Studienbücherei

Quantenphysik

G. Röpke

Studienbücherei

Quantenphysik

G. Röpke

Studienbücherei

Quantenphysik

G. Röpke

unter Mitarbeit von
H.-D. Pöltz

2. Auflage

Mit 81 Abbildungen

VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1983

Verlagslektor: Joachim Heine
Verlagshersteller: Doris Ahrends
Umschlaggestaltung: Rudolf Wendt
© 1980 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR - 1080 Berlin, Postfach 1216
Lizenz-Nr. 206 · 435/79/83
Printed in the German Democratic Republic
Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", 7400 Altenburg
Fotomechanischer Nachdruck: Mühlhäuser Druckhaus
LSV 1114
Bestellnummer: 570 766 7
DDR 19,80 M

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Vorwort

Im Rahmen der Quantenmechanik wird ein Begriffssystem entwickelt, welches uns gestattet, die Vorgänge der Mikrophysik widerspruchsfrei zu beschreiben. Die Beherrschung dieses neuen Begriffssystems ist Voraussetzung für das Verständnis der Effekte der Mikrophysik, die das Verhalten und die Eigenschaften auch makroskopischer Körper bestimmen und in zunehmendem Maße Anwendung in der modernen Technik gewinnen. Als Beispiel sei hier die Festkörperphysik genannt.

Im vorliegenden Band wird versucht, die Quantenmechanik knapp darzustellen, aber gleichzeitig eine möglichst korrekte Interpretation zu geben und ein Begriffssystem einzuführen, welches den Erfordernissen der Quantenphysik gerecht wird.

Ebenso, wie eine rationelle Darstellung der Elektrodynamik erst mit Hilfe der Vektoranalysis möglich ist, bedarf es zur rationellen Darstellung der Quantenmechanik auch eines angemessenen mathematischen Formalismus. Einige mathematische Grundlagen werden der Quantenmechanik vorangestellt.

Die Kapitel 1.—3., 5., 6., 8., 9. geben einschließlich der angeführten Aufgaben eine Darstellung wesentlicher Züge der Quantenmechanik. Insbesondere wurde Wert auf eine Einbeziehung der Streutheorie gelegt (Kapitel 6.), da in dieser Richtung mit weiteren wichtigen Entwicklungen im Rahmen der Quantenmechanik zu rechnen ist. Die Ergänzungen, Kapitel 4.*, 7.*, 10.*, sollen das Blickfeld erweitern, indem über einige weitere Probleme und Ergebnisse informiert wird, die in der Regel jedoch nicht für die Erarbeitung des oben angeführten Stoffes erforderlich sind.

Auf dem Gebiet der Quantenmechanik existiert bereits eine umfangreiche Lehrbuchliteratur. Hervorzuheben sind hier neue, moderne Zugänge zu diesem Wissensgebiet, die etwa in den Lehrbüchern von R. P. Feynman, G. Graewert, E. Fick aufgezeigt werden. Die vorliegende Darstellung der Quantenmechanik schließt sich diesen Lehrbüchern an.

Für zahlreiche Diskussionen bei der Vorbereitung des Manuskriptes danke ich recht herzlich Herrn Prof. Dr. W. Kuhn sowie Herrn Dr. H. Stöckel, der mit einer gründlichen Durchsicht des Manuskriptes und zahlreichen Hinweisen und Änderungsvorschlägen wesentlich zu der Fertigstellung des Manuskripts beigetragen hat. Weiterhin danke ich meiner Frau, Renate Röpke, für die Unterstützung bei der Erarbeitung des Manuskriptes.

