Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1049

Bruno Iochum

Cônes autopolaires et algèbres de Jordan

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

Auteur

Bruno Iochum
C.N.R.S. Luminy Case 907, Centre de Physique Théorique
13288-Marseille Cedex 9, France

AMS Subject Classifications (1980): 06F, 17C, 46L

ISBN 3-540-12901-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-12901-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Je tiens à remercier J. BELLISSARD qui, par son apport très important (cf. bibliographie) , a permis d'achever ce travail*, ainsi que E. ALFSEN, A. CONNES, D. KASTLER, R. LIMA et D. TESTARD pour le temps qu'ils m'ont consacré.

F. BECKER et M.P. COLONNA se sont merveilleusement acquittées de la lourde tâche de déchiffrage et frappe d'un manuscrit difficilement lisible.

Enfin, je remercie les bibliothécaires et le secrétariat du Centre de Physique Théorique de Marseille pour leur efficacité.

Le 26 Mai 1982

B. IOCHUM

* A noter cependant que les J.B. algèbres ne font pas allusion à Jean Bellissard !

S O M M A I R E

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier la structure d'ordre sous jacente aux algèbres de Jordan et son point de départ se trouve dans un article de CONNES [2] concernant le même problème pour les algèbres de von Neumann. Une des motivations réside dans l'axiomatique de la mécanique quantique.

Le résultat essentiel est l'isomorphisme entre la catégorie des cônes autopolaires facialement homogènes et celle des algèbres de Jordan-Banach avec prédual.

Pour expliciter le cheminement de ce travail on examinera dans un premier temps le cas des matrices ce qui permettra de préciser les définitions, pour continuer avec une approche historique des cônes autopolaires, des algèbres de Jordan et de leur utilisation en mécanique quantique.

Soit K l'ensemble des réels ou complexes et A l'espace vectoriel des matrices nxn à entrées dans K. A a une structure naturelle d'algèbre associative et involutive donnée par $(xy)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\, y_{kj}$ et $(x^*)_{ij} = \overline{x_{ji}}$. Si B est le sous-espace réel des matrices selfadjointes, on définit sur B le produit de Jordan $x \circ y = \frac{1}{2}(xy+yx)$. Ce produit est bilinéaire symétrique et satisfait à $x \circ x = x^2$ et $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$. Cette dernière égalité (Identité de Jordan) signifie que les opérateurs de multiplication par x et x^2 commutent. Si M dénote l'algèbre de Jordan $(B, \circ)$, l'ensemble M^+ des matrices positives (ie : toutes les valeurs propres sont positives) est un cône convexe propre tel que $(M, M^+, \mathbb{1})$ soit un espace ordonné avec unité d'ordre $\mathbb{1}$.

<u>1ère Etape ; construction d'un cône</u> : La trace usuelle $\phi : x \to \sum_i x_{ii}$ permet de considérer M comme un espace de Hilbert H au moyen du produit scalaire $\langle x,y \rangle = \phi(x \circ y) = \phi(xy)$. Si H^+ est l'ensemble des matrices positives dans H, (H, H^+) est un espace ordonné que l'on distingue artificiellement de la structure algébrique M. Puisque $x \in H^+$ si et seulement si $\phi(xy) \geqslant 0$ $\forall y \in M^+$, on a en notant $(H^+)^* = \{x \in H / \langle x,y \rangle \geqslant 0 \ \forall y \in H^+\}$ le

<u>Résultat 1</u> : $H^+ = (H^+)^*$ c'est-à-dire H^+ est autopolaire dans $H = H^+ - H^+$. On note $\geqslant$ l'ordre induit par H^+.

<u>2ème Etape ; étude des faces</u> : Une face F de H^+ est un sous-cône convexe héréditaire au sens où $0 \leq y \leq x \in F$ entraîne $y \in F$. On désigne par $\langle x \rangle$ la plus petite face contenant $x \in H^+$. Pour toute face F il existe un projecteur e_F de M^+ tel que $F = e_F H^+ e_F$. En effet du fait de la dimension finie, $F = \langle x \rangle$ pour $x \in H^+$ et d'après la théorie spectrale $\langle x \rangle = \langle e_F \rangle$ si e_F est le support de x. On définit l'opérateur $P_F : x \in H^+ \to e_F x e_F \in H^+$. P_F est un projecteur orthogonal vérifiant $F = P_F H^+$. L'ensemble $F^\perp = \{x \in H^+ / \langle x, F \rangle = 0\}$ est appelée face orthogonale de F. Il est clair que $e_{F^\perp} = \mathbb{1} - e_F$ donc $F = F^{\perp\perp}$.

