

HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

ANWENDUNGEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION

I. ABTEILUNG

VON

GUSTAV DOETSCH

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.



BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

UND STUTTGART

1955

GUSTAV DOETSCH



HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN
AUS DEM GEBIETE
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCHE REIHE · BAND 15

HANDBUCH DER LAPLACE-TRANSFORMATION

BAND II

ANWENDUNGEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION

I. ABTEILUNG

VON

GUSTAV DOETSCH

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.



BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

UND STUTTGART

1955

Nachdruck verboten. Alle Rechte vorbehalten,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm
Birkhäuser Verlag Basel, 1955



Druck von Birkhäuser AG., Basel
Printed in Switzerland

Vorwort

Während der I. Band die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation zum Gegenstand hat, behandelt der vorliegende II. und der nachfolgende III. Band die Anwendungen, wobei es sich natürlich nicht nur um sogenannte «angewandte Mathematik», sondern um die verschiedensten Gebiete der reinen und angewandten Mathematik handelt, in welche die Laplace-Transformation als Hilfsmittel eingreift.

Nachdem die Lösung von Funktionalgleichungen mittels Laplace-Transformation heutzutage Allgemeingut geworden ist, scheint mir dasjenige Anwendungsgebiet, dessen Kenntnis vor allem verbreitet werden sollte, die Theorie der *asymptotischen Entwicklungen* zu sein. Aus diesem Grund sind diese als I. Teil an die Spitze des II. Bandes gestellt worden. Sowohl in der Theorie als in der Praxis spielen eigentlich die asymptotischen Entwicklungen eine grössere Rolle als die konvergenten Reihen, die den meisten Mathematikern und Ingenieuren aber viel geläufiger sind, weil sie im Unterricht der Hochschulen und in den Lehrbüchern einen erheblich breiteren Raum einnehmen als die asymptotischen Entwicklungen. Um die letzteren mehr in den Vordergrund zu schieben und um die erstaunlichen Möglichkeiten hervorzuheben, die die Laplace-Transformation gerade auf diesem Gebiet eröffnet, habe ich die aus der ein- und zweiseitigen Laplace-Transformation (oder in anderem Gewand: der Mellin-Transformation) sowie aus dem komplexen Umkehrintegral fliessenden asymptotischen Methoden besonders weitgehend ausgearbeitet und durch viele Beispiele illustriert. Aus den wenigen Bausteinen zu dieser Theorie, die in meiner Monographie «Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation» vom Jahre 1937 zu finden sind, ist so ein recht umfangreiches Gebäude geworden, dessen hauptsächlichste Teile ich in Vorlesungen in Madrid (März/April 1952) und Rom (März 1953) zum ersten Mal im Zusammenhang vorgetragen habe.

Damit der Leser die Fähigkeiten der verschiedenen Methoden selbst beurteilen kann, wurde oft dieselbe spezielle Funktion nach zwei oder sogar drei Methoden behandelt. Insbesondere die auf dem komplexen Umkehrintegral beruhenden Methoden seien der besonderen Beachtung der theoretischen Physiker und Ingenieure empfohlen, weil sie bei der Behandlung von komplizierteren Randwertproblemen mittels Laplace-Transformation oft die einzige Möglichkeit darstellen, an Hand der gefundenen Laplace-Transformierten der Lösung Aussagen über die Lösung selbst zu machen.

An die asymptotischen Entwicklungen schliessen sich sachgemäss als II. Teil die Korrespondenzen zwischen *konvergenten Entwicklungen* an. Für gewisse allgemeine Reihenklassen enthält schon der I. Band einiges Material. Diesem wird nun im II. Band als wohl schönstes Beispiel dieses Typus die Korrespondenz zwischen Fakultätenreihen und Reihen nach Potenzen von $1 - \exp(-t)$ hinzugefügt. Die Fakultätenreihen bilden nicht nur ein besonders schmiegsames Hilfsmittel zur Lösung von Differenzgleichungen, sondern sie gestatten auch eine für numerische Rechnungen und asymptotische Abschätzungen vorzüglich geeignete Darstellung einer grossen Klasse von Laplace-Transformierten und sollten darum mehr als bisher beachtet werden. – Dieser allgemeinen Reihenklasse folgen

zahlreiche spezielle Reihenentwicklungen von Funktionen, die vermittels Laplace-Transformation wohl auf die durchsichtigste Art gewonnen werden können.