G. Röpke

Inhaltsverzeichnis

	Zusammenstellung wichtiger Beziehungen und Symbole	10
	Mathematische Grundlagen	13
	Teil I. Grundlagen der Quantenmechanik	23
	Einleitung	24
1.	**Beschreibung eines quantenmechanischen Systems, Zustandsbegriff**	25
1.1.	Der Ursprung der Quantentheorie	25
1.2.	Der Dualismus Welle—Korpuskel	30
1.3.	Übergangswahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsamplitude	37
1.4.	Beziehungen für Wahrscheinlichkeitsamplituden	40
1.5.	Orts- und Impulsdarstellung. Die Zustandsfunktion	45
1.6.	Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 1.	50
2.	**Physikalische Meßgrößen und ihre Erwartungswerte**	53
2.1.	Meßprozeß und Operatorbegriff	53
2.2.	Darstellung von Operatoren. Die Ortsdarstellung	59
2.3.	Vertauschungsrelationen, Unschärferelation und vollständiger Satz von Operatoren	65
2.4.	Der lineare harmonische Oszillator	70
2.5.	Zusammenfassung zu Kapitel 2.	79
2.6.	Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 2.	79
3.	**Zeitliche Entwicklung eines Systems in der Quantenmechanik**	82
3.1.	Die Schrödinger-Gleichung	82
3.2.	Stationäre Zustände	87
3.3.	Zeitabhängige Prozesse	102
3.4.	Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 3.	106
4.*	**Ergänzungen zu Teil I. Grundlagen der Quantenmechanik**	109
4.1.*	Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik, WKB-Methode	109
4.2.*	Einige Eigenschaften linearer Operatoren	112
4.3.*	Die zeitliche Änderung der Zustände und Operatoren in der Quantenmechanik	114
4.4.*	Der statistische Operator	119
4.5.*	Postulate der Quantenmechanik	122

Teil II. Einteilchenprobleme 125

Einleitung 126

5. Der Drehimpuls und die Bewegung in einem Zentralkraftfeld 127

5.1. Allgemeine Behandlung des Drehimpulses in der Quantenmechanik 127
5.2. Der Bahndrehimpuls 131
5.3. Der Spin 134
5.4. Bewegung in einem Zentralkraftfeld 140
5.5. Das Wasserstoffatom 145
5.6. Dipolübergänge und Auswahlregeln 151
5.7. Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 5. 155

6. Potentialstreuung 161

6.1. Differentieller Streuquerschnitt und Streuamplitude 161
6.2. Die Bornsche Reihe 167
6.3.* Partialwellenmethode und Streuphasen 171
6.4. Zusammenfassung zu Kapitel 6. 177
6.5. Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 6. 178

7.* Ergänzungen zu Teil II. Einteilchenprobleme 181

7.1.** Die Dirac-Gleichung 181
7.2.** Streutheorie 183
7.3.* Das Ritzsche Variationsverfahren 186
7.4.* Zeitunabhängige Störungsrechnung 188
7.5.* Zeitabhängige Störungsrechnung 191
7.6. Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 7. 198

Teil III. Mehrteilchenprobleme 201

Einleitung 202

8. Identische Teilchen 203

8.1. Das Prinzip der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen 203
8.2. Basiszustände für Fermionen und Bosonen 209
8.3. Austauschwechselwirkung und Pauli-Prinzip 211
8.4. Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 8. 217

9. Der Aufbau der Atome und die chemische Bindung 219

9.1. Das Heliumatom 219
9.2. Das Hartree-Fock-Verfahren und das Periodensystem der Elemente 224
9.3. Das Wasserstoffmolekülion 227
9.4. Das Wasserstoffmolekül 231
9.5. Moleküle und Festkörper 233
9.6. Fragen und Lösungen der Aufgaben zu Kapitel 9. 238

10.* Ergänzungen zu Teil III. Mehrteilchenprobleme 240

10.1.* Streuung identischer Teilchen 240
10.2.** Besetzungszahldarstellung 242

10.3.* Die Elektronengas-Näherung 245
10.4.* Einige Quanteneffekte in Festkörpern 246
10.5.* Symmetrien und Erhaltungsgrößen 248