Si $\delta_F = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + P_F - P_{F^\perp})$, alors $\delta_F x = e_F \circ x$ pour $x \in M$. Ainsi l'application $F \to \delta_F$ relie la structure faciale à la structure algébrique. Pour tout réel t, $e^{t\delta_F} x = e^{t/2 e_F} x\, e^{t/2 e_F}$ pour $x \in H$ et le groupe à un paramètre $\{e^{t\delta_F}\}_{t \in \mathbb{R}}$ envoie H^+ dans H^+. CONNES appelle cette propriété l'homogénéité faciale. Plus précisément on définit les dérivations de H^+ comme des opérateurs bornés δ vérifiant $e^{t\delta} H^+ \subset H^+$ pour tout réel t. Les dérivations forment une algèbre de Lie réelle. Si $\mathcal{M}$ dénote la partie selfadjointe des dérivations alors H^+ est facialement homogène quand $\delta_F \in \mathcal{M}$ pour toute face F.

<u>Résultat 2</u> : H^+ est un cône facialement homogène.

Si e est un idempotent de M , l'application $P : x \in H \to exe \in H$ est un projecteur tel que $P = P_F$ où $F = eH^+e$. Il y a donc bijection entre les idempotents de M et les faces de H^+. Ces idempotents forment un treillis (stabilité par borne supérieure et inférieure notée $\vee$ et $\wedge$) orthocomplementé par $e \to \mathbb{1} - e$ et possédent des propriétés qui peuvent être traduites sur les faces. Si l'on ordonne les faces par inclusion, on obtient un treillis pour les opérations $F \vee G = \langle F \cup G \rangle$ et $F \wedge G = F \cap G$ qui est orthocomplementé par $F \to F^\perp$. La correspondance précédente implique le

<u>Résultat 3</u> : Les faces de H^+ forment un treillis orthomodulaire, modulaire, atomique et possédant la propriété de couverture.

(Rappelons qu'un treillis orthocomplementé est orthomodulaire si $x \leq y \Longrightarrow y = x \vee (y \wedge x^\perp)$, modulaire si $x \leq y \Longrightarrow (x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y)$ $\forall z$, atomique si pour chaque x, il existe un atome $e \neq 0$ (ie : $0 \leq y \leq e \Longrightarrow y = 0$ ou $y = e$) tel que $e \leq x$. Propriété de couverture : Si e est un atome et $e \wedge x = 0$ alors $x \leq y \leq e \vee x$ entraîne $y = x$ ou $y = e \vee x$).

<u>3ème Etape ; étude des dérivations</u> : Soit δ_a où $a \in M$ l'application : $x \in H \longrightarrow a \circ x$. En utilisant la décomposition spectrale $\sum_i a_i e_{Fi}$ de a, où $a_i \in \mathbb{R}$ et $e_{Fi} \circ e_{Fj} = \delta_{ij}\, e_{Fi}$, on obtient $\delta_a = \sum_i a_i\, \delta_{Fi}$. Si $\mathcal{M}^+$ est la

partie positive de $\mathcal{M}$ alors $a \in M^+$ si et seulement si $\delta_a \in \mathcal{M}^+$. Réciproquement si $\delta \in \mathcal{M}$ et $a = \delta\, \mathbb{1} \in M$ alors $(\delta_a - \delta)\, \mathbb{1} = 0$. Pour $x \in H^+$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq e^{t(\delta_a-\delta)} x \leq \|x\|\, e^{t(\delta_a-\delta)} \mathbb{1} = \|x\|\, \mathbb{1}$ donc $0 \leq < e^{t(\delta_a-\delta)} x, x > \leq \|x\|^2$. La théorie spectrale des opérateurs entraîne $(\delta_a - \delta)\, x = 0$ et $\delta_a = \delta$ car H^+ engendre H.

Résultat 4 : Toute dérivation selfadjointe est de la forme δ_a où $a \in M$ et l'application $a \to \delta_a$ est un isomorphisme d'ordre entre $(M, M^+, \mathbb{1})$ et $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^+, \mathbb{1})$.

