Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

946

Nicolas Spaltenstein

Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Auteur
N. Spaltenstein
Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zentrum
8092 Zürich, Switzerland

AMS Subject Classifications (1980): 14 L XX, 20-02, 20 G XX

ISBN 3-540-11585-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-11585-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to "Verwertungsgesellschaft Wort", Munich.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1982
Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–729, please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 730: Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Proceedings, 1978. Edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walther. XV, 503 pages. 1979.

Vol. 731: Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras. IX, 139 pages. 1979.

Vol. 732: Algebraic Geometry. Proceedings, 1978. Edited by K. Lønsted. IV, 658 pages. 1979.

Vol. 733: F. Bloom, Modern Differential Geometric Techniques in the Theory of Continuous Distributions of Dislocations. XII, 206 pages. 1979.

Vol. 734: Ring Theory, Waterloo, 1978. Proceedings, 1978. Edited by D. Handelman and J. Lawrence. XI, 352 pages. 1979.

Vol. 735: B. Aupetit, Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach. XII, 192 pages. 1979.

Vol. 736: E. Behrends, M-Structure and the Banach-Stone Theorem. X, 217 pages. 1979.

Vol. 737: Volterra Equations. Proceedings 1978. Edited by S.-O. Londen and O. J. Staffans. VIII, 314 pages. 1979.

Vol. 738: P. E. Conner, Differentiable Periodic Maps. 2nd edition, IV, 181 pages. 1979.

Vol. 739: Analyse Harmonique sur les Groupes de Lie II. Proceedings, 1976–78. Edited by P. Eymard et al. VI, 646 pages. 1979.

Vol. 740: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil. Proceedings, 1977–78. Edited by M.-P. Malliavin. V, 456 pages. 1979.

Vol. 741: Algebraic Topology, Waterloo 1978. Proceedings. Edited by P. Hoffman and V. Snaith. XI, 655 pages. 1979.

Vol. 742: K. Clancey, Seminormal Operators. VII, 125 pages. 1979.

Vol. 743: Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis. Proceedings, 1976. Edited by C. Andreian Cazacu et al. XVI, 713 pages. 1979.

Vol. 744: I. Reiner and K. W. Roggenkamp, Integral Representations. VIII, 275 pages. 1979.

Vol. 745: D. K. Haley, Equational Compactness in Rings. III, 167 pages. 1979.

Vol. 746: P. Hoffman, τ-Rings and Wreath Product Representations. V, 148 pages. 1979.

Vol. 747: Complex Analysis, Joensuu 1978. Proceedings, 1978. Edited by I. Laine, O. Lehto and T. Sorvali. XV, 450 pages. 1979.

Vol. 748: Combinatorial Mathematics VI. Proceedings, 1978. Edited by A. F. Horadam and W. D. Wallis. IX, 206 pages. 1979.

Vol. 749: V. Girault and P.-A. Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. VII, 200 pages. 1979.

Vol. 750: J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht. III, 195 Seiten. 1979.

Vol. 751: Number Theory, Carbondale 1979. Proceedings. Edited by M. B. Nathanson. V, 342 pages. 1979.

Vol. 752: M. Barr, *-Autonomous Categories. VI, 140 pages. 1979.

Vol. 753: Applications of Sheaves. Proceedings, 1977. Edited by M. Fourman, C. Mulvey and D. Scott. XIV, 779 pages. 1979.

Vol. 754: O. A. Laudal, Formal Moduli of Algebraic Structures. III, 161 pages. 1979.

Vol. 755: Global Analysis. Proceedings, 1978. Edited by M. Grmela and J. E. Marsden. VII, 377 pages. 1979.

Vol. 756: H. O. Cordes, Elliptic Pseudo-Differential Operators – An Abstract Theory. IX, 331 pages. 1979.

Vol. 757: Smoothing Techniques for Curve Estimation. Proceedings, 1979. Edited by Th. Gasser and M. Rosenblatt. V, 245 pages. 1979.

Vol. 758: C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen; Graded and Filtered Rings and Modules. X, 148 pages. 1979.