Der III. Teil behandelt *die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen* mit konstanten und variablen Koeffizienten und Systeme von solchen. Die letzteren sind, zwecks übersichtlicherer Darstellung und Wünschen aus Ingenieurkreisen folgend, in Matrizen-sprache dargestellt. Die Behandlung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels Laplace-Transformation hat in den letzten Jahren in der Technik eine überaus grosse Verbreitung gefunden. Deshalb habe ich zwei Gebiete der Ingenieurpraxis, die dabei heute im Vordergrund stehen, nämlich die Regelungstechnik und die Theorie der Kettenleiter und Wellenfilter, mit besonderer Ausführlichkeit behandelt. Hier liegen auch für den Mathematiker noch wichtige und dankbare Aufgaben vor. – Als Eingangs-(Störungs-)funktion ist auch die für den theoretischen Physiker und Ingenieur unentbehrliche Dirac- oder Impulsfunktion berücksichtigt. Diese hätte sich unter Verwendung der Schwartzschen Distributionstheorie in einer für den Mathematiker befriedigenderen Weise behandeln lassen, was aber eine vollständig neue Begründung der Laplace-Transformation im Bereich der Distributionen und damit umfangreiche, den Rahmen des Buches sprengende Erörterungen notwendig gemacht hätte. Daher wurde die Distributionstheorie nur kurz gestreift, während eine ausführliche Entwicklung der Laplace-Transformation auf dem Boden dieser Theorie einer späteren gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben muss.

Der III. Band, der bereits im Druck ist und in Kürze erscheinen wird, behandelt die partiellen Differentialgleichungen, die Differenzgleichungen, die Integralgleichungen und Integralrelationen sowie die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus. Eine weitere Anwendung der Laplace-Transformation, nämlich in der Theorie der Halbgruppen, die eine Erweiterung auf vektorwertige Funktionen erfordert hätte, konnte hier unberücksichtigt bleiben, weil sie in dem Buch von HILLE: «Functional Analysis and Semi-Groups» ausführlich dargestellt ist. – Der III. Band wird auch das Verzeichnis derjenigen Literatur bringen, die im I. Band noch nicht aufgeführt ist und zu dem Material des II. und III. Bandes gehört.

Das Manuskript des II. und III. Bandes wurde im Sommer 1953 abgeschlossen, jedoch konnten an einigen Stellen auch noch inzwischen erschienene Ergebnisse berücksichtigt werden.

Dem Verlag Birkhäuser AG. bin ich für die sorgfältige Drucklegung und die vorzügliche Ausstattung des Werkes zu besonderem Dank verpflichtet.

Freiburg i. B.,
Riedbergstrasse 8,
im Juli 1955

GUSTAV DOETSCH

Bezeichnungen und Verweise

Die im I. Band, S. 13, 14 angeführten Bezeichnungen werden auch im II. Band benutzt.

Verweise auf Stellen des vorliegenden II. Bandes geschehen nach der im I. Band, S. 15 angegebenen Methode und ohne Erwähnung der Bandzahl, also:

3.4 bedeutet: 3. Kap., § 4 des II. Bandes,

Satz 3 [6.2] bedeutet: Satz 3 in 6.2 des II. Bandes.