4ème Etape ; construction géométrique d'un produit de Jordan sur $\mathcal{M}$:
Pour toute face F de H^+ il existe une projection $\mathcal{P}_F$ sur $\mathcal{M}$ correspondant au projecteur P_F sur H définie par $\mathcal{P}_F(\delta_a) = \delta_{P_F a}$. On vérifie que $P_F \mathcal{P}_F(\delta_a) = P_F \delta_a P_F$ et $P_{F^\perp} \mathcal{P}_F(\delta_a) = 0$ pour $a \in M$ et ces deux conditions caractérisent $\mathcal{P}_F$. Si $a = \sum_i a_i e_{Fi}$ et $x \in M$ alors on définit

$$\delta_a \circ \delta_x = \frac{1}{2} \sum_i a_i (\mathbb{1} + \mathcal{P}_{Fi} - \mathcal{P}_{Fi^\perp})(\delta_x).$$

Puisque ce produit est symétrique, il est bilinéaire et vérifie

$$\delta_x \circ \delta_y = \delta_{x \circ y}.$$

Résultat 5 : $\mathcal{M}$ muni du produit $\circ$ est une algèbre de Jordan isomorphe à M.

Cette étude des matrices est assez générale car elle contient toutes les étapes utilisées pour la dimension infinie.

Voyons maintenant comment son apparues les connections entre les structures d'ordre et les structures algébriques.Les cônes autopolaires de dimension finie ont été intensivement étudiés au début des années soixante sous la forme de domainesde positivité introduits par KOECHER [1] puis ROTHAUS [1]. Une des motivations étaient la donnée d'une classe à priori plus grande que celle des domaines symétriques bornés classifiés par CARTAN. De plus si C est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{R}^n$ dont le groupe des automorphismes affines est unimodulaire et transitif sur C alors la fermeture de C est un cône autopolaire (KOSZUL [1]). L'équivalence entre les cônes autopolaires transitivement homogènes (ie : action transitive du groupe des automorphismes sur l'intérieur du cône) et les algèbres de Jordan fut immédiatement établie (KOECHER [2], HERTNECK [1], VINBERG [3] cf. aussi [1], [2]). La dimension finie permet différents processus de construction générique de ces cônes (ROTHAUS [2], SATAKE [1], DORFMEISTER [1], [2], [3]). Une équivalence dans le cas de la dimension infinie entre algèbres de Jordan et domaines symétriques bornés a été établi récemment par BRAUN-KAUP-UPMEIER [1].

Cette correspondance entre ordre et algèbre est très ancienne. Les premiers exemples se trouvent dans la théorie de la mesure. Par exemple les treillis de Banach les plus connus étaient les espaces de Banach $L^p(Z,\nu)$ où (Z,ν) est un espace mesuré et $C(X)$: espace des fonctions continues sur le compact X. En fait tous les treillis de Banach vérifiant pour $1\leqslant p<\infty$, $\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$ si $x\wedge y = 0$ sont du type $L^p(Z,\nu)$ et ceux vérifiant $\|x\vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ sont des sous-treillis de $C(X)$ (LACEY [1], LINDENSTRAUSS-TZAFRIRI [1], SCHAEFER [1]). Il est à noter que $C(X)$ a aussi une structure d'algèbre commutative. La donnée d'un treillis ayant de bonnes propriétés permet donc de reconstruire une algèbre. Cependant l'extension de cette construction au cas non commutatif présente deux difficultés. Premièrement l'ordre naturel sur une C^* algèbre donné par la notion algébrique de spectre ne définit un treillis que si l'algèbre est commutative (SHERMAN [2], TOPPING [3]). Deuxièmement l'ordre n'est pas directement relié au produit usuel mais au produit de Jordan : $x\circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. En effet une bijection linéaire conserve