Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1335

F. Guillén V. Navarro Aznar
P. Pascual-Gainza F. Puerta

Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1335

F. Guillén V. Navarro Aznar
P. Pascual-Gainza F. Puerta

Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Authors

F. Guillén
V. Navarro Aznar
P. Pascual-Gainza
F. Puerta
Departament de Matemàtiques
ETSEIB – UPC, Diagonal, 647
08028 Barcelona, Spain

Mathematics Subject Classification (1980): 14-XX, 19-XX, 32-XX

ISBN 3-540-50023-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-50023-5 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1118 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1118: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Seminaire, 1982/83. Edité par Th. Jeulin et M. Yor. V, 315 pages. 1985.

Vol. 1119: Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Proceedings, 1984. Edited by I. Capuzzo Dolcetta, W.H. Fleming and T. Zolezzi. VI, 202 pages. 1985.

Vol. 1120: K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras. V, 118 pages. 1985.

Vol. 1121: Singularities and Constructive Methods for Their Treatment. Proceedings, 1983. Edited by P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman. IX, 346 pages. 1985.

Vol. 1122: Number Theory. Proceedings, 1984. Edited by K. Alladi. VII, 217 pages. 1985.

Vol. 1123: Séminaire de Probabilités XIX 1983/84. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 504 pages. 1985.

Vol. 1124: Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983. Proceedings. Edited by E. Casas-Alvero, G.E. Welters and S. Xambó-Descamps. XI, 416 pages. 1985.

Vol. 1125: Dynamical Systems and Bifurcations. Proceedings, 1984. Edited by B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens. V, 129 pages. 1985.

Vol. 1126: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1983. Edited by A. Ranicki, N. Levitt and F. Quinn. V, 423 pages. 1985.

Vol. 1127: Numerical Methods in Fluid Dynamics. Seminar. Edited by F. Brezzi, VII, 333 pages. 1985.

Vol. 1128: J. Elschner, Singular Ordinary Differential Operators and Pseudodifferential Equations. 200 pages. 1985.

Vol. 1129: Numerical Analysis, Lancaster 1984. Proceedings. Edited by P.R. Turner. XIV, 179 pages. 1985.

Vol. 1130: Methods in Mathematical Logic. Proceedings, 1983. Edited by C.A. Di Prisco. VII, 407 pages. 1985.

Vol. 1131: K. Sundaresan, S. Swaminathan, Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces. III, 116 pages. 1985.

Vol. 1132: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory. Proceedings, 1983. Edited by H. Araki, C.C. Moore, Ş. Strătilă and C. Voiculescu. VI, 594 pages. 1985.

Vol. 1133: K.C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. VI, 362 pages. 1985.

Vol. 1134: G.P. Galdi, S. Rionero, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. VII, 126 pages. 1985.

Vol. 1135: Number Theory, New York 1983–84. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 283 pages. 1985.

Vol. 1136: Quantum Probability and Applications II. Proceedings, 1984. Edited by L. Accardi and W. von Waldenfels. VI, 534 pages. 1985.

Vol. 1137: Xiao G., Surfaces fibrées en courbes de genre deux. IX, 103 pages. 1985.

Vol. 1138: A. Ocneanu, Actions of Discrete Amenable Groups on von Neumann Algebras. V, 115 pages. 1985.

Vol. 1139: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1983. Edited by H. D. Doebner and J. D. Hennig. VI, 337 pages. 1985.

Vol. 1140: S. Donkin, Rational Representations of Algebraic Groups. VII, 254 pages. 1985.

Vol. 1141: Recursion Theory Week. Proceedings, 1984. Edited by H.-D. Ebbinghaus, G.H. Müller and G.E. Sacks. IX, 418 pages. 1985.

Vol. 1142: Orders and their Applications. Proceedings, 1984. Edited by I. Reiner and K. W. Roggenkamp. X, 306 pages. 1985.

Vol. 1143: A. Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions. XIII, 203 pages. 1985.

Vol. 1144: Knot Theory and Manifolds. Proceedings, 1983. Edited by D. Rolfsen. V, 163 pages. 1985.

Vol. 1145: G. Winkler, Choquet Order and Simplices. VI, 143 pages. 1985.

Vol. 1146: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1983–1984. Edité par M.-P. Malliavin. IV, 420 pages. 1985.

Vol. 1147: M. Wschebor, Surfaces Aléatoires. VII, 111 pages. 1985.

Vol. 1148: Mark A. Kon, Probability Distributions in Quantum Statistical Mechanics. V, 121 pages. 1985.

Vol. 1149: Universal Algebra and Lattice Theory. Proceedings, 1984. Edited by S. D. Comer. VI, 282 pages. 1985.