11. Betrachtungen zu erkenntnistheoretischen Voraussetzungen der Mikrophysik 251

11.1 Wechselwirkung und Messung 251

11.2. Gesetz und Kausalität 254

Literatur zu Kapitel 11. 258

Sachverzeichnis 259

$|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$, $|\chi\rangle$, ...: Zustandsvektoren (Abschnitte 1.2., 1.3.), speziell $|\boldsymbol{r}\rangle$: Ortszustand (Abschnitt 1.5.),

$|\boldsymbol{r}, S_z\rangle$: Zustand mit bestimmten Orts- und z-Koordinaten des Spins (Abschnitt 5.3.),

$|\boldsymbol{r}_1^{(1)} S_{z_1}^{(1)}, \boldsymbol{r}_2^{(2)} S_{z_2}^{(2)}, \ldots\rangle$: Orts-Spin-Zustand für ein System mehrerer unterscheidbarer Teilchen (8,1),

$|\boldsymbol{r}_1 S_{z_1}, \boldsymbol{r}_2 S_{z_2}, \ldots\rangle$: Orts-Spin-Zustand für ein System mehrerer identischer Teilchen (Abschnitt 8.2.).

Symmetriepostulat für zwei identische Teilchen (8,20):

$$|\boldsymbol{r}_2^{(1)} S_{z_2}^{(1)}, \boldsymbol{r}_1^{(2)} S_{z_1}^{(2)}\rangle = \pm |\boldsymbol{r}_1^{(1)} S_{z_1}^{(1)}, \boldsymbol{r}_2^{(2)} S_{z_2}^{(2)}\rangle,$$

$+$: Bosonen, ganzzahliger Spin; $-$: Fermionen, halbzahliger Spin.

$\langle\varphi \mid \psi\rangle$: Skalarprodukt, komplexwertige Wahrscheinlichkeitsamplitude (Abschnitt 1.4.)

$|\langle\varphi \mid \psi\rangle|^2$: Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Zustand $|\psi\rangle$ in den Zustand $|\varphi\rangle$ (1,18),

Normierungsbedingung für Zustandsvektoren (1,31): $\langle\psi \mid \psi\rangle = 1$.

Zerlegungssatz für Zustandsvektoren (1,36):

$$|\psi\rangle = \sum_i |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i \mid \psi\rangle,$$

$|\varphi_i\rangle$: vollständiger orthonormaler Satz von Basiszuständen.

$\psi(\boldsymbol{r}) = \langle\boldsymbol{r} \mid \psi\rangle$: Zustandsfunktion (Wellenfunktion) in der Ortsdarstellung (Abschnitt 1.5.),

$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$: Wahrscheinlichkeitsdichte (Abschnitt 1.5.).

Zustandsfunktion eines Zustandes mit Impuls $\boldsymbol{p}$ (1,63):

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar},$$

$\hbar = 2\pi\hbar$: Plancksches Wirkungsquantum (1,5),

$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\, \boldsymbol{e}_n$: Wellenzahlvektor (1,7),

$E = \hbar\omega$, E: Energie, ω: Kreisfrequenz (1,6).

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

L, A, H, ...: Operatoren (Abschnitt 2.1.), speziell
r: Ortsoperator, p: Impulsoperator, H: Hamilton-Operator.
Hermitezität des Operators A: $A^+ = A$ (29).
Mittelwert des Operators A im Zustand $|\psi\rangle$ (2,8):

$$\langle A \rangle = \langle \psi \mid A\psi \rangle = \langle \psi | \, A \, | \psi \rangle .$$

$[p_i, x_j] := p_i x_j - x_j p_i = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij}$: Vertauschung, Kommutator von Impuls und Ort (2,59),
$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$: Kommutator für die Koordinaten des Drehimpulses (5,4).
Unschärferelation (2,63):

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \, \langle (\Delta B)^2 \rangle \geqq \frac{1}{4} \, |\langle [A, B] \rangle|^2 ,$$