l'ordre et l'identité entre deux C^* algèbres si et seulement si c'est un isomorphisme de Jordan (KADISON [1] ; voir aussi DYE [1] pour les treillis de projecteurs d'algèbres de von Neumann). Dans le cadre non commutatif il peut cependant rester une notion de commutativité sous la forme d'une trace sur l'algèbre ce qui permet de faire une théorie des espaces L^p(SEGAL [1], DIXMIER [2]) et de caractériser la structure d'ordre sous-jacente (SAKAI [2]). Il peut aussi ne pas y avoir de trace (cas des facteurs de type III) mais encore dans ce cas il est possible d'associer un ordre canonique à l'algèbre (et faire une théorie des espaces L^p : HAAGERUP [3], CONNES [3], HILSUM [1], KOSAKI[2],[3]).Pour ce faire on commence par déplacer le problème, c'est-à-dire on définit un ordre non pas sur $L(H)$ (algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert H) mais sur H lui-même. Examinons tout d'abord le cas commutatif vu sous cet angle. Soit $M = C(X)$. ω étant un état normal sur M, le théorème de RIESZ assure l'existence d'une mesure ν sur X telle que $\omega(a) = \int_X a(x)d\nu(x)$. Donc si (H, π, ξ) est la représentation de Gelfand-Naimark-Segal associé à ω, $H \approx L^2(X,\nu)$, $\pi(M) \approx L^\infty(X,\nu)$ agissant comme opérateurs de multiplication sur $L^2(X,\nu)$ et $\xi \approx$ fonction 1 sur X. Si ω est fidèle, le prédual M_* de M est identifié à $L^1(X,\nu)$. Pour tout ϕ dans M_*^+ il existe une unique fonction positive g dans $L^2(X,\nu)$ représentant ϕ . Le cône $L^2(X,\nu)^+$ des fonctions positives de $L^2(X,\nu)$ est autopolaire. Cette façon de déplacer le problème apparaît donc comme intéressante car l'espace de Hilbert $L^2(X,\nu)$ dépend seulement de M et l'ordre donné par $L^2(X,\nu)^+$ donne à cet espace une structure assimilable à celle de M_* au sens où l'on peut parler de décomposition en éléments selfadjoints, positifs, décomposition polaire etc... Le cadre de travail est plus agréable car au lieu d'utiliser la dualité algèbre et prédual, on n'utilise qu'un seul espace à structure très riche puisqu'il s'agit d'un espace de Hilbert. De plus aucune information algébrique n'est perdue. Nous reviendrons plus loin sur l'avantage de l'ordre par rapport à l'algèbre à propos de l'algèbre exceptionnelle mais généralisons maintenant le cas commutatif précédent. Soit M une algèbre de von Neumann sur H et ξ un vecteur cyclique et séparateur pour M. Si S désigne la fermeture de l'application : $x\xi \to x^*\xi$ et $J\Delta^{1/2}$ est la décomposition polaire de S alors la théorie de TOMITA (cf. TAKESAKI [1]) montre que $JMJ = M'$ et $\{\Delta^{it}.\Delta^{-it}\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'automorphismes de M. De plus $H^+ = \overline{\Delta^{1/4}M^+\xi}$ est un cône autopolaire dans H (ARAKI [1], CONNES [1], HAAGERUP [1]). CONNES [2] a caractérisé l'ensemble des cônes de ce type en introduisant deux nouvelles propriétés géométriques : l'homogénéité faciale et l'orientabilité. Le présent travail montre que la suppression de l'orientabilité sur les cônes autopolaires facialement homogènes revient à remplacer du côté algébrique, algèbres de von Neumann par algèbresde Jordan. On peut dire inversement que l'orientation permet de désymétriser le produit de Jordan 1/2(xy+yx) pour distinguer le produit à droite du produit à gauche. Il est donc grand temps de parler des algèbres de Jordan et pour cela reprenons notre démarche historique.