Vol. 759: R. L. Epstein, Degrees of Unsolvability: Structure and Theory. XIV, 216 pages. 1979.

Vol. 760: H.-O. Georgii, Canonical Gibbs Measures. VIII, 190 pages. 1979.

Vol. 761: K. Johannson, Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries. 2, 303 pages. 1979.

Vol. 762: D. H. Sattinger, Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. V, 241 pages. 1979.

Vol. 763: Algebraic Topology, Aarhus 1978. Proceedings, 1978. Edited by J. L. Dupont and H. Madsen. VI, 695 pages. 1979.

Vol. 764: B. Srinivasan, Representations of Finite Chevalley Groups. XI, 177 pages. 1979.

Vol. 765: Padé Approximation and its Applications. Proceedings, 1979. Edited by L. Wuytack. VI, 392 pages. 1979.

Vol. 766: T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory. VIII, 309 pages. 1979.

Vol. 767: M. Namba, Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann Surfaces. XII, 284 pages. 1979.

Vol. 768: R. S. Doran and J. Wichmann, Approximate Identities and Factorization in Banach Modules. X, 305 pages. 1979.

Vol. 769: J. Flum, M. Ziegler, Topological Model Theory. X, 151 pages. 1980.

Vol. 770: Séminaire Bourbaki vol. 1978/79 Exposés 525–542. IV, 341 pages. 1980.

Vol. 771: Approximation Methods for Navier-Stokes Problems. Proceedings, 1979. Edited by R. Rautmann. XVI, 581 pages. 1980.

Vol. 772: J. P. Levine, Algebraic Structure of Knot Modules. XI, 104 pages. 1980.

Vol. 773: Numerical Analysis. Proceedings, 1979. Edited by G. A. Watson. X, 184 pages. 1980.

Vol. 774: R. Azencott, Y. Guivarc'h, R. F. Gundy, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VIII-1978. Edited by P. L. Hennequin. XIII, 334 pages. 1980.

Vol. 775: Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1979. Edited by G. Kaiser and J. E. Marsden. VII, 257 pages. 1980.

Vol. 776: B. Gross, Arithmetic on Elliptic Curves with Complex Multiplication. V, 95 pages. 1980.

Vol. 777: Séminaire sur les Singularités des Surfaces. Proceedings, 1976-1977. Edited by M. Demazure, H. Pinkham and B. Teissier. IX, 339 pages. 1980.

Vol. 778: SK_1 von Schiefkörpern. Proceedings, 1976. Edited by P. Draxl and M. Kneser. II, 124 pages. 1980.

Vol. 779: Euclidean Harmonic Analysis. Proceedings, 1979. Edited by J. J. Benedetto. III, 177 pages. 1980.

Vol. 780: L. Schwartz, Semi-Martingales sur des Variétés, et Martingales Conformes sur des Variétés Analytiques Complexes. XV, 132 pages. 1980.

Vol. 781: Harmonic Analysis Iraklion 1978. Proceedings 1978. Edited by N. Petridis, S. K. Pichorides and N. Varopoulos. V, 213 pages. 1980.

Vol. 782: Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems. Proceedings, 1978. Edited by C. Bardos, J. M. Lasry and M. Schatzman. VIII, 296 pages. 1980.

Vol. 783: A. Dinghas, Wertverteilung meromorpher Funktionen in ein- und mehrfach zusammenhängenden Gebieten. Edited by R. Nevanlinna and C. Andreian Cazacu. XIII, 145 pages. 1980.

Vol. 784: Séminaire de Probabilités XIV. Proceedings, 1978/79. Edited by J. Azéma and M. Yor. VIII, 546 pages. 1980.

Vol. 785: W. M. Schmidt, Diophantine Approximation. X, 299 pages. 1980.

Vol. 786: I. J. Maddox, Infinite Matrices of Operators. V, 122 pages. 1980.

continuation on page 261

A ma mère

Introduction

L'objet principal de ces notes est l'étude de la variété $\mathcal{B}_x^G$ des points fixes d'un élément x d'un groupe algébrique affine G sur la variété $\mathcal{B}^G$ des sous-groupes de Borel de G , en particulier dans le cas où x est unipotent et G réductif.