Dagegen wird auf den I. Band durch eine römische I verwiesen, also:

I, S. 57 bedeutet: I. Band, S. 57,

Satz 2 [I 6.3] bedeutet: Satz 2 in I. Band, 6.3,

Anhang I, Nr. 3 bedeutet: Anhang des I. Bandes, Nr. 3.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG

1. Kapitel. Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen durch die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung	15
§ 1. Lineare Substitution in der Originalfunktion und Multiplikation der Bildfunktion mit einer Exponentialfunktion	15
§ 2. Lineare Substitution in der Bildfunktion und Multiplikation der Originalfunktion mit einer Exponentialfunktion	17
§ 3. Integration der Originalfunktion.	18
§ 4. Integration der Bildfunktion	20
§ 5. Differentiation der Originalfunktion	21
§ 6. Differentiation der Bildfunktion	23
§ 7. Reelle Faltung der Originalfunktionen und Produkt der Bildfunktionen	23
§ 8. Komplexe Faltung der Bildfunktionen und Produkt der Originalfunktionen	25

I. TEIL

Asymptotische Entwicklungen

2. Kapitel. Allgemeine Betrachtungen über Asymptotik	29
§ 1. Asymptotische Darstellung von Funktionen	29
§ 2. Asymptotische Entwicklung von Funktionen	31
Allgemeine Eigenschaften einer asymptotischen Entwicklung	32
Spezialfall: Asymptotische Potenzentwicklungen	35
§ 3. Ein allgemeines Prinzip zur Aufstellung von asymptotischen Methoden und die verschiedenen Arten von Asymptotik	39
§ 4. Kritische Bewertung der drei asymptotischen Methoden	41
§ 5. Allgemeines über Abelsche Asymptotik	42
3. Kapitel. Abelsche Asymptotik der einseitigen Laplace-Transformation: Verhalten von $f(s)$ im Unendlichen	45
§ 1. Asymptotische Entwicklung der \mathfrak{L} -Transformierten für $s \rightarrow \infty$	45
§ 2. Beispiele	50
1. Das Gaußsche Fehlerintegral	50
2. Das Exponentialintegral	51
3. Die Stirlingsche Reihe für $\log \Gamma(s)$	52
4. Die Besselschen Funktionen für nichtreelle Werte der Variablen	56
5. Die unvollständige Gammafunktion. Asymptotische Halbierung des Gammaintegrals und der Exponentialreihe	58
6. Entwicklungen mit logarithmischem Faktor.	61

§ 3. Asymptotische Entwicklung eines \mathfrak{L} -Integrals mit komplexem Weg. Deformation eines ursprünglich reellen Integrationsweges zwecks Erweiterung des Bereichs der asymptotischen Entwicklung	64
§ 4. Beispiele	76
1. Die Besselschen Funktionen für reelle Werte der Variablen	76
2. Das Integral $\varphi(z) = \int_0^a e^{izx^q} g(x) dx$ für reelle z	78
§ 5. Asymptotische Entwicklung eines Integrals der Form $\int_a^b e^{sh(x)} g(x) dx$ (Laplace- sches Problem der Funktionen grosser Zahlen). Die Methode der Sattelpunkte	83
§ 6. Beispiele	88
1. Die Stirlingsche Reihe für $\Gamma(s)$	88
2. Die Fresnelschen Integrale	90
§ 7. Asymptotische Entwicklungen nach anderen Funktionen als Potenzen	92
§ 8. Asymptotische Entwicklung von komplexen Faltungsintegralen	95
4. Kapitel. Abelsche Asymptotik der einseitigen Laplace-Transformation: Verhalten von $f(s)$ an Stellen im Endlichen	97
§ 1. Grössenordnung des Unendlichwerdens von $f(s)$ bei Annäherung an eine singuläre Stelle in einem Winkelraum	97
§ 2. Erschliessung der algebraischen und logarithmischen Singularitäten von $f(s)$	98
5. Kapitel. Abelsche Asymptotik der zweiseitigen Laplace-Transformation und der Mellin-Transformation	101
§ 1. Erschliessung der Singularitäten der \mathfrak{L}_{II} -Transformierten	101
§ 2. Erschliessung der Singularitäten der \mathfrak{M} -Transformierten	105
§ 3. Beispiele (Gamma- und Zetafunktion)	107
6. Kapitel. Abelsche Asymptotik der durch das komplexe Umkehrintegral dargestellten \mathfrak{B}-Transformation für Funktionen mit Singularitäten eindeutigen Charakters	109
§ 1. Allgemeines über die Asymptotik des komplexen Integrals	109
§ 2. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ nach Exponentialfunktionen	110
§ 3. Asymptotische Entwicklung von $\Phi(z)$ nach Potenzen	115
§ 4. Beispiele	118
1. Grenzwert der Thetafunktion $\theta_3(0, z/\pi)$ bei Annäherung an $z = i$	118
2. Verhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^x z}$ für $z \rightarrow 0$	122
3. Verhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} T(n) e^{-n^x z}$ für $z \rightarrow 0$	122
4. Asymptotisches Verhalten des Logarithmus von ganzen transzendenten Funktionen endlichen Geschlechts für $z \rightarrow \infty$	123
§ 5. Asymptotische Entwicklung des Integrals $\Phi(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(\zeta) \Phi_2(z/\zeta) d\zeta/\zeta$ auf Grund der Entwicklungen von Φ_1 und Φ_2 . Asymptotik der Stieltjes- Transformation	131
§ 6. Bestimmung der Singularitäten von $\mathfrak{M}\{\Phi_1 \cdot \Phi_2\} = 1/(2\pi i) \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \varphi_1(\sigma) \varphi_2(s-\sigma) d\sigma$ auf Grund derjenigen von $\mathfrak{M}\{\Phi_1\} = \varphi_1(s)$ und $\mathfrak{M}\{\Phi_2\} = \varphi_2(s)$	136

