HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

ANWENDUNGEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION

1. ABTEILUNG

VON

GUSTAV DOETSCH

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

UND STUTTGART

1955

GUSTAV DOETSCH

HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN
AUS DEM GEBIETE
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCHE REIHE · BAND 15

HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

ANWENDUNGEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION

1. ABTEILUNG

VON

GUSTAV DOETSCH

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

UND STUTTGART

1955

Nachdruck verboten. Alle Rechte vorbehalten,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm
Birkhäuser Verlag Basel, 1955
©

Druck von Birkhäuser AG., Basel
Printed in Switzerland

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Vorwort

Während der I. Band die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation zum Gegenstand hat, behandelt der vorliegende II. und der nachfolgende III. Band die Anwendungen, wobei es sich natürlich nicht nur um sogenannte «angewandte Mathematik», sondern um die verschiedensten Gebiete der reinen und angewandten Mathematik handelt, in welche die Laplace-Transformation als Hilfsmittel eingreift.

Nachdem die Lösung von Funktionalgleichungen vermittels Laplace-Transformation heutzutage Allgemeingut geworden ist, scheint mir dasjenige Anwendungsgebiet, dessen Kenntnis vor allem verbreitet werden sollte, die Theorie der *asymptotischen Entwicklungen* zu sein. Aus diesem Grund sind diese als I. Teil an die Spitze des II. Bandes gestellt worden. Sowohl in der Theorie als in der Praxis spielen eigentlich die asymptotischen Entwicklungen eine grössere Rolle als die konvergenten Reihen, die den meisten Mathematikern und Ingenieuren aber viel geläufiger sind, weil sie im Unterricht der Hochschulen und in den Lehrbüchern einen erheblich breiteren Raum einnehmen als die asymptotischen Entwicklungen. Um die letzteren mehr in den Vordergrund zu schieben und um die erstaunlichen Möglichkeiten hervorzuheben, die die Laplace-Transformation gerade auf diesem Gebiet eröffnet, habe ich die aus der ein- und zweiseitigen Laplace-Transformation (oder in anderem Gewand: der Mellin-Transformation) sowie aus dem komplexen Umkehrintegral fliessenden asymptotischen Methoden besonders weitgehend ausgearbeitet und durch viele Beispiele illustriert. Aus den wenigen Bausteinen zu dieser Theorie, die in meiner Monographie «Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation» vom Jahre 1937 zu finden sind, ist so ein recht umfangreiches Gebäude geworden, dessen hauptsächlichste Teile ich in Vorlesungen in Madrid (März/April 1952) und Rom (März 1953) zum ersten Mal im Zusammenhang vorgetragen habe.

Damit der Leser die Fähigkeiten der verschiedenen Methoden selbst beurteilen kann, wurde oft dieselbe spezielle Funktion nach zwei oder sogar drei Methoden behandelt. Insbesondere die auf dem komplexen Umkehrintegral beruhenden Methoden seien der besonderen Beachtung der theoretischen Physiker und Ingenieure empfohlen, weil sie bei der Behandlung von komplizierteren Randwertproblemen vermittels Laplace-Transformation oft die einzige Möglichkeit darstellen, an Hand der gefundenen Laplace-Transformierten der Lösung Aussagen über die Lösung selbst zu machen.

An die asymptotischen Entwicklungen schliessen sich sachgemäss als II. Teil die Korrespondenzen zwischen *konvergenten Entwicklungen* an. Für gewisse allgemeine Reihenklassen enthält schon der I. Band einiges Material. Diesem wird nun im II. Band als wohl schönstes Beispiel dieses Typus die Korrespondenz zwischen Fakultätenreihen und Reihen nach Potenzen von $1-\exp(-t)$ hinzugefügt. Die Fakultätenreihen bilden nicht nur ein besonders schmiegsames Hilfsmittel zur Lösung von Differenzengleichungen, sondern sie gestatten auch eine für numerische Rechnungen und asymptotische Abschätzungen vorzüglich geeignete Darstellung einer grossen Klasse von Laplace-Transformierten und sollten darum mehr als bisher beachtet werden. – Dieser allgemeinen Reihenklasse folgen zahlreiche spezielle Reihenentwicklungen von Funktionen, die vermittels Laplace-Transformation wohl auf die durchsichtigste Art gewonnen werden können.