$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle \psi | \, (A - \langle A \rangle)^2 \, | \psi \rangle$: Schwankungsquadrat von A im Zustand $|\psi\rangle$ (2,62).
Ortsdarstellung (Abschnitt 2.2.):

$$A(x_i, p_i) \rightarrow A \left(x_i, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$A(x_i, p_i)$: dynamische Variable der klassischen Mechanik,
A: quantenmechanischer Operator, der dieser Observablen zugeordnet ist.
Eigenwertgleichung für hermitesche Operatoren (2,10):

$$A|\varphi_i\rangle = a_i |\varphi_i\rangle ,$$

a_i: Eigenwert,
$|\varphi_i\rangle$: Eigenvektor.
Energieeigenwertgleichung für den linearen harmonischen Oszillator (2,76):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_n(x) + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x) ,$$

$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$: Energieeigenwerte (2,94),

$\varphi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \, e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2}}$: Grundzustand des harmonischen Oszillators (2,92).

Energieeigenwertgleichung für das Wasserstoffatom (Abschnitt 5.5.):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \psi_{nlmm_s}(r) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \psi_{nlmm_s}(r) = E_n \psi_{nlmm_s}(r) ,$$

$E_n = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{m_e}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$: Energieeigenwerte (5,109),

$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B{}^3}} \, e^{-r/a_B}$: Orbitale für den Grundzustand (5,111),

a_B: Bohrscher Radius (5,94).

Eigenwertgleichung für das Quadrat des Drehimpulses (5,8):

$$\mathbf{L}^2|\psi_{jm}\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|\psi_{jm}\rangle,$$

$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$: Drehimpulsquantenzahl (Abschnitt 5.1.),

Eigenwertgleichung für die z-Koordinate des Drehimpulses (5,8):

$$\mathrm{L}_z|\psi_{jm}\rangle = \hbar m|\psi_{jm}\rangle,$$

$m = j, j-1, j-2, \ldots, -j$; $\hbar m$: Eigenwerte von L_z (Abschnitt 5.1.)
Bahndrehimpuls (Abschnitt 5.2.): $j \to l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$
Winkelanteil der Eigenzustände in Ortsdarstellung (5,34):
$Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$: Kugelfunktionen.

$$\sigma = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}: \text{ Spinmatrizen (5,52).}$$

Schrödinger-Gleichung (Abschnitt 3.1.):

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{H}\left(\boldsymbol{r}, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\psi(\boldsymbol{r}, t): \qquad \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\;|\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 = 1.$$

$\mathrm{H}\left(\boldsymbol{r}, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)$: Hamilton-Operator;

$\psi(\boldsymbol{r}, t)$: zeitabhängige Zustandsfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichteamplitude).

Stationäre Lösungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_n(\boldsymbol{r}, t)|^2 = 0, \qquad \psi_n(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t}\varphi_n(\boldsymbol{r}),$$

$$\mathrm{H}\varphi_n(\boldsymbol{r}) = E_n\varphi_n(\boldsymbol{r}), \qquad \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\;|\varphi_n(\boldsymbol{r})|^2 = 1.$$

Asymptotisches Verhalten der Zustandsfunktion für einen elastischen Streuprozeß (einfallender Strahl in z-Richtung, kugelsymmetrisches Potential) (6,18):

$$\psi(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\simeq} c\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + f(\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right),$$

$f(\vartheta)$: Streuamplitude.
Zusammenhang Streuamplitude – differentieller Streuquerschnitt (6,20):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\vartheta)|^2,$$

$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$: differentieller elastischer Streuquerschnitt (Wirkungsquerschnitt) pro Raumwinkelelement.

Mathematische Grundlagen

Es sollen kurz einige mathematische Begriffe, die für die Formulierung der Quantenmechanik wichtig sind, eingeführt und anhand von Beispielen erläutert werden. Auf eine ausführliche Darstellung und auf mathematische Strenge wird hierbei verzichtet.