Cette variété a été l'objet de divers travaux. Mentionnons en particulier ceux de Steinberg [42], [43], Vargas [45] et Cross (thèse, Durham), dont les méthodes sont semblables à celles utilisées ici. Presque tous se bornent à considérer le cas où G est connexe; en fait ces techniques s'adaptent souvent au cas où G n'est pas connexe, pour autant qu'on utilise les bonnes formulations, et on a essayé de travailler dans cette situation. En particulier, les groupes réductifs ne sont pas supposés forcément connexes. Comme groupes réductifs non connexes apparaissant naturellement, on trouve O_{2n} (où intervient la symétrie d'ordre 2 du graphe D_n) et le groupe des colinéations et corrélations d'un espace projectif (où intervient la symétrie d'ordre 2 du graphe A_n) . D'autres groupes proviennent de la symétrie d'ordre 3 du graphe D_4 et de la symétrie d'ordre 2 du graphe E_6 . On a ainsi deux familles et deux cas exceptionnels. Quand la caractéristique du corps de base est égale à l'ordre de la symétrie, on obtient de nouvelles classes unipotentes. Avec ces classes unipotentes et celles des groupes simples connexes, on a essentiellement toutes les classes unipotentes des groupes réductifs (en supposant résolus certains problèmes concernant le groupe fini G/G^o) .

Une première partie - "Notations et rappels" - a pour but de fixer les notations et de formuler certaines définitions et quelques résultats sous une forme appropriée à l'usage qui en est fait. En particulier, le groupe de Weyl est défini comme étant l'ensemble des G^o-orbites dans $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ muni de la structure du groupe convenable (voir par exemple [19]).

Le chapitre I est consacré à l'étude des classes unipotentes des groupes réductifs. Au paragraphe 1 on montre en particulier comment se ramener aux cas cités plus haut. Le paragraphe 2 est consacré à un exposé des résultats concernant la classification des éléments unipotents, en particulier pour les groupes classiques. Au paragraphe 3 on traite le cas de la symétrie d'ordre 3 du graphe D_4 par des calculs explicites utilisant les formules de commutation. La même méthode pourrait être utilisée pour la symétrie d'ordre 2 du graphe E_6 . Les calculs seraient cependant beaucoup plus longs et sensiblement plus longs que ceux faits en (II.10.14). On se contente de montrer au paragraphe 4 qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes unipotentes provenant de cette symétrie du graphe E_6 . La démonstration est due à G. Lusztig. C'est une adaptation de la démonstration pour les groupes réductifs connexes de la finitude du nombre de classes unipotentes. On en déduit que le même résultat est vrai pour les groupes réductifs non connexes. Ce paragraphe fait appel à des techniques et des résultats qui dépassent de loin ce qui est utilisé dans le reste de l'ouvrage.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

La finitude du nombre de classes unipotentes se révèle extrêmement utile par la suite. Les lecteurs que cette démonstration rebuterait peuvent, soit accepter ce résultat, soit rajouter aux endroits appropriés une hypothèse de finitude et se contenter de savoir qu'elle est vraie dans certains cas importants (groupes classiques d'après les travaux de Wall [46], groupes réductifs connexes en bonne caractéristique d'après Richardson [25], etc.).

Le chapitre II est consacré à l'étude de $\mathcal{B}_x^G$ et à quelques applications. La plupart du temps, on considère une composante unipotente fixe uG^o de G . Les résultats les plus complets sont obtenus pour les groupes classiques et, surtout, pour GL_n . Au paragraphe 9 on étudie certaines relations d'équivalence sur les groupes de Weyl. Ces relations d'équivalence s'apparentent à celle qui intervient dans l'étude du spectre primitif des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples complexes. On a en fait la même relation pour le type A_n , mais pour B_n ces relations d'équivalence ne sont pas comparables.

