circ \underline{\Psi}(\underline{x}',t')\quad , \tag{30}$$

et l'on vérifie aisément que cette fonction $\underline{F}$ satisfait alors aux conditions (6) et (7); pour (6), cela résulte de (28) . Pour (7), on peut poser $\underline{a} = \underline{\Psi}(\underline{x}',t')$; le second membre de (7) s'écrit alors - en vertu de (28) -

$$\underline{\Phi}\{\underline{\Psi}[\underline{\Phi}(\underline{a},t''),t''],t\} = \underline{\Phi}\{\underline{a},t\} = \underline{\Phi}\{\underline{\Psi}(\underline{x}',t'),t\}\quad ,$$

ce qui redonne bien le premier membre de (7). Avec une notation légèrement différente, on aurait pu écrire l'égalité conduisant au résultat

$$\underline{\Phi}(.,t) \circ \underline{\Psi}(.,t'') \circ \underline{\Phi}(.,t'') \circ \underline{\Psi}(\underline{x}',t') = \underline{\Phi}(.,t) \circ \underline{\Psi}(\underline{x}',t')\quad .$$

Nous n'avons jamais fait appel pour établir cette réciproque aux relations (29). En conséquence, il n'est nullement nécessaire que l'ensemble ([1]) S^a des valeurs des paramètres a_i constitue une configuration particulière du système; on dit alors que S^a est une *configuration abstraite* utilisée pour représenter les différentes particules. Il n'est même pas nécessaire que les a_i soient les coordonnées des points de S^a dans le repère R. La configuration abstraite S^a peut être définie avec une grande généralité et cette latitude peut être mise à profit dans certaines applications.

Notons pour terminer que les champs des vitesses et des accélérations sont définis par :

$$\underline{U} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{a},t), \quad \underline{\gamma} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\underline{a}, t) . \tag{31}$$

Si l'on veut expliciter $\underline{U}(\underline{x}, t)$, $\underline{\gamma}(\underline{x},t)$, il faut remplacer $\underline{a}$ par $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$.

En résumé, la description lagrangienne est déterminée par la seule fonction $\underline{\Phi}(\underline{a}, t)$ - les $\Phi_i(\underline{a}, t)$ constituant les inconnues de Lagrange décrivant le mouvement du système. Cette fonction $\underline{\Phi}(\underline{a}, t)$ doit, pour tout t, admettre une fonction réciproque $\underline{\Psi}(\underline{x}, t)$. Aucune condition supplémentaire (autre qu'éventuellement des conditions de régularité) n'est à imposer à $\underline{\Phi}$.

I.1.4. - Description eulérienne. - Elle s'effectue, elle aussi, à l'aide d'un système de 4 variables indépendantes dites *variables d'Euler* qui sont x_1, x_2, x_3 et t; les x_i donnent les coordonnées de la position de la particule M à l'instant t; *les inconnues d'Euler* sont les composantes $U_i(x_1, x_2, x_3,t)$ de la vitesse de la particule M à l'instant t. Pour justifier cette définition, il faut montrer que la connaissance de ces fonctions U_i permet de définir les fonctions F_i introduites en *I.1.1.* Or celles-ci sont simplement les solutions du système différentiel (24), $x_i(t)$, qui satisfont aux conditions initiales suivantes : pour $t = t'$, $x_i = x_i'$, x_i' et t' étant considérées comme des données. On admettra ici que les $U_i(\underline{x},t)$ sont suffisamment régulières pour que l'existence et l'unicité de cette solution soient garanties. Il reste alors à vérifier la propriété de groupe, par exemple sous la forme (7).

A cet effet il sera encore une fois intéressant de travailler dans l'espace-temps (voir (9) à (14)). Introduisons le vecteur vitesse quadridimensionnel défini de manière naturelle par :

$$\hat{U}_1 = U_1 , \quad \hat{U}_2 = U_2 , \quad \hat{U}_3 = U_3 , \quad \hat{U}_4 = 1 . \tag{32}$$

([1]) Nous notons S^a cet ensemble (et non S^o) pour bien spécifier que la configuration de référence n'est pas nécessairement la configuration à l'instant t = 0.

Le système (24) s'écrit alors ([1]) :

$$\frac{d\hat{x}_\alpha}{ds} = \hat{U}_\alpha(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4 \ . \tag{33}$$

La solution de (33) qui, pour s = 0, prend les valeurs $\hat{x}'_\alpha$ sera écrite :

$$\hat{x}_\alpha = \hat{G}_\alpha(\hat{\underline{x}}', s) \tag{34}$$

et elle satisfait à l'identité :

$$\hat{\underline{G}}(\hat{\underline{y}}, 0) = \hat{\underline{y}} \ . \tag{35}$$

On notera que la quatrième équation de (34) n'est autre que (11).

Prenons une valeur particulière de s, soit s_1 et posons

$$\hat{x}''_\alpha = \hat{G}_\alpha(\hat{\underline{x}}', s_1) \ . \tag{36}$$

La remarque suivante conduit au résultat cherché : $\hat{G}_\alpha(\hat{\underline{x}}'', s - s_1)$ et $\hat{G}_\alpha(\hat{\underline{x}}', s)$ sont deux solutions de (33) qui pour $s = s_1$ prennent la même valeur $\hat{\underline{x}}''$ d'après (35) et (36); en vertu du théorème d'unicité elles sont identiques. Si on pose $s_2 = s - s_1$, on a donc :

$$\hat{\underline{G}}\{\hat{\underline{G}}(\hat{\underline{x}}', s_1), s_2\} = \hat{\underline{G}}(\hat{\underline{x}}', s_1 + s_2) \tag{37}$$

ou

$$\hat{\underline{G}}(., s_2) \circ \hat{\underline{G}}(\hat{\underline{x}}', s_1) = \hat{\underline{G}}(\hat{\underline{x}}', s_1 + s_2)$$

qui est bien la relation de groupe (16). On vérifie que cette relation s'identifie à la relation (7), si on pose, conformément à (9) et à (11),

$$F_i(\underline{x}', t', t) = \hat{G}_i(\hat{\underline{x}}', s) = \hat{G}_i(x'_1, x'_2, x'_3, t', t-t') \ , \qquad (i=1,2,3) \ ,$$

car si on note $\hat{x}''_4 = t''$, alors $s_1 = t'' - t'$, $s_2 = t - t''$.

REMARQUE.- L'intérêt d'écrire le système sous la forme (33) est de faire apparaître l'invariance de la solution par translation sur la variable s. Dans le cas où le champ des vitesses $\underline{U}(\underline{x}, t)$ ne dépend pas du temps t, le système (24) est lui-même invariant par translation sur la variable t; on peut alors raisonner directement sur ce système sans faire le changement de variables (9)-(11) ou (13). Soit par cette étude directe, soit en remarquant que, dans ces conditions la variable $\hat{x}_4$ ne figure ni dans les seconds membres de (33) ni par suite dans l'expression des fonctions $\hat{G}_\alpha$, on arrive au résultat (25) : le mouvement est stationnaire.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Le mouvement est stationnaire si, et seulement si, le champ des vitesses $\underline{U}(\underline{x}, t)$ *ne dépend pas du temps* t.

([1]) Selon la terminologie mathématique, le champ des vitesses $\hat{\underline{U}}$ est le générateur infinitésimal du groupe Π. Le problème est donc de construire ce groupe à partir de son générateur infinitésimal.