7. Kapitel. Abelsche Asymptotik der durch das komplexe Umkehrintegral dargestellten \mathfrak{B}-Transformation für Funktionen mit algebraischen und logarithmischen Singularitäten	141
§ 1. Allgemeine Betrachtungen zu dem Fall nichteindeutiger Singularitäten	141
§ 2. Eine endliche asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$	142
§ 3. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$	144
§ 4. Ersatz des geradlinigen Integrationsweges in \mathfrak{B} durch einen winkelförmigen und Asymptotik der so entstehenden \mathfrak{B} -Transformation für $t \rightarrow \infty$	156
§ 5. Beispiele	165
1. Das Exponentialintegral	166
2. Der Strom im induktionsfreien Kabel	166
3. Die Besselschen Funktionen für reelle Werte der Variablen	168
4. Die Fourier-Bessel-Koeffizienten	170
5. Die Wellenfunktion für das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffatoms	172
8. Kapitel. Abelsche Asymptotik der \mathfrak{B}-Transformation für $t \rightarrow 0$	174
§ 1. Asymptotische Entwicklung von $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ auf Grund des Verhaltens von $f(s)$ für $s \rightarrow \infty$ in einer Halbebene	174
§ 2. Die Heavisideschen Entwicklungstheoreme der Operatorenrechnung im Lichte der Abelschen Asymptotik des komplexen Integrals für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$	177
9. Kapitel. Taubersche Asymptotik der Laplace-Transformation	181
§ 1. Taubersche Asymptotik reeller Art. Beispiel: Stabilität bei Erneuerungsvorgängen	181
§ 2. Taubersche Asymptotik funktionentheoretischer Art. Beispiel: Der Primzahlsatz	186
10. Kapitel. Asymptotische Aussagen verschiedener Art über die Original- und die Bildfunktion der Laplace-Transformation	193
§ 1. Asymptotische Aussagen über die Bildfunktion	193
§ 2. Asymptotische Aussagen über $F(t)$ auf Grund der Existenz von $\mathfrak{L}\{F\}$	195
§ 3. Asymptotische Aussagen bei der zweiseitigen Laplace-Transformation	195
§ 4. Das asymptotische Verhalten einer ganzen Funktion von Exponentialtypus	196
§ 5. Das asymptotische Verhalten der Größen $M(x)$ und $m(x)$ für $f(s)$	197

II. TEIL

Konvergente Entwicklungen

Einleitung	201
11. Kapitel. Fakultätenreihen	203
§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Fakultätenreihen	203
§ 2. Funktionentheoretische Hilfssätze	205
§ 3. Darstellung einer Fakultätenreihe als Laplace-Transformierte	211
§ 4. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine Fakultätenreihe	219
§ 5. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine asymptotische Fakultätenreihe	222