On ne sait pas si une théorie complète des algèbres de Jordan pourrait être trouvée dans des papiers inconnus d'Evariste GALOIS ! Leur naissance semble s'être effectuée dans un programme proposé par JORDAN [1], [2],[3] (voir aussi [4]) vers le début des années trente et surtout par JORDAN-von NEUMANN-WIGNER [1] en 1934 sur une généralisation du formalisme de la mécanique quantique. La stratégie de cet article est de définir des systèmes abstraits assimilables aux observables d'un système physique ayant les mêmes propriétés que les matrices de HEISENBERG, BORN, DIRAC ou que les opérateurs sur un espace de Hilbert de von NEUMANN [4], [5] et ceci indépendamment d'une représentation sur un espace de Hilbert. Cette recherche d'une axiomatisation s'inscrivait d'ailleurs dans le prolongement des travaux de HILBERT sur les liens entre la mathématique et la physique (Sixième problème de HILBERT : cf.WIGHTMAN [1]). L'ensemble des opérateurs selfadjoints qu'il faut reproduire a des propriétés de stabilité par rapport aux opérations : $x + y$, λx pour $\lambda\in\mathbb{R}$, x^n pour $n\in\mathbb{N}$, $x\circ y = \frac{1}{2}(xy+yx)$, xyx. On pressent rapidement que deux identités de base de degré 2 et 4 impliquent toutes les autres. Le produit $\circ$ présente l'avantage d'être commutatif mais l'inconvénient d'être non associatif quoiqu'il satisfasse à $x^2\circ(x\circ y) = x\circ(x^2\circ y)$. On remarque que $x\circ y = \frac{1}{2}[(x+y)^2-x^2-y^2]$. Donc si le carré d'une observable est défini explicitement par le processus de mesure (on mesure x puis on éléve au carré le résultat de la mesure et l'observable correspondante est notée x^2) et si l'on admet que la somme de deux observables est une observable (ce qui ne peut être justifié par le processus de mesure) (cf. von NEUMANN [3] IV.1.) alors il est naturel d'utiliser le produit de Jordan. Ceci permet d'éviter le problème de la justification physique dans l'approche opératorielle du produit usuel de deux observables qui ne commutent pas. Une algèbre de Jordan (nom proposé par ALBERT [2]) est donc un espace vectoriel réel muni d'un produit bilinéaire symétrique satisfaisant à $x^2\circ(x\circ y) = x\circ(x^2\circ y)$. Cette identité de Jordan apparaît comme une condition "minimale" impliquant que l'algèbre engendrée par une observable est de puissance associative. JORDAN-von NEUMANN-WIGNER [1] ont classifié toutes les algèbres de Jordan formelles réelles (ie : $x^2+y^2+\ldots+z^2 = 0$ implique $x=y=\ldots=z=0$) de dimension finie. En particulier celles qui sont irréductibles sont du type algèbres de matrices à entrée dans les réels, complexes, quaternions ou l'algèbre exceptionnelle : matrices 3x3 à entrée dans les octonions (ou algèbre de CAYLEY) plus les algèbres appelées (plus tard) de spins. Ces dernières sont engendrées par l'identité et les opérateurs selfadjoints $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ tels que $s_i\circ s_j = \delta_{ij}\mathbb{1}$. Comme il est impossible de représenter la relation de commutation $[X,P] = i\hbar$ avec des opérateurs bornés, ce travail effectué en dimension finie a eu peu d'échos chez les physiciens pendant longtemps et ce, malgré les tentatives de von NEUMANN [2] (la suite de cet article n'est jamais parue) et de SEGAL [2] qui ont introduit une topologie dans le système d'axiomes afin d'étendre les résultats. JORDAN lui même a donné un modèle physique où la règle de puissance associative $x^n x^m = x^{n+m}$ n'est plus vraie. De plus bien que les axiomes de SEGAL permettent de retrouver tous les ingrédients usuels de la mécanique quantique (états, probabilité de présence etc...) seuls les systèmes d'opérateurs selfadjoints d'une C^* algèbre sont susceptibles d'une interprétation en terme de mécanique quantique grâce au théorème de GELFAND-NAIMARK-SEGAL sur la représentation concrète de toute C^* algèbre abstraite. SHERMAN [1] a montré que beaucoup de systèmes de SEGAL ne sont pas de ce type et on ne sait toujours pas leur donner un contenu physique. Une deuxième raison de la désaffection pour les algèbres de Jordan était l'apparition des quaternions et octonions alors inconnus en physique. Une troisième raison fut l'évolution très rapide de la théorie des C^* algèbres dont les premières retombées sur l'axiomatique furent les approches de KADISON [3] et HAAG-KASTLER [1](notamment en théorie des champs et en mécanique statistique quantique). Dans les années soixante, TOPPING [1], [2] puis STØRMER [1], [2], [3], [4] ont repris l'étude des algèbres de Jordan d'un type particulier appelées J.C. algèbres (pour Jordan-C^* algèbres). Ce sont des sous-espaces vectoriels stables par carré de la partie selfadjointe d'une C^* algèbre qui possédent donc une norme naturelle. Ce n'est que récemment que ALFSEN-SHULTZ-STØRMER [1] ont introduit des algèbres de Jordan abstraites appelées J.B. algèbres (pour Jordan-Banach). Ce sont des algèbres de Jordan munies d'une structure d'espaces de Banach tels que $\|xy\| \leqslant \|x\| \; \|y\|$, $\|x^2\| = \|x\|^2$ et $\|x^2-y^2\| \leqslant \max(\|x\|^2, \|y\|^2)$. Ce type d'algèbre comprend tous les exemples déjà cités. ALFSEN-SHULTZ-STØRMER ont démontré que le quotient d'une J.B.algèbre par un certain idéal se représente isométriquement sur une J.C.algèbre. L'idéal est canonique en ce sens que toute représentation factorielle de l'algèbre ne s'annulant pas sur cet idéal est représentée sur l'algèbre exceptionnelle. Les J.B. algèbres qui sont le dual d'un espace de Banach (appelées J.B.W. algèbres) sont l'équivalent des algèbres de von Neumann par rapport aux C^* algèbres (SHULTZ [1]). Elles ont un comportement identique pour la théorie spectrale, les propriétés du prédual. Par contre une différence essentielle au niveau du comportement se situe sur les représentations en différents types : réels, complexes ou quaternioniques (cf. ALFSEN-HANCHE-OLSEN-SHULTZ [1]). Ceci nous permet de préciser que dans ce travail on a privilégié l'ordre car c'est une notion intrinsèque. En particulier l'algèbre exceptionnelle ou les différents types ne jouent aucun rôle De plus toute J.B. algèbre peut être considérée comme un sous-espace d'ordre de L(H) où H est un espace de Hilbert réel (Appendice 10) sans être nécessairement une sous-algèbre de L(H) pour le produit de Jordan.