Vol. 1150: B. Kawohl, Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE. V, 136 pages. 1985.

Vol 1151: Ordinary and Partial Differential Equations. Proceedings, 1984. Edited by B.D. Sleeman and R.J. Jarvis. XIV, 357 pages. 1985.

Vol. 1152: H. Widom, Asymptotic Expansions for Pseudodifferential Operators on Bounded Domains. V, 150 pages. 1985.

Vol. 1153: Probability in Banach Spaces V. Proceedings, 1984. Edited by A. Beck, R. Dudley, M. Hahn, J. Kuelbs and M. Marcus. VI, 457 pages. 1985.

Vol. 1154: D.S. Naidu, A.K. Rao, Singular Pertubation Analysis of Discrete Control Systems. IX, 195 pages. 1985.

Vol. 1155: Stability Problems for Stochastic Models. Proceedings, 1984. Edited by V.V. Kalashnikov and V.M. Zolotarev. VI, 447 pages. 1985.

Vol. 1156: Global Differential Geometry and Global Analysis 1984. Proceedings, 1984. Edited by D. Ferus, R.B. Gardner, S. Helgason and U. Simon. V, 339 pages. 1985.

Vol. 1157: H. Levine, Classifying Immersions into $\mathbb{R}^4$ over Stable Maps of 3-Manifolds into $\mathbb{R}^2$. V, 163 pages. 1985.

Vol. 1158: Stochastic Processes – Mathematics and Physics. Proceedings, 1984. Edited by S. Albeverio, Ph. Blanchard and L. Streit. VI, 230 pages. 1986.

Vol. 1159: Schrödinger Operators, Como 1984. Seminar. Edited by S. Graffi. VIII, 272 pages. 1986.

Vol. 1160: J.-C. van der Meer, The Hamiltonian Hopf Bifurcation. VI, 115 pages. 1985.

Vol. 1161: Harmonic Mappings and Minimal Immersions, Montecatini 1984. Seminar. Edited by E. Giusti. VII, 285 pages. 1985.

Vol. 1162: S.J.L. van Eijndhoven, J. de Graaf, Trajectory Spaces, Generalized Functions and Unbounded Operators. IV, 272 pages. 1985.

Vol. 1163: Iteration Theory and its Functional Equations. Proceedings, 1984. Edited by R. Liedl, L. Reich and Gy. Targonski. VIII, 231 pages. 1985.

Vol. 1164: M. Meschiari, J.H. Rawnsley, S. Salamon, Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II – 1984. Edited by E. Vesentini. VI, 224 pages. 1985.

Vol. 1165: Seminar on Deformations. Proceedings, 1982/84. Edited by J. Ławrynowicz. IX, 331 pages. 1985.

Vol. 1166: Banach Spaces. Proceedings, 1984. Edited by N. Kalton and E. Saab. VI, 199 pages. 1985.

Vol. 1167: Geometry and Topology. Proceedings, 1983–84. Edited by J. Alexander and J. Harer. VI, 292 pages. 1985.

Vol. 1168: S.S. Agaian, Hadamard Matrices and their Applications. III, 227 pages. 1985.

Vol. 1169: W.A. Light, E.W. Cheney, Approximation Theory in Tensor Product Spaces. VII, 157 pages. 1985.

Vol. 1170: B.S. Thomson, Real Functions. VII, 229 pages. 1985.

Vol. 1171: Polynômes Orthogonaux et Applications. Proceedings, 1984. Edité par C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni et A. Ronveaux. XXXVII, 584 pages. 1985.

Vol. 1172: Algebraic Topology, Göttingen 1984. Proceedings. Edited by L. Smith. VI, 209 pages. 1985.

continued on page 195

PREFACE

Ce volume contient la plupart des exposés d'un séminaire sur la théorie de Hodge-Deligne dirigé par l'un des auteurs et qui s'est tenu à Barcelone au cours de l'année 1982. Ce séminaire avait déjà donné lieu aux notes préliminaires: "Théorie de Hodge via schémas cubiques" qui ont été largement diffusées à partir de Juin 1982. Le volume que nous présentons ici vient remplacer avantageusement ces notes préliminaires.

J.H.M. Steenbrink a exposé dans ce séminaire quelques-uns de ses résultats sur la théorie de Hodge-Deligne; ses exposés ont grandement stimulé notre activité sur le sujet et nous lui en sommes très reconnaissants. Nous remercions vivement J. Ferrer et F. Panyella pour le support qu'ils nous ont donné en tout moment. Mlle. R.M. Cuevas s'est chargée de la frappe du manuscript avec soin et gentillesse, nous l'en remercions sincèrement.