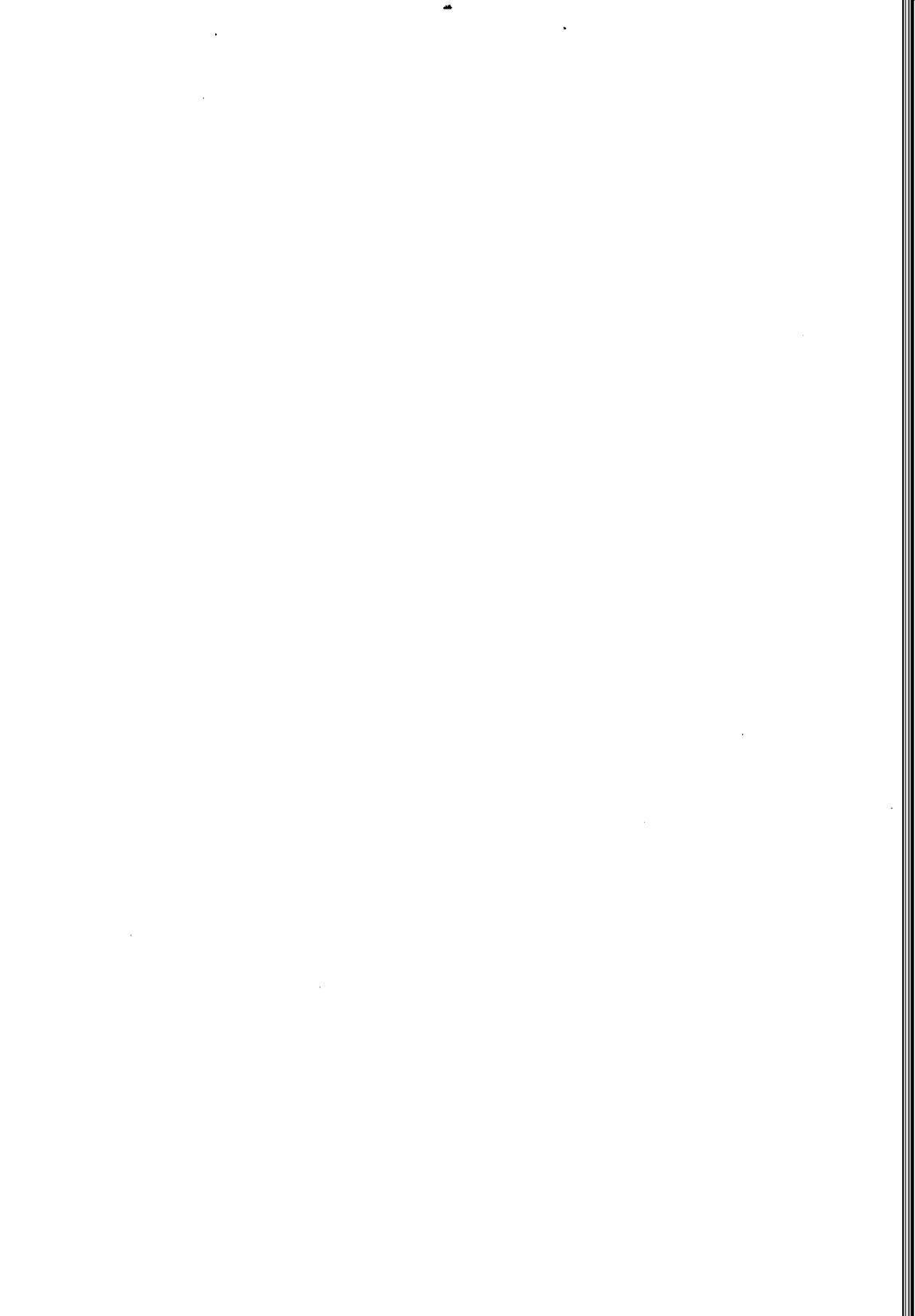
§ 6. Darstellung einer Laplace-Transformierten durch eine verallgemeinerte Fakultätenreihe	226
§ 7. Das Konvergenzproblem der verallgemeinerten Fakultätenreihe	229
§ 8. Fakultätenreihen als konvergente Darstellungen asymptotischer Potenzreihen	232
12. Kapitel. Spezielle Reihen	236
§ 1. Die lineare Transformationsformel der Thetafunktion	236
§ 2. Entwicklungen nach Besselschen Funktionen, die mit der linearen Transformationsformel für die Funktion $\vartheta_3(v, t)$ äquivalent sind	238
§ 3. Entwicklung der Laguerreschen Polynome und der konfluenten hypergeometrischen Funktion nach Besselschen Funktionen	241
§ 4. Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen	243
§ 5. Entwicklungen nach Hermiteschen Polynomen	247
§ 6. Entwicklungen nach konfluenten hypergeometrischen Funktionen	248
§ 7. Eine Korrespondenz zwischen Fourier-Reihen und Partialbruchreihen	250