Au chapitre III on suppose, pour simplifier, que G est un groupe réductif connexe. L'ensemble X des classes unipotentes de G possède un ordre naturel. Lorsque $G = GL_n$, X possède aussi une involution décroissante. On regarde dans quelle mesure un résultat similaire existe dans le cas général. On étudie aussi la dépendance de X par rapport à la caractéristique, et on met en correspondance les éléments de X avec certaines classes unipotentes de certains sous-groupes d'un groupe dual G^* de G . Tout le chapitre est basé sur l'utilisation systématique de la structure d'ordre de X . Malheureusement, les résultats sont obtenus par des considérations cas par cas et en utilisant la classification des éléments unipotents. Les résultats de ce chapitre peuvent donc plutôt être vus comme une partie de ce que devrait recouvrir une théorie générale des classes unipotentes.

Deux aspects de l'étude des classes unipotentes ont été laissés de côté. Le premier est la théorie de Springer [37] qui met en relation les classes unipotentes de G et les représentations complexes irréductibles du groupe de Weyl de G . Certaines opérations sur les classes unipotentes se traduisent facilement en termes de représentations (voir, par exemple, [22]), ce qui aurait pu permettre de simplifier certains énoncés du chapitre III, mais ce n'est pas toujours le cas, surtout pour les opérations qui dépendent de la caractéristique du corps de base. De plus, la théorie de Springer a pour l'instant certaines limitations en mauvaise caractéristique.

L'autre aspect est l'étude des nappes dans G , c'est-à-dire des sous-variétés irréductibles de G formées de classes d'une même dimension, et maximales pour cette propriété. Cet aspect est lié à l'induction pour les classes unipotentes.

Beaucoup des résultats obtenus s'appliquent aussi aux éléments nilpotents des algèbres de Lie des groupes réductifs. La difficulté principale provient, dans ce cas, du fait qu'on ne dispose pas actuellement d'un théorème de finitude pour le nombre d'orbites nilpotentes sans hypothèse sur la caractéristique.

Certains résultats bien connus sont redémontrés dans ce travail. On en a profité pour adopter les énoncés qui conviennent le mieux à l'usage qu'on veut en faire et pour expliciter certains résultats annexes. C'est le cas, par exemple, pour les résultats du paragraphe 1 du chapitre II concernant les centralisateurs d'éléments quasi-semi-simples des groupes réductifs. Cela permet aussi de limiter le nombre de références. En plus de la théorie classique des groupes algébriques affines sur un corps algébriquement clos telle qu'elle est exposée dans les livres de Borel [2] et Humphreys [16] , les principaux résultats supposés connus sont ainsi ceux ayant trait à la finitude du nombre de classes unipotentes et à la détermination de ces dernières, et le résultat de Steinberg selon lequel $\mathcal{B}_x^G$ n'est jamais vide [41].

Durant la réalisation de ce travail j'ai beaucoup bénéficié de l'aide directe ou indirecte de nombreux mathématiciens. Parmi eux je tiens à remercier tout particulièrement George Lusztig qui m'a parlé le premier de ces problèmes et qui m'a stimulé et guidé, et aussi R.W. Carter, R.W. Richardson, T.A. Springer et J. Tits. Ce travail a été commencé à l'Université de Warwick, poursuivi à l'IHES, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et à l'Université de Lausanne; j'ai bénéficié à divers moments du soutien matériel du Fonds national suisse de la recherche scientifique et de la Royal Society. Je désire enfin exprimer ma gratitude à Madame Suzanne Assal qui s'est chargée de la frappe du manuscript.

Lausanne, août 1980

TABLE DES MATIERES

Notations et rappels.

0.1. Toutes les variétés algébriques considérées ici sont définies sur un corps algébriquement clos k. On note en général p la caractéristique de k.

0.2. On ne considère que des groupes algébriques <u>linéaires</u>.

0.3. Si G est un groupe algébrique, on note $\mathcal{B}^G$ la variété des sous-groupes de Borel de G. Le groupe G agit par conjugaison sur $\mathcal{B}^G$. Nous étudions ici la variété $\mathcal{B}_x^G = \{B' \in \mathcal{B}^G \mid {}^xB' = B'\}$, où $x \in G$. Cette variété n'est jamais vide [41, p.49] et $C_G(x)$ agit sur $\mathcal{B}_x^G$. On note $S^G(x)$, ou $S(x)$ quand aucune confusion n'est à craindre, l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{B}_x^G$. On écrit aussi $(X_\sigma)_{\sigma \in S(x)}$ pour ces composantes. Le groupe $A(x) = C_G(x)/C_G(x)^0$ agit sur $S(x)$. Soit aussi $A_0(x) = C_{G^0}(x)/C_G(x)^0 \subset A(x)$.