Ce travail a été partiellement subventionné par la C.I.R.I.T. (projet AR83-136) et la C.A.I.C.Y.T. (projet 2690/83).

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

C'est presque toujours en faisant dépendre la solution d'un problème de celle d'un autre plus simple, cette seconde d'une troisième et ainsi de suite qu'on parvient à une question dont la réponse est évidente ... Il arrive souvent que le problème auquel on descend n'est qu'un cas particulier du problème à résoudre.

Gabriel Lamé

INTRODUCTION

Si X est une variété algébrique complexe, on sait d'après Hironaka ([3]) qu'on peut résoudre les singularités de X, c'est à dire, qu'il existe une variété non singulière X' et un morphisme $f: X' \longrightarrow X$ qui est birationnel et propre. En plus, si Y est une sous-variété de X, il existe une résolution $f: X' \longrightarrow X$ telle que $f^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux dans X'. Depuis sa publication en 1964, on a donné de nombreuses applications au théorème d'Hironaka dans l'étude cohomologique des variétés algébriques complexes, aussi bien des variétés algébriques singulières que des variétés non singulières. L'objectif central de ce séminaire est d'établir un cadre général pour l'utilisation cohomologique du théorème d'Hironaka, et de poursuivre quelques-unes des applications qu'on en a déjà faites.

Avant de décrire la méthode qu'on va introduire ci-après et qui est dans l'esprit de [2], il convient de souligner quelques-unes des caractéristiques communes qu'on trouve en bon nombre d'applications.

Dans certaines applications, par exemple dans l'étude de la monodromie, on considère une variété non singulière X et un diviseur Y de X ; il résulte alors du théorème d'Hironaka qu'il existe une variété non singulière X' et un morphisme propre $f: X' \longrightarrow X$, tel que f est un isomorphisme en dehors de Y et que $f^{-1}(Y)$ est un diviseur à croisements normaux dans X'. Ceci permet d'obtenir des résultats dans la situation d'origine à partir des résultats locaux qu'on peut explicitement démontrer dans le cas où Y est à croisements normaux.

Dans d'autres applications, on considère un ouvert de Zariski non singulier X d'une variété complète $\bar{X}$. Le théorème de résolution permet alors de supposer que X est un ouvert de Zariski d'une variété non singulière et complète X', et que $X'-X$ est un diviseur à croisements normaux dans X'. Par exemple, c'est sous cette forme qu'on utilise le théorème dans la cohomologie de De Rham algébrique, ou dans la théorie de Hodge des variétés algébriques non singulières et non complètes.

Mais ce genre d'application directe du théorème de résolution est limité, par exemple dans les situations précédentes, au cas où la variété X est non singulière. Bien qu'il permette aussi de traiter quelques questions relatives à la cohomologie des variétés singulières, si l'on peut raisonner par induction et dévisser, il reste des problèmes intéressants qui ne sont pas abordables par ce raisonnement et pour la solution desquels on doit développer des méthodes d'utilisation du théorème d'Hironaka plus précises.

Comme préalabable à son développement de la théorie de Hodge des variétés algébriques singulières, Deligne ([1]) a introduit une méthode très générale et très précise d'utiliser la résolution des singularités: la méthode de la descente cohomologique simpliciale. Celle-ci permet d'obtenir des résultats au niveau des complexes de faisceaux, et non seulement sur l'hypercohomologie de ces complexes, comme c'était le cas des applications précédentes. Cette possibilité de travailler au niveau des complexes est essentielle à la construction de Deligne d'une structure de Hodge mixte sur la cohomologie d'une variété algébrique singulière.

La méthode de la descente cohomologique simpliciale s'illustre assez clairement dans l'exemple suivant. Soit X un espace topologique, si X est la réunion de deux sous-espaces fermés X_1 et X_2, on a une suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\to H^{i-1}(X_1\cap X_2,\mathbb{C})\to H^i(X,\mathbb{C})\to H^i(X_1,\mathbb{C})\oplus H^i(X_2,\mathbb{C})\to H^i(X_1\cap X_2,\mathbb{C})\to$$

et, plus généralement, si X est la réunion d'une famille de sous-espaces fermés X_i, $i \in I$, on a une suite spectrale de Mayer-Vietoris

$$E_1^{pq} = H^q(X_p,\mathbb{C}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C})$$

où

$$X_q = \coprod X_{i_0} \cap X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_q} .$$

Or, pour démontrer ce résultat sur la cohomologie, on prouve de fait qu'il existe une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$ associée à la décomposition naturelle de X

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathbb{C}_{X_0} \longrightarrow \mathbb{C}_{X_1} \longrightarrow \cdots$$

et c'est ce résultat qui, dans les termes de la méthode de Deligne, s'exprime en disant que l'espace topologique simplicial augmenté vers X

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \rightrightarrows X_0 \longrightarrow X$$

est de descente cohomologique.