Wahrscheinlichkeiten. Man wiederhole hierzu H. MELCHER u.a., Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern, Heft 16a, Physik-Praktikum, Abschn. 1.1, Potsdam 1979.

1. Wir betrachten ein Experiment, dessen Ergebnis durch eine Messung festgehalten wird. Dieses Experiment sei beliebig oft unter den gleichen Bedingungen wiederholbar, wobei wir im allgemeinen *unterschiedliche Meßwerte* a_i feststellen. Was läßt sich über den Ausgang solcher Experimente vorhersagen?

   Als *Beispiel* betrachten wir den Münzwurf; als Messung gilt die Feststellung, ob die Zahl oben liegt (diesem Ereignis können wir beispielsweise den Meßwert $+1$ zuordnen) oder nicht (Meßwert beispielsweise -1).

2. Wir führen das Experiment N-mal durch und stellen den Meßwert a_i N_i-mal fest. Es gilt, wenn über alle unterschiedlichen Meßwerte (Index i) summiert wird:

$$\sum_i N_i = N. \tag{1}$$

   Der Quotient N_i/N wird als *relative Häufigkeit* für das Auftreten des Meßwertes a_i bezeichnet.

3. Für genügend häufige Wiederholungen des Experimentes nähern sich die relativen Häufigkeiten einem Wert, der als Meßvorschrift für die theoretisch zu berechnende *Wahrscheinlichkeit* w_i des entsprechenden Meßwertes a_i angesehen werden kann,

$$\frac{N_i}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} w_i. \tag{2}$$

   Der Spezialfall, daß immer der gleiche Meßwert a_j angenommen wird (Sicherheit), ist in (2) für $w_i = \delta_{ij}$ enthalten. Aus (1) folgt, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\sum_i w_i$ eins ist.

4. Mit den durch (2) gegebenen relativen Häufigkeiten läßt sich ein mittlerer Meßwert $\langle A \rangle$, d. h. der *Mittelwert* der Meßreihe

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i a_i \xrightarrow{N \to \infty} \sum_i w_i a_i , \tag{3}$$

für genügend großes N bestimmen.

5. Im allgemeinen streuen die einzelnen Meßwerte a_i um diesen Mittelwert (3). Als *Maß der Streuung* wird der Mittelwert $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ des *Abweichungsquadrates* $(\Delta A)^2 = (A - \langle A \rangle)^2$ genommen:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i (a_i - \langle A \rangle)^2 \xrightarrow{N \to \infty} \sum_i w_i (a_i - \langle A \rangle)^2 . \tag{4}$$

Dieses „mittlere Schwankungsquadrat" wird null, wenn ein Meßwert mit Sicherheit angenommen wird.

Die Wurzel $\sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle}$ aus dem mittleren Schwankungsquadrat wird als *Unschärfe* bezeichnet.

6. Als *Beispiel* hatten wir den Münzwurf betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl oben liegt, ist 1/2. Was heißt das?

Für den Ausgang eines einzelnen Wurfes kann kein Ergebnis vorhergesagt werden. Betrachten wir aber ein Experiment, das aus K *Münzwürfen* besteht, so erwarten wir, daß bei der Hälfte der Würfe die Zahl oben liegt.

Wenn $Z^{(K)}$ die Anzahl der Würfe in der K-Serie ist, bei denen die Zahl oben liegt, heißt das: Der *Erwartungswert* von $Z^{(K)}/K$ ist

$$\langle Z^{(K)}/K \rangle = \frac{1}{2} . \tag{5}$$

Er stimmt gemäß (3) mit dem Mittelwert für $K \to \infty$ überein.