Der III. Teil behandelt *die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen* mit konstanten und variablen Koeffizienten und Systeme von solchen. Die letzteren sind, zwecks übersichtlicherer Darstellung und Wünschen aus Ingenieurkreisen folgend, in Matrizensprache dargestellt. Die Behandlung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels Laplace-Transformation hat in den letzten Jahren in der Technik eine überaus grosse Verbreitung gefunden. Deshalb habe ich zwei Gebiete der Ingenieurpraxis, die dabei heute im Vordergrund stehen, nämlich die Regelungstechnik und die Theorie der Kettenleiter und Wellenfilter, mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. Hier liegen auch für den Mathematiker noch wichtige und dankbare Aufgaben vor. – Als Eingangs-(Störungs-)funktion ist auch die für den theoretischen Physiker und Ingenieur unentbehrliche Dirac- oder Impulsfunktion berücksichtigt. Diese hätte sich unter Verwendung der Schwartzschen Distributionstheorie in einer für den Mathematiker befriedigenderen Weise behandeln lassen, was aber eine vollständig neue Begründung der Laplace-Transformation im Bereich der Distributionen und damit umfangreiche, den Rahmen des Buches sprengende Erörterungen notwendig gemacht hätte. Daher wurde die Distributionstheorie nur kurz gestreift, während eine ausführliche Entwicklung der Laplace-Transformation auf dem Boden dieser Theorie einer späteren gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben muss.

Der III. Band, der bereits im Druck ist und in Kürze erscheinen wird, behandelt die partiellen Differentialgleichungen, die Differenzengleichungen, die Integralgleichungen und Integralrelationen sowie die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus. Eine weitere Anwendung der Laplace-Transformation, nämlich in der Theorie der Halbgruppen, die eine Erweiterung auf vektorwertige Funktionen erfordert hätte, konnte hier unberücksichtigt bleiben, weil sie in dem Buch von Hille: «Functional Analysis and Semi-Groups» ausführlich dargestellt ist. – Der III. Band wird auch das Verzeichnis derjenigen Literatur bringen, die im I. Band noch nicht aufgeführt ist und zu dem Material des II. und III. Bandes gehört.

Das Manuskript des II. und III. Bandes wurde im Sommer 1953 abgeschlossen, jedoch konnten an einigen Stellen auch noch inzwischen erschienene Ergebnisse berücksichtigt werden.

Dem Verlag Birkhäuser AG. bin ich für die sorgfältige Drucklegung und die vorzügliche Ausstattung des Werkes zu besonderem Dank verpflichtet.

Freiburg i. B.,
Riedbergstrasse 8,
im Juli 1955

Gustav Doetsch

Bezeichnungen und Verweise

Die im I. Band, S. 13, 14 angeführten Bezeichnungen werden auch im II. Band benutzt.

Verweise auf Stellen des vorliegenden II. Bandes geschehen nach der im I. Band, S. 15 angegebenen Methode und ohne Erwähnung der Bandzahl, also:

3.4 bedeutet: 3. Kap., § 4 des II. Bandes,

Satz 3 [6.2] bedeutet: Satz 3 in 6.2 des II. Bandes.

Dagegen wird auf den I. Band durch eine römische I verwiesen, also:

I, S. 57 bedeutet: I. Band, S. 57,

Satz 2 [I 6.3] bedeutet: Satz 2 in I. Band, 6.3,

Anhang I, Nr. 3 bedeutet: Anhang des I. Bandes, Nr. 3.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG

I. TEIL

Asymptotische Entwicklungen

II. TEIL

Konvergente Entwicklungen

III. TEIL

Gewöhnliche Differentialgleichungen

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

Anhang

Einleitung

I. KAPITEL

Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen durch die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung

In diesem Einleitungskapitel werden die fundamentalen Abbildungsgesetze der $\mathfrak{L}$-Transformation, die in den Anwendungen fortgesetzt gebraucht werden, in übersichtlicher Weise zusammengestellt, weil sie im I. Band aus systematischen Gründen an ganz verschiedenen Stellen bewiesen werden mussten und daher nicht immer leicht zu finden sind. Sie sind für den praktischen Gebrauch teilweise in eine handlichere Form als im I. Band gebracht. Damit später im Text kurz auf sie verwiesen werden kann, sind sie als «Regeln» bezeichnet und mit lateinischen Zahlen numeriert, gelegentlich auch schlagwortartig mit Namen versehen, wie sie sich in der Praxis eingebürgert haben, wie z. B. Faltungssatz, Dämpfungssatz usw.

§ 1. Lineare Substitution in der Originalfunktion und Multiplikation der Bildfunktion mit einer Exponentialfunktion

$\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$-Transformation

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}\{F\} = f(s)$ irgendwo und damit in einer Halbebene konvergiert.

Regel I. Der Originalfunktion

$$F_1(t) = \begin{cases} F(a\,t - b) & \text{für } t \geqq \dfrac{b}{a} \\ 0 & \text{für } 0 \leqq t < \dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad (a > 0,\ b \geqq 0)$$

entspricht die Bildfunktion

$$f_1(s) = \frac{1}{a}\, e^{-(b/a)s} f\left(\frac{s}{a}\right)$$

und umgekehrt.

Regel II. Der Originalfunktion

$$F_1(t) = F(a\,t + b) \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

entspricht die Bildfunktion

$$f_1(s) = \frac{1}{a}\, e^{(b/a)s} \left[f\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^b e^{-(s/a)t} F(t)\, dt \right]$$

und umgekehrt.

Mit der Definition

$$F(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

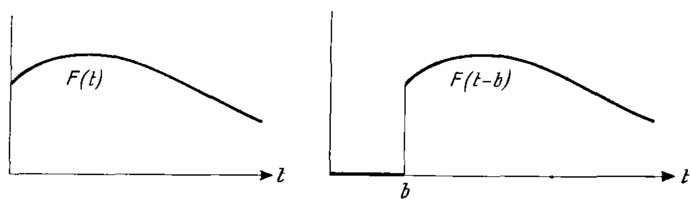
kann man Regel I und II so zusammenfassen:

$$F(a\,t + b) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\, e^{(b/a)\,s} \left[f\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^b e^{-(s/a)\,t}\, F(t)\, dt \right] \qquad (a > 0)\,.$$

Folgende Spezialfälle kommen besonders häufig vor:

Regel III (*Verschiebungssatz*). Mit $F(t) = 0$ für $t < 0$ gilt:

$$F(t - b) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-b s} f(s) \qquad (b \geqq 0)\,.$$

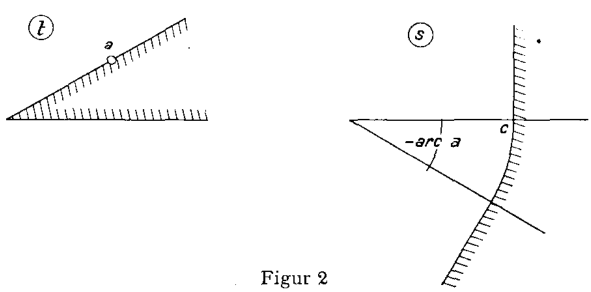


Figur 1

Dieser Satz lässt sich so verallgemeinern:

Regel III'. Wenn $F(t) = 0$ für $0 \leqq t < b'$ ist, so gilt:

$$e^{-b s} f(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \begin{cases} F(t - b) & \text{für } t \geqq b + b' \\ 0 & \text{für } 0 \leqq t < b + b' \end{cases} \qquad (b \geqq -b',\ b' \geqq 0)\,.$$



Figur 2

Regel IV (*Ähnlichkeitssatz*).

$$F(a\,t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\, f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$$

oder

$$f(c\,s) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{c}\, F\left(\frac{t}{c}\right) \qquad (c > 0)\,.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com