III. TEIL

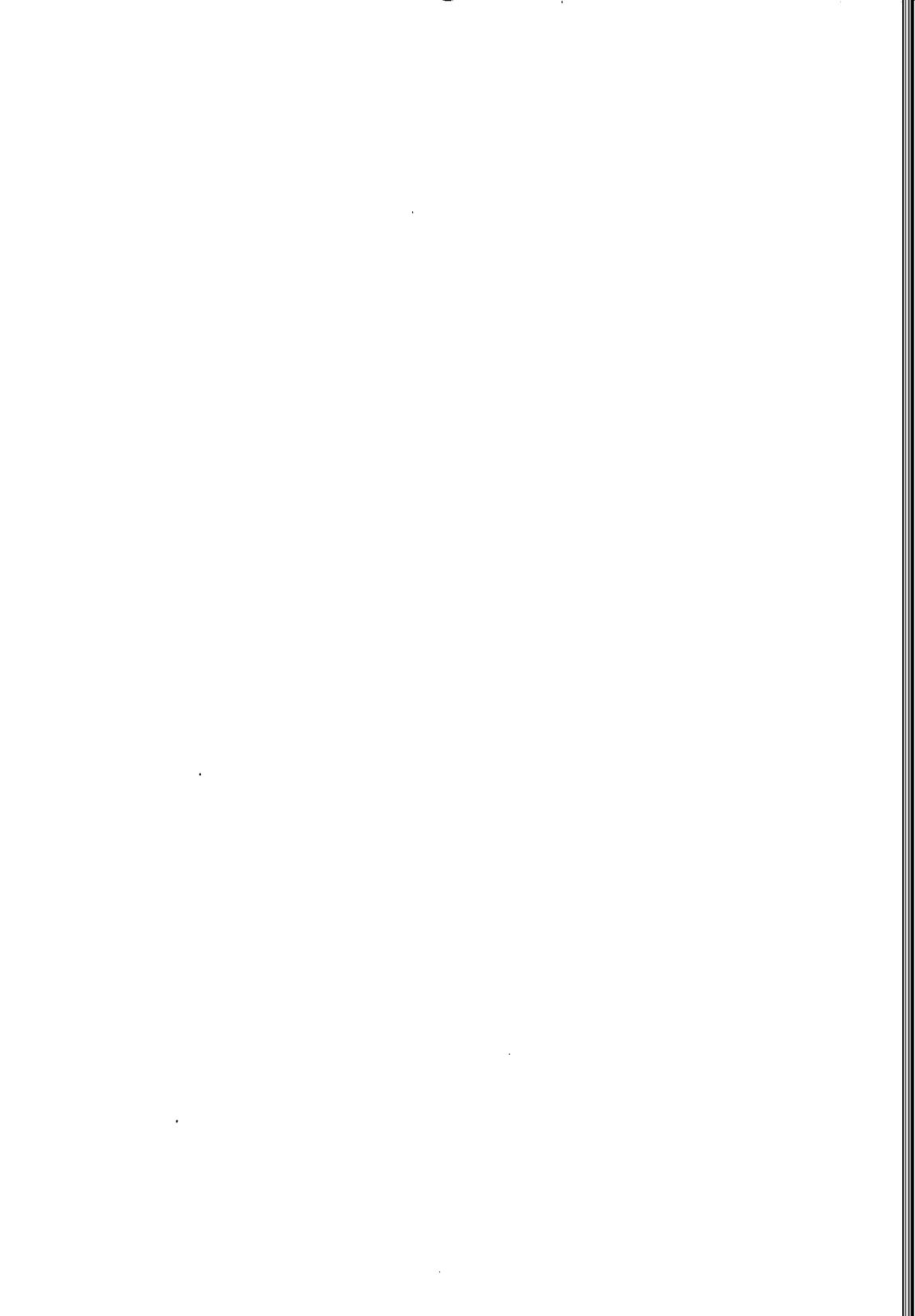
Gewöhnliche Differentialgleichungen

13. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im einseitig unendlichen Intervall unter Anfangsbedingungen	255
§ 1. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und beliebiger Störungsfunktion	255
1. Die inhomogene Differentialgleichung unter verschwindenden Anfangsbedingungen	258
2. Die homogene Differentialgleichung unter beliebigen Anfangsbedingungen	266
§ 2. Beispiele, insbesondere der elektrische Schwingungskreis. Übergangsfunktion und Frequenzgang	269
§ 3. Rückkoppelungssysteme und Regelungstechnik	278
Regelungstechnik.	282
Stabilität der Regelung.	286
Regelungsvorgänge mit Totzeit	289
Exakte mathematische Diskussion der Stabilität	294
§ 4. Erregung durch die Impulsfunktion	298
§ 5. Ein System von Differentialgleichungen (Normalfall)	310
1. Das inhomogene System unter verschwindenden Anfangsbedingungen	311
2. Das homogene System unter beliebigen Anfangsbedingungen.	314
§ 6. Ein System von Differentialgleichungen, bei dem nicht der Normalfall vorliegt. Nichterfüllbare Anfangsbedingungen	318
§ 7. Kettenleiter und Wellenfilter. Synthese eines Filters mit vorgegebenen Sperr- und Durchlassbereichen	328
14. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen.	345
§ 1. Anwendung der \mathcal{Q}_{II} -Transformation und Aufstellung desjenigen Lösungsausdrucks, der einem bestimmten Holomorphiestreifen der Bildfunktion zugeordnet ist	345
§ 2. Die Greensche Funktion des Problems	348