Jedem Experiment, d. h. jeder K-Serie, läßt sich nun ein Meßwert $a^{(K)}$ zuordnen, indem man jeden Wurf mit $+1$ zählt, wenn die Zahl oben liegt, und im anderen Fall mit -1. Dann gilt

$$a^{(K)} = Z^{(K)} - (K - Z^{(K)}) = 2Z^{(K)} - K . \tag{6}$$

Mit (5) erhält man den Erwartungswert

$$\langle a^{(K)} \rangle = 2\langle Z^{(K)} \rangle - K = K - K = 0 . \tag{7}$$

7. Wir führen dieses Experiment genügend oft durch und bestimmen die relativen Häufigkeiten, mit denen die einzelnen Meßwerte $a_i^{(K)}$ auftreten. Diese relativen Häufigkeiten nähern sich gemäß (2) den Wahrscheinlichkeiten $w_i^{(K)}$ für das Auftreten eines Meßwertes $a_i^{(K)}$.

In Abb. 1 sind diese Wahrscheinlichkeiten für $K = 5$ (ein Experiment besteht aus 5 Würfen) aufgetragen. Die möglichen Meßwerte $a_i^{(K)}$ sind 5, 3, 1, -1, -3, -5. Man prüfe die aufgetragenen Wahrscheinlichkeiten experimentell!

8. Insbesondere stellen wir fest, daß der Meßwert $a^{(K)}$ für ein Experiment im allgemeinen nicht mit dem Erwartungswert Null bzw. daß $Z^{(K)}$ nicht mit dem Erwartungswert $K/2$ übereinstimmt. Erst bei der wiederholten Durchführung des Versuches streben die Mittelwerte dieser Meßwerte gegen den Erwartungs-

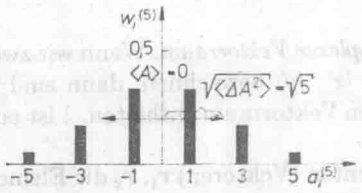

Abb. 1
Wahrscheinlichkeiten $w_i^{(5)}$, Mittelwert $\langle A \rangle$ und Unschärfe $\sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle}$ für eine Serie aus 5 Münzwürfen

wert. Die *Streuung* der Meßwerte $a^{(K)}$ um den Erwartungswert $\langle a^{(K)} \rangle = 0$ läßt sich berechnen, wenn man das Schwankungsquadrat $\langle (\Delta a^{(K)})^2 \rangle$ (4) mit dem Schwankungsquadrat $\langle (\Delta a^{(K-1)})^2 \rangle$ einer Serie aus $K - 1$ Münzwürfen vergleicht. Wegen

$$a^{(K)} = a^{(K-1)} \pm 1$$

für jedes Experiment und (7),

$$\langle a^{(K)} \rangle = \langle a^{(K-1)} \rangle = 0,$$

wird

$$\langle (\Delta a^{(K)})^2 \rangle = \langle (a^{(K)})^2 \rangle = \langle (a^{(K-1)} \pm 1)^2 \rangle$$

$$= \langle (a^{(K-1)})^2 \rangle \pm 2 \langle a^{(K-1)} \rangle + 1 = \langle (a^{(K-1)})^2 \rangle + 1; \tag{8}$$

bei K-facher Wiederholung dieses Schrittes ergibt sich

$$\langle (\Delta a^{(K)})^2 \rangle = K. \tag{9}$$

Mit zunehmendem K nimmt die Unschärfe $\sqrt{\langle (\Delta a^{(K)})^2 \rangle}$ mit $\sqrt{K}$ zu, die relative Unschärfe $\sqrt{\langle (\Delta a^{(K)})^2 \rangle}/K$ mit $1/\sqrt{K}$ ab. In diesem Sinne kann man sagen, daß der Erwartungswert $\langle a^{(K)} \rangle = 0$ um so besser angenommen wird, je größer K ist.

9. Die Verteilung $w_i^{(K)}$ der Meßwerte $a_i^{(K)}$, die bei einer häufigen Wiederholung des K-fachen Münzwurfes erhalten wird, ist die Binomialverteilung (Abb. 1). Dies läßt sich anhand des Pascalschen Dreiecks verdeutlichen, soll hier aber nicht gezeigt werden.