Ce renouveau des algèbres de Jordan s'est aussi manifesté en physique. KASTLER-SOURIAU [1], PAIS [1], GAMBA [1] ont utilisé les octonions pour décrire des propriétés de symétries en théorie des particules élémentaires. GÜNAYDIN [1], [2] et GÜRSEY [1], [2] ont remarqué que SU(3) est un sous-groupe du groupe des automorphismes des octonions identifiable au groupe de couleurs et ont donné une explication algébrique à l'observation des états singulets de quarks colorés et à l'inobservabilité des autres états de couleur. Un lien avec l'axiomatique quantique utilisant l'algèbre exceptionnelle est donné par GÜNAYDIN-PIRON-RUEGG [1]. Citons enfin pour mémoire que les algèbres de Jordan, en dehors de l'analyse réelle et complexe, ont été utilisées pour traiter des problèmes de génétique et de perception des couleurs (voir à ce propos les panoramas de Mc CRIMMON [1], IORDANESCU [1] et TILGNER [1]).

Faisons maintenant une approche plus géométrique. Toute algèbre de von Neumann est engendrée par ses projecteurs et l'ordre des projecteurs est algébrique ($e \leqslant f$ si $ef = e$), d'où l'importance du treillis des projecteurs. Leur étude a conduit von NEUMANN [1] à introduire les géométries continues, notion contenant les géométries projectives de dimension finie. Ce sont des treillis modulaires (terme dû à DEDEKIND) complet satisfaisant une propriété de continuité. Cependant un treillis standard, celui de L(H) n'est modulaire que si H est de dimension finie. Parallèlement, BIRKHOFF-von NEUMANN [1] ont jeté les bases d'une logique quantique qui la différencie de la logique utilisée pour la mécanique classique, cette dernière coïncidant avec la théorie des probabilités de KOLMOGOROV [1]. Ils utilisent aussi des treillis modulaires tout en reconnaissant la difficulté d'une justification physique. Bien entendu ce point de vue peut être relié au point de vue algébrique grace notamment à GUNSON [1] (voir aussi ARAKI [3]) rapprochant les algèbres de Jordan de la logique quantique.

Nous allons faire maintenant une petite incursion dans les treillis et la logique quantique et voir que cela ne nous éloigne pas du tout des algèbres de Jordan.

L'utilisation dans la logique quantique de la théorie des treillis a rendu nécessaire l'approfondissement de celle-ci. Les travaux de LOOMIS [1], MAEDA, Mc LAREN [2], RAMSAY [1] ont montré que les principaux résultats obtenus sous l'hypothèse de modularité comme par exemple la théorie de la dimension, pouvaient être obtenus dans les treillis orthomodulaires (terme dû à KAPLANSKY).
FOULIS [2] a prouvé que tout treillis orthomodulaire peut se représenter par des idempotents fermés d'un * semi-groupe de BAER (généralisation de JANOWITZ [1] : la théorie des treillis est une partie de la théorie des semi-groupes). Après les travaux de BIRKHOFF-von NEUMANN, MACKEY [1] a défini une axiomatique à partir d'observables, d'états et d'une classe particulière d'observables : les questions (ou tests, évènements, propositions; on peut inclure l'axiomatique de SEGAL dans celle de MACKEY : BOYCE - GUDDER [1]). L'ensemble partiellement ordonné de ces questions est encore isomorphe au treillis des projecteurs de L(H) où H est un espace de Hilbert complexe. PIRON [1] (cf. aussi [2]) et ZIERLER [1], [2] furent les premiers à utiliser systématiquement le treillis des propositions. En particulier PIRON suppose qu'il est complet, atomique, orthomodulaire et satisfait à la propriété de couverture. (L'atomicité semble l'hypothèse la plus "ad hoc"). Ces treillis (tout au moins ceux de rang $\geqslant 4$ pour éviter les problèmes de géométries non Desarguesiennes : cf. GREECHIE [1]) peuvent se plonger dans le treillis des sous-espaces fermés d'un espace vectoriel sur un certain corps, muni d'un produit scalaire; ce qui "justifie" l'utilisation du septième axiome de MACKEY invoquant le cadre des espaces de Hilbert complexes (cf. dans cet esprit VARADARAJAN [1], GUZ [3], [4], CIRELLI-GALLONE-GUBBAY [1], PULMANNOVA [1]). L'orthocomplementation du treillis joue à ce niveau un rôle important puisque si le treillis des sous-espaces fermés d'un espace de Banach réel, complexe ou quaternionique est orthocomplementé alors il existe sur cet espace un produit scalaire dans l'algèbre à division considérée dont la norme déduite est équivalente à la norme initiale et dont l'orthogonalité correspond à l'orthocomplementation . Un espace de Hilbert apparaît : BIRKHOFF-VON NEUMANN [1], KAKUTANI-MACKEY [1],[2], LINDENSTRAUSS-TZAFRIRI [2], Mc LAREN [3], VARADARAJAN [1]; Voir aussi PRUGOVEČKI [1] pour une axiomatique quantique plus générale que celle utilisant les espaces de Hilbert. A noter que le corps des treillis du plongement de PIRON