Si G' est un sous-groupe fermé de G normalisé par x, on définit de même $\mathcal{B}_x^{G'}$.

Dans ce qui suit, G est toujours un groupe algébrique.

0.4. Si H est un sous-groupe de G et $x \in G$, on note $c\ell_H(x) = \{hxh^{-1} \mid h \in H\}$ la H-classe de conjugaison de x. Si X est une sous-variété de G, on note $\mathcal{U}(X)$ la variété des éléments unipotents de G contenus dans X. Si X est H-stable, on note $\mathcal{C}\ell_H(X)$ l'ensemble des H-classes de conjugaison d'éléments de X et on écrit $\mathcal{CU}_H(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_H(\mathcal{U}(X))$. Quand aucune confusion n'est à craindre on écrit aussi $c\ell(x)$ pour $c\ell_G(x)$, $c\ell^0(x)$ pour $c\ell_{G^0}(x)$, $\mathcal{C}\ell(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_G(X)$, $\mathcal{C}\ell^0(X)$ pour $\mathcal{C}\ell_{G^0}(X)$, $\mathcal{CU}(X)$ pour $\mathcal{CU}_G(X)$ et $\mathcal{CU}^0(X)$ pour $\mathcal{CU}_{G^0}(X)$.

0.5. On note R_G le radical de G et U_G le radical unipotent de G.

0.6. Dans ce travail, u est un élément unipotent d'un groupe algébrique. En particulier, si $s \in G$ et si $x=su$ est la décomposition de Jordan de x, alors u est la partie unipotente de x et s la partie semi-simple.

0.7. On choisit une fois pour toutes un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T de B. On écrit U pour U_B et N pour $N_G(B)$, sauf mention expresse du contraire. On note B^- l'unique sous-groupe de Borel de G tel que $B \cap B^- = TU_G$, et on pose $U^- = U_{B^-}$.

0.8. Si X est un ensemble, on note $|X|$ le cardinal de X, et si H est un groupe qui agit sur X on note X/H l'ensemble des orbites pour cette action.

0.9. On note W_G, ou W si aucune confusion n'est possible, le groupe de Weyl de G. On le définit de la manière suivante. Comme ensemble, $W = (\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G)/G^0$, où l'on considère l'action diagonale. On écrira souvent w pour une telle orbite considérée comme un élément du groupe fini W, et $O(w)$ pour la même orbite considérée comme variété. Si $w \in W$, la longueur de w est $\ell(w) = \dim O(w) - \dim \mathcal{B}^G$.

Soit $\Pi = \{w \in W \mid \ell(w)=1\}$. La loi de composition dans W est définie par :

a) $s^2 = 1$ si $s \in \Pi$

b) si $w, w', w'' \in W$ et $O(w) = O(w'') \bullet O(w')$, alors $w=w'w''$ (par définition, $O(w'') \bullet O(w') = \{(B_0, B_2) \in \mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G \mid$ il existe $B_1 \in \mathcal{B}^G$ tel que $(B_0, B_1) \in O(w')$ et $(B_1, B_2) \in O(w'')\})$.

Cela fait de (W, Π) un système de Coxeter. Si $O(w'') \bullet O(w') = O(w)$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

alors $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'')$. Pour tout $w \in W$, $\ell(w) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid \exists\ s_1,\dots,s_j \in \Pi$ tels que $w = s_1 \dots s_j\}$.

Si $I \subset \Pi$, on note W_I le sous-groupe de W engendré par I .

Il existe dans W un unique élément de longueur maximale. On le note w_G .