§ 3. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $F(-\infty)$ und $F(+\infty)$	350
§ 4. Lösung unter Voraussetzung der Existenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt$	356
§ 5. Weitere Lösungen	360
15. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten im Originalraum der Laplace-Transformation	363
§ 1. Anwendung der \mathcal{L} -Transformation auf Differentialgleichungen mit Polynom-Koeffizienten	363
§ 2. Beispiel: Die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen	366
§ 3. Beispiel: Die Differentialgleichung der Laguerreschen Funktionen. Das Spektrum des Wasserstoffatoms in der Wellenmechanik	368
1. Das diskrete Spektrum	371
2. Das kontinuierliche Spektrum	375
§ 4. Ansatz der Lösung als Integral mit komplexem Weg. Asymptotische Entwicklungen der Lösung (Thomésche Normalreihen)	377
16. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten im Bildraum der Laplace-Transformation	386
§ 1. Lösung der Differentialgleichung mit im Unendlichen holomorphen Koeffizienten durch $\mathcal{L}^{(\varphi)}$ -Integrale	336
§ 2. Beispiel: Die Mathieusche Differentialgleichung	396
§ 3. Lösung von Differentialgleichungen mit vollmonotonen Koeffizienten durch \mathcal{L} -Integrale mit monotoner Originalfunktion	399
Anhang	
Der Satz von Lagrange-Bürmann	405
Literarische und historische Nachweise	409
Sachregister	429
Literaturverzeichnis	siehe I. und III. Band
Berichtigungen zu Band I	435



Einleitung



I. KAPITEL

Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen durch die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung

In diesem Einleitungskapitel werden die fundamentalen Abbildungsgesetze der \mathfrak{L} -Transformation, die in den Anwendungen fortgesetzt gebraucht werden, in übersichtlicher Weise zusammengestellt, weil sie im I. Band aus systematischen Gründen an ganz verschiedenen Stellen bewiesen werden mussten und daher nicht immer leicht zu finden sind. Sie sind für den praktischen Gebrauch teilweise in eine handlichere Form als im I. Band gebracht. Damit später im Text kurz auf sie verwiesen werden kann, sind sie als «Regeln» bezeichnet und mit lateinischen Zahlen numeriert, gelegentlich auch schlagwortartig mit Namen versehen, wie sie sich in der Praxis eingebürgert haben, wie z. B. Faltungssatz, Dämpfungssatz usw.

§ 1. Lineare Substitution in der Originalfunktion und Multiplikation der Bildfunktion mit einer Exponentialfunktion

 \mathfrak{L}_I -Transformation

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass $\mathfrak{L}_I\{F\} = f(s)$ irgendwo und damit in einer Halbebene konvergiert.

Regel I. Der Originalfunktion

$$F_1(t) = \begin{cases} F(a t - b) & \text{für } t \geq \frac{b}{a} \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < \frac{b}{a} \end{cases} \quad (a > 0, b \geq 0)$$

entspricht die Bildfunktion

$$f_1(s) = \frac{1}{a} e^{-(b/a)s} f\left(\frac{s}{a}\right)$$

und umgekehrt.

Regel II. Der Originalfunktion

$$F_1(t) = F(a t + b) \quad (a > 0, b > 0)$$

entspricht die Bildfunktion

$$f_1(s) = \frac{1}{a} e^{(b/a)s} \left[f\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^b e^{-(s/a)t} F(t) dt \right]$$

und umgekehrt.

Mit der Definition

$$F(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

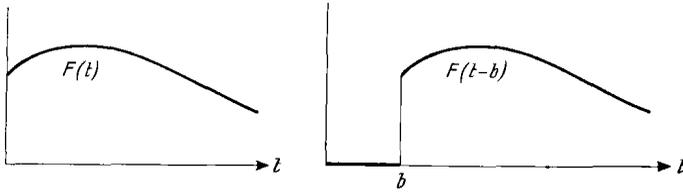
kann man Regel I und II so zusammenfassen:

$$F(at + b) \circ \bullet \frac{1}{a} e^{(b/a)s} \left[f\left(\frac{s}{a}\right) - \int_0^b e^{-(s/a)t} F(t) dt \right] \quad (a > 0).$$

Folgende Spezialfälle kommen besonders häufig vor:

Regel III (*Verschiebungssatz*). Mit $F(t) = 0$ für $t < 0$ gilt:

$$F(t - b) \circ \bullet e^{-bs} f(s) \quad (b \geq 0).$$

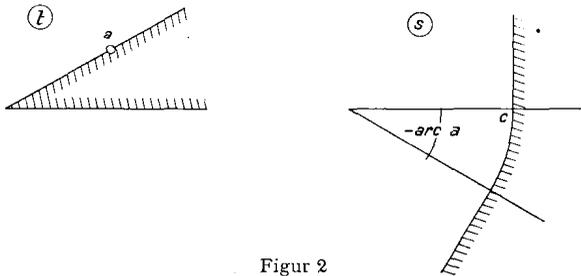


Figur 1

Dieser Satz lässt sich so verallgemeinern:

Regel III'. Wenn $F(t) = 0$ für $0 \leq t < b'$ ist, so gilt:

$$e^{-bs} f(s) \circ \bullet \begin{cases} F(t - b) & \text{für } t \geq b + b' \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < b + b' \end{cases} \quad (b \geq -b', b' \geq 0).$$



Figur 2

Regel IV (*Ähnlichkeitssatz*).

$$F(at) \circ \bullet \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$$

oder

$$f(cs) \circ \bullet \frac{1}{c} F\left(\frac{t}{c}\right) \quad (c > 0).$$