Der Hilbert-Raum. Die Sätze der Quantenmechanik lassen sich unter Verwendung des Hilbert-Raumes besonders einfach und durchsichtig formulieren. In Kapitel 1. werden wir zeigen, in welcher Weise die grundlegenden Aussagen der Quantenmechanik mathematisch durch Beziehungen im Hilbert-Raum erfaßt werden können.

Jedes spezielle Problem der Quantenmechanik läßt sich mit Hilfe der Rechenregeln für den Hilbert-Raum in übersichtlicher Weise formulieren und lösen.

Wir werden hier einige Eigenschaften des Hilbert-Raumes, der eine Verallgemeinerung des dreidimensionalen reellen Vektorraumes $\mathfrak{R}_3$ darstellt, nennen und erläutern. Zum Vergleich sollen diese Eigenschaften parallel für den $\mathfrak{R}_3$ betrachtet werden.

1. Der Hilbert-Raum ist ein *linearer komplexer Vektorraum.* Wenn wir zwei Elemente (Vektoren) dieses Vektorraumes mit $|x\rangle$, $|y\rangle$ bezeichnen, dann sind die Summe $|x\rangle + |y\rangle$ sowie $\lambda|x\rangle$ ebenfalls in diesem Vektorraum enthalten. λ ist eine beliebige komplexe Zahl.

   Im Falle des $\mathfrak{R}_3$ sind mit den Elementen (Vektoren) $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ die Elemente $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ und $\alpha\mathbf{r}_1$ ebenfalls in $\mathfrak{R}_3$ enthalten (Abb. 2). Im Gegensatz zum Hilbert-Raum muß α eine reelle Zahl sein.

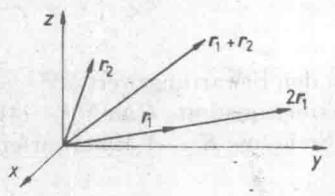

Abb. 2
Summe und Vielfaches von Vektoren

2. Im Hilbert-Raum ist eine *multiplikative Verknüpfung* (*Skalarprodukt*) erklärt, die zwei Elementen $|x\rangle$, $|y\rangle$ eine komplexe Zahl $\langle x \mid y\rangle$ mit folgenden Eigenschaften zuordnet:

$$\langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle^*, \tag{10}$$

$$\langle x \mid y_1 + y_2\rangle = \langle x \mid y_1\rangle + \langle x \mid y_2\rangle, \tag{11}$$

$$\langle x \mid \lambda y\rangle = \lambda\langle x \mid y\rangle, \tag{12}$$

$$\langle x \mid x\rangle \geqq 0. \tag{13}$$

   Beispielsweise folgt aus (10), daß $\langle x \mid x\rangle$ reell sein muß, denn bei der Vertauschung der Elemente geht das Skalarprodukt in das Konjugiert-Komplexe über. Das Gleichheitszeichen in (13) gilt nur für das Null-Element $|0\rangle$. Die Eigenschaft (13) gestattet es, eine *Norm*

$$\text{Norm } |x\rangle := \sqrt{\langle x \mid x\rangle} \tag{14}$$

   einzuführen.

   Im Falle des $\mathfrak{R}_3$ erfüllt das übliche Skalarprodukt von Vektoren die Bedingungen (10) bis (13), es kann aber nur reelle Werte annehmen.

3. Jedes Element des Hilbert-Raumes läßt sich aus einem *Satz von linear unabhängigen Basiselementen* $|e_n\rangle$ durch Linearkombination erhalten.

   Die Elemente $|e_n\rangle$ werden dann als linear unabhängig bezeichnet, wenn die Gleichung

$$\sum_n |e_n\rangle\, c_n = |0\rangle \tag{15}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com