0.10. L'action diagonale de G sur $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ induit une action $(g,w) \mapsto g\cdot w$ de G (ou G/G^o) sur W , et Π est stable pour cette action. Si $w \in W$, on note $\overline{w}$ l'orbite de w et $\overline{W} = \{\overline{w} \mid w \in W\}$. Pour tout $x \in G$, $w \mapsto x\cdot w$ est un automorphisme de W .

0.11. Nous considérons maintenant l'action de u sur W (c'est-à-dire l'action du groupe cyclique engendré par u). On note $o(s)$ l'orbite de $s \in \Pi$ pour cette action. Soit s^* l'unique élément de longueur maximale dans $W_{o(s)}$. Le groupe $W^u = \{w \in W \mid u\cdot w = w\}$ est engendré par $\Pi_u = \{s^* \mid s \in \Pi\}$, et (W^u, Π_u) est un système de Coxeter. Si $w \in W^u$, soit $\ell_u(w) = \min\{ j \in \mathbb{N} \mid$ il existe $s_1,\dots,s_j \in \Pi$ tels que $w = s_1^* \dots s_j^*\}$. Si $w = s_1^* \dots s_j^*$, alors $\ell_u(w) = j$ si et seulement si $\ell(w) = \ell(s_1^*) + \dots + \ell(s_j^*)$.

Si $u \in G^o$, alors $W^u = W$ et $\ell_u(w) = \ell(w)$ pour tout $w \in W$.

0.12. Si $w, w' \in W$ et $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors $O(ww')$ est le produit fibré de $O(w)$ et $O(w')$ pour les morphismes $pr_2 : O(w) \to \mathcal{B}^G$ et $pr_1 : O(w') \to \mathcal{B}^G$. En particulier, si $(B_o, B_2) \in O(ww')$, il existe un unique $B_1 \in \mathcal{B}^G$ tel que $(B_o, B_1) \in O(w)$ et $(B_1, B_2) \in O(w')$. Cela définit un morphisme surjectif $O(ww') \to \mathcal{B}^G$, $(B_o, B_2) \mapsto B_1$. Si $w = s_1^* \dots s_j^*$ et $\ell_u(w) = j$ $(s_1, \dots, s_j \in \Pi)$, alors pour tout couple $(B_o, B_j) \in O(w)$ il existe une famille $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant j-1}$ d'éléments de $\mathcal{B}^G$ telle que $(B_{i-1}, B_i) \in O(s_i^*)$ pour $1 \leqslant i \leqslant j$, et cette famille est unique.

0.13. Soit X une sous-variété irréductible de $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$. On lui associe l'unique élément $w = \varphi^G(X)$ de W tel que $\overline{X \cap O(w)} = \overline{X}$. Si $x \in G$ et $\sigma, \tau \in S(x)$, on pose $\varphi^G(\sigma,\tau) = \varphi^G(X_\sigma \times X_\tau)$. On obtient ainsi une application φ^G de $S(x) \times S(x)$ dans W . On écrit aussi φ au lieu de φ^G si aucune confusion n'est possible. On note $\overline{\varphi}(\sigma,\tau)$ l'orbite de $\varphi(\sigma,\tau)$ pour l'action de G/G^o sur W , et $\overline{\varphi}$ l'application correspondante $S(x) \times S(x) \to \overline{W}$.

0.14. Supposons que G soit réductif. Alors W peut être identifié à $N_{G^o}(T)/T$. Si $n \in N_{G^o}(T)$, nT correspond à la G^o-orbite de $(B, {}^nB)$ dans $\mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$, et on écrit ${}^wB$ pour ${}^nB$ si cette orbite est $O(w)$. De cette manière W correspond à un sous-groupe normal de $N_G(T)/T$ et l'action de G/G^o sur W correspond à l'action par conjugaison de $N_N(T)$ sur $N_{G^o}(T)/T$.