n'est pas forcément celui des réels, complexes ou quaternions. Le processus de mesure (idéale de première sorte pour PAULI (cf JAUCH [1]) est intimement lié à la projection de SASAKI sur les treillis orthomodulaires (: $y \to x \wedge (x^{\perp} \vee y)$ pour x donné), à la notion de filtres au sens de MIELNIK [1], [2] ainsi qu'à la propriété de couverture (PIRON [2] th. 4.3). GUZ [2] a montré en prenant les premiers axiomes de MACKEY, que la logique quantique est atomique si elle possède "suffisamment" d'états purs, la propriété de couverture apparaissant comme conséquence d'une probabilité conditionnelle sur les états. Ceci montre qu'une vision différente donnée par l'approche opérationnelle est possible. Dans cette approche, le concept de base est l'espace vectoriel ordonné engendré par les états d'un système physique (cf. LUDWIG [1], [2], EDWARDS [7], [8], [9], MIELNIK [1], [2], DAVIES [1], DAVIES-LEWIS [1], FOULIS-RANDALL [1]. A noter que les structures linéaires et topologiques ne sont pas nécessaires cf. GUDDER [1]). Les propositions sont les points extrémaux de l'intervalle d'ordre $[0, \mathbb{1}]$ de l'ensemble des applications affines bornées sur les états. Les filtres (ou compteurs) correspondent aux unités projectives de ALFSEN-SHULTZ [1], aux "nth. projections" de WITTSTOCK [1], WERNER [2], aux F-projections de ABBATI-MANIA [1] et aux "filtering projections" de ARAKI [3]. (le côté algébrique de cette approche est la dualité algèbre-dual ou prédual). HAAG [1] a remarqué en 1960 l'importance de la symétrie des probabilités de transition entre deux états purs. GUZ [2] montre que cette symétrie entraîne l'existence d'une structure d'algèbre de Segal distributive sur la logique et qu'un axiome sur la probabilité conditionnelle entre deux états purs implique que la logique est une J.B. algèbre. De manière duale, il montre que les observables bornées du système possèdent aussi une structure de J.B. algèbre.

Puisque ce travail s'intéresse plus à la structure d'ordre qu'aux algèbres de Jordan, voyons pour terminer le rôle exact des treillis. Le problème de la caractérisation des treillis de projecteurs d'une algèbre de von Neumann est encore entier (voir cependant ZIERLER [1], WILBUR [1] pour celui de L(H), STOLZ [1], [2]). C'est pourquoi toute correspondance reliant une structure d'ordre à une structure algébrique est intéressante bien que de moindre ambition que le problème cité. On a donc choisi de développer la notion d'ordre donné par un cône autopolaire en faisant ressortir les propriétés du treillis des faces. GUNSON [1] a le premier remarqué le lien entre les cônes autopolaires de dimension finie et l'axiomatique quantique par l'intermédiaire des algèbres de Jordan. Une approche directe toujours en dimension finie faite par ARAKI [3] montre qu'un produit scalaire "naturel" apparaît dès que l'on se donne un processus de filtres. La condition de symétrie déjà vue entraîne que le cône engendré par les états est autopolaire, régulier (ie : pour toute face F, P_F conserve l'ordre) et posséde un vecteur trace. Réciproquement la donnée d'un tel cône implique un processus de filtrage sur l'ensemble des états, ensemble que l'on prend égal à une base du cône définie par le vecteur trace. A chaque état pur correspond un filtre constitué par la projection sur la face extrémale du cône engendré par cet état. Puisqu'un cône autopolaire régulier et symétrique (ie : pour toute face F la symétrie $2(P_F+P_{F^\perp})-\mathbb{1}$ par rapport à l'espace engendré par F et $F^\perp$ conserve l'ordre) vérifie les conditions de ARAKI [3] un problème naturel est de savoir si ce cône est facialement homogène. Une réponse positive à cette conjecture donnerait une "justification" physique à l'homogénéité faciale.