Le résultat fondamental que démontre Deligne en utilisant le théorème d'Hironaka est alors le suivant: si X est une variété algébrique singulière, il existe un schéma simplicial augmenté vers X

$$\cdots \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_2 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; X_1 \rightrightarrows X_0 \longrightarrow X$$

qui est de descente cohomologique et dans lequel les variétés X_q, $q \geq 0$, sont non singulières. On obtient ainsi une résolution du faisceau $\mathbb{C}_X$, et une suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(X_p, \mathbb{C}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C}) ,$$

en analogie avec l'exemple antérieur, qui exprime la cohomologie de la variété singulière X en terme de celle des variétés non singulières X_q.

Si la suite exacte de Mayer-Vietoris peut être considérée l'origine de la méthode de la descente cohomologique simpliciale, il y a une suite exacte, aussi appelée parfois de Mayer-Vietoris, qui a motivé le séminaire qui nous occupe. Soit X une variété algébrique complexe et $f: X' \longrightarrow X$ une résolution des singularités de X, alors on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\;i\;} & X \end{array}$$

où i est une immersion fermée et f est un isomorphisme en dehors

de Y . La suite exacte de Mayer-Vietoris associée à ce diagramme est la suite exacte

$$\longrightarrow H^{i-1}(Y',\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(X',\mathbb{C}) \oplus H^i(Y,\mathbb{C}) \longrightarrow H^i(Y',\mathbb{C}) \longrightarrow .$$

Cette suite exacte exprime en quelque sorte la cohomologie de la variété X en terme de celle des variétés plus simples, car X' est non singulière et aussi bien Y que Y' sont des variétés de dimension strictement inférieure à celle de X . Dans cette situation on a encore une résolution de $\mathbb{C}_X$ dans la catégorie dérivée correspondante, et, plus précisément, que $\mathbb{C}_X$ est quasi-isomorphe au complexe simple $s(Rf_*\mathbb{C}_{X'} \oplus \mathbb{C}_Y \longrightarrow \mathbb{C}_{Y'})$. Dans la terminologie qu'on introduit dans ce travail, on exprime ce résultat en disant que le schéma cubique défini par le diagramme antérieur est de descente cohomologique.

Après avoir exposé les notions générales relatives aux schémas cubiques et à la descente cohomologique cubique, le théorème principal qu'on démontrera est le suivant: si X est une variété algébrique singulière de dimension n , il existe un schéma cubique $X_\cdot$ augmenté sur X , qui est de descente cohomologique sur X , et dans lequel les variétés X_α , sont non singulières et de dimension au plus $n-|\alpha|+1$. Ainsi on obtient une résolution cocubique du faisceau $\mathbb{C}_X$ et une suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} H^q(X_\alpha, \mathbb{C}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

comme dans la méthode simpliciale mais, de plus, dans ce cas on sait que le support du terme E_1 est fini et on a des renseignements assez précis sur ce support à cause du bornage des dimensions des X_α . Cette finitude et ce contrôle sur les dimensions qu'on obtient avec la méthode cubique ont permis de résoudre quelques questions intéressantes, notamment une conjecture de McCrory.

Une autre caractéristique intéressante de la méthode cubique est qu'elle s'adapte aussi à la cohomologie de De Rham des variétés algébriques sur un corps de catactéristique zéro, sans utiliser le principe de Lefschetz, ce qui permet de développer cette théorie en se basant sur la méthode cubique. La méthode cubique s'applique aussi pour développer une technique d'hyperrésolutions quasi-projectives d'une variété algébrique sur un corps arbitraire, en utilisant cette fois le lemme de Chow au lieu du théorème d'Hironaka, qui a des conséquences intéressantes pour la K-théorie algébrique.

Ce volume contient 6 exposés. Dans l'exposé I, on introduit les espaces topologiques cubiques et leur cohomologie. On donne les théorèmes fondamentaux de ce séminaire: le théorème d'existence d'hyperrésolutions cubiques d'un schéma sur un corps de caractéristique zéro et le théorème d'équivalence de catégories qui précise le cadre d'utilisation du théorème de résolution de singularités de ce séminaire. En particulier, on montre la propriété de la descente cohomologique pour les hyperrésolutions cubiques d'une variété algébrique complexe.

Dans l'exposé II, on utilise les hyperrésolutions cubiques pour étudier le polynôme caractéristique et la fonction zêta de la monodromie d'une fonction holomorphe sur une variété singulière, en étendant à cette situation les résultats de Landman-Grothendieck et A'