On note $\Delta_o(G)$ le graphe de Dynkin de G^o et on prend les éléments de Π comme sommets de $\Delta_o(G)$. Le groupe G/G^o agit sur $\Delta_o(G)$. On note $\Delta(G)$ le triple $(\Delta_o(G), G/G^o, \gamma_G)$ constitué de $\Delta_o(G)$, du groupe fini G/G^o et de l'homomorphisme naturel $\gamma_G : G/G^o \to \Gamma(G)$, où $\Gamma(G)$ est le groupe des automorphismes de $\Delta_o(G)$.

Soit Φ_G le système de racines de G^o (par rapport à T) et soit X_λ le sous-groupe unipotent de dimension 1 correspondant à $\lambda \in \Phi_G$. Pour tout $\lambda \in \Phi_G$ on choisit un isomorphisme $x_\lambda : \mathbb{G}_a \to X_\lambda$, où $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif de k considéré comme groupe algébrique. On note Φ_G^+ l'ensemble des racines positives (par rapport à B) et Π' la base correspondante.

On peut aussi considérer W comme un groupe d'automorphisme de Φ_G . De manière plus générale, $N_G(T)/T$ agit sur Φ_G , et $N_N(T)/T$ agit sur Π' . A tout $\lambda \in \Phi_G$ correspond une réflection s_λ que nous considérons comme un élément de W. Alors $\alpha \mapsto s_\alpha$ donne une bijection $\Pi' \to \Pi$, et on pose $o(\alpha) = \{\beta \in \Pi' \mid s_\beta \in o(s_\alpha)\}$. On dit que $-1 \in W$ si l'automorphisme $\lambda \mapsto -\lambda$ de Φ_G peut être réalisé par un élément de W.

Soit H un sous-groupe connexe distingué de G^o. Il existe alors un sous-groupe connexe distingué K de G^o tel que G^o soit le produit presque direct de H et K, et $\mathcal{B}^G \cong \mathcal{B}^H \times \mathcal{B}^K$. Cela permet d'identifier W_H à un sous-groupe normal de W. Si $H \supset T$, l'identification de W_H et $N_H(T)/T$ est compatible avec les inclusions $W_H \subset W$ et $N_H(T)/T \subset N_{G^o}(T)/T$.

Si $\Pi' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ (avec $N = |\Pi'|$), on dit que la caractéristique p est bonne si $p = 0$ ou si $p \notin \{n_{\lambda,i} \mid \lambda \in \Phi_G, \ 1 \leqslant i \leqslant N\}$, où les entiers $n_{\lambda,i}$ sont définis par la formule $\lambda = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} n_{\lambda,i}\alpha_i$, et la hauteur de λ est $h(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} n_{\lambda,i}$. On dit que la caractéristique p est assez grande si $p \geqslant 4h(\lambda)+3$ pour tout $\lambda \in \Phi_G$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion, on écrit aussi Φ au lieu de Φ_G, et Φ^+ au lieu de Φ_G^+.

0.15. Supposons que G soit réductif et soit $x \in N_N(T)$. On a alors une action de x sur Φ. Soit $\Phi/\langle x \rangle$ l'ensemble des orbites pour cette action. Alors $W^x = \{w \in W \mid x.w = w\}$ agit sur $\Phi/\langle x \rangle$.

Il existe un système de racines Φ_x et une surjection $\pi_x : \Phi \to \Phi_x$ qui ont les propriétés suivantes :

a) les fibres de π_x sont les x-orbites dans Φ ;

b) $\pi_x(\Pi')$ est une base de Φ_x ;

c) si λ, μ et $\lambda + \mu$ sont des éléments de Φ, alors $\pi_x(\lambda) + \pi_x(\mu) = \pi_x(\lambda+\mu)$ et $\pi_x(-\lambda) = -\pi_x(\lambda)$;

d) π_x induit un isomorphisme de W^x sur le groupe de Weyl W_x de Φ_x. De plus, si $\alpha \in \Pi'$, soit s_α^* l'élément de longueur maximale dans le sous-groupe de W engendré par la x-orbite de s_α et soit $s_{\pi_x(\alpha)} \in W_x$ la réflection correspondant à la racine $\pi_x(\alpha) \in \Phi_x$. Alors s_α^* et $s_{\pi_x(\alpha)}$ se correspondent par π_x.