PLAN DU TRAVAIL :

Puisque chaque chapitre comporte une introduction détaillée contentons nous d'indiquer rapidement leur contenu.

Le chapitre I concerne les propriétés générales des cônes autopolaires : cônes particuliers, étude des faces, du groupe du cône, comportement vis à vis de l'intégration-désintégration, classification.

Le chapitre II concerne l'homogénéité faciale et ses conséquences : symétrie du cône et théorie spectrale.

Le chapitre III concerne la construction d'une algèbre de Jordan à partir d'un cône avec toutes les conséquences que l'on tire des résultats déjà connus sur ces algèbres notamment concernant le treillis des faces.

Le chapitre IV concerne les poids et plus particulièrement les traces sur un cône. L'équivalence entre homogénéité faciale et homogénéité transitive y est démontrée.

Le chapitre V, pendant du précédent, concerne les traces sur les J.B. algèbres. On y montre l'équivalence de la catégorie des cônes à traces et celle des J.B.W. algèbres à traces.

Le chapitre VI concerne les cônes orientables. Le résultat principal bien que dû à CONNES, a sa place ici car il fait le lien entre les J.B.W. algèbres et les algèbres de von Neumann.

Le chapitre VII concerne le résultat principal : Equivalence de la catégorie des cônes autopolaires facialement homogènes et celle des J.B.W. algèbres.

Dans les appendices sont groupés, outre les rappels, des résultats un peu annexes.

La bibliographie est divisée en deux parties; la premiere contient les references utilisées au fil des pages et la seconde des references apparues après (ou inconnues de l'auteur à l'époque de) ce travail.

I - CONES AUTOPOLAIRES

Dans ce chapitre on étudie les principales propriétés des cônes autopolaires (i.e. égaux à leurs polaires) notés H^+ dans un espace de Hilbert réel noté H. Ces cônes sont caractérisés par l'existence d'une décomposition unique de tout élément de l'espace de Hilbert en deux vecteurs orthogonaux du cône (I.1.2.). Les exemples de tels cônes ne manquent pas : $(\mathbb{R}^+)^n$, cônes de $\mathbb{R}^3$ construits à partir de courbes autopolaires, cônes de matrices self-adjointes positives à entrée dans les réels, complexes, quaternions, octonions avec généralisation en dimension infinie aux algèbres de von Neumann, cône $L^2(G,\mu)^+$ où G est un groupe localement compact unimodulaire avec mesure de Haar μ, cônes dont la base est une boule de dimension quelconque (I.1.11.). L'étude des faces de ces cônes est essentielle à leur connaissance. Certaines faces appelées complètes car égales à leurs biorthogonales (l'orthogonale d'une face F est $F^\perp = \{\xi \in H^+/<\xi, F>= 0\}$) jouent un rôle crucial dans ce travail. Elles forment un treillis complet (I.1.9.) qui est orthomodulaire pour $F \to F^\perp$ dans les bons cas (I.1.19). Certains cônes peuvent être d'intérieur topologique vide, ce qui conduit à plusieurs définitions : vecteur quasi-intérieur (i.e. l'orthogonale de la face engendrée par le vecteur est réduite à $\{0\}$), unité d'ordre faible (i.e. vecteur dont la face engendrée est dense dans le cône), qui sont reliées à la séparabilité (I.1.16) ou au fait que le cône possède une base (I.1.15). Le groupe des automorphismes conservant le cône ainsi que l'algèbre de Lie des dérivations bornées sont rapidement étudiés en I.2. ; en particulier, les dérivations δ se caractérisent par la propriété : $P_F \delta P_{F^\perp} = 0$ pour toute face F où P_F est le projecteur sur l'espace de Hilbert engendré par F. Comme tout espace ordonné, l'espace de Hilbert muni d'un cône autopolaire possède un centre (I.2.6., I.2.7.) qui permet de faire la décomposition du cône en intégrale directe de cônes autopolaires indécomposables (I.3.5.). Ceci nécessite de savoir caractériser les propriétés de treillis que possède éventuellement l'espace de Hilbert en fonction des propriétés du treillis des faces complètes. En particulier H est un treillis vectoriel si et seulement si toute face complète est décomposante (i.e. $H^+ = F \oplus F^\perp$) (I.3.2.). Tous les cônes autopolaires définissant un treillis vectoriel sont du type $L^2(Z,\nu)^+$ où (Z,ν) est un espace mesuré (I.3.6.). Réciproquement il est possible d'intégrer un champ de cônes autopolaires (I.3.4.).