0.16. Si $P,Q,\ldots$ sont des sous-groupes paraboliques de G, on note $\mathcal{P},\mathcal{Q},\ldots$ les classes de conjugaison de $P,Q,\ldots$ respectivement, et $\mathcal{P}^o,\mathcal{Q}^o,\ldots$ les G^o-classes de conjugaison de $P,Q,\ldots$ respectivement. La G^o-classe de conjugaison $\mathcal{P}^o$ contient un unique sous-groupe qui contient B. L'inclusion $\mathcal{B}^P \times \mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^G \times \mathcal{B}^G$ induit un homomorphisme $W_P \to W$ qui est injectif et qui permet de considérer W_P comme un sous-groupe de W. On associe à P le sous-ensemble $W_P \cap \Pi$ de Π. Cela donne une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G^o contenant B sur l'ensemble des parties de Π. Si $W_P \cap \Pi = I$, alors $W_P = W_I$. Si $J \subset \Pi$, on note $\mathcal{P}_J$ (resp. $\mathcal{P}_J^o$) la classe (resp. la G^o-classe) de conjugaison du normalisateur d'un sous-groupe parabolique de G^o correspondant à J.

Supposons que G soit réductif. Si $P \supset B$ est un sous-groupe parabolique de G, on associe aussi à P le sous-ensemble $\{\alpha \in \Pi' \mid X_{-\alpha} \subset P\}$ de Π'. Soit aussi L l'unique sous-groupe de Levi de P^o contenant T. Alors $N_L(T)/T = N_{P^o}(T)/T \subset N_{G^o}(T)/T$. On obtient ainsi, à identification près, le sous-ensemble $W_P \cap \Pi$ de Π et l'inclusion $W_P \subset W$.

Supposons toujours G réductif et soit P un sous-groupe parabolique quelconque de G. Soit M un sous-groupe de Levi de P^o et soit $L = N_P(M)$. Alors $L^o = M = L \cap P^o$, L rencontre toutes les composantes de P et P est le produit semi-direct de L par U_P. On dit qu'un tel sous-groupe est un sous-groupe de Levi de P.

0.17. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de variétés algébriques. Alors : a) si toutes les fibres de f sont irréductibles et ont la même dimension et si f est un morphisme ouvert ou fermé, alors l'image réciproque par f de toute sous-variété irréductible de Y est irréductible.

b) Supposons que G agisse sur X et Y, transitivement sur Y, et que f soit G-équivariant. Alors si toutes les composa tes irréductibles de X ont la même dimension et si Y' est u sous-variété de Y dont toutes les composantes irréductibles o la même dimension, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(Y')$ ont la même dimension.

* * *

CHAPITRE I

CLASSES UNIPOTENTES

1. Résultats généraux sur les classes unipotentes.

1.1. On note $rg(G)$ le rang de G, c'est-à-dire la dimension d'un tore maximal de G. Pour tout $x \in G$, définissons $rg_x(G) = \max\{rg(C_G(g)) \mid g \in xG^0\}$. On a $rg_x(G) = rg_y(G)$ si $y \in xG^0$, et $rg_x(G) = rg(G)$ si $x \in G^0$.

On dit qu'un élément de G est *quasi-semi-simple* s'il normalise un sous-groupe de Borel de G et un tore maximal de ce sous-groupe. Si $g \in G$ normalise B, alors T et ${}^gT$ sont des tores maximaux de B, et il existe donc $b \in B$ tel que ${}^{bg}T = T$. Ainsi $bg \in gB$ est quasi-semi-simple. En particulier, si $B' \in \mathcal{B}^G$, toute composante de $N_G(B')$ contient des éléments quasi-semi-simples dans G. Comme $C_B(T) = N_B(T)$, on a $C_T(x) = C_T(y)$ si x et $y \in xG^0$ normalisent B et T.

1.2. LEMME. *Supposons que* $x \in G$ *normalise* B *et* T, *et soit* $y \in xG^0$.

Alors :

a) $\dim C_T(x) \geq rg(C_G(y))$.

b) $C_T(x)$ *est un tore maximal de* $C_G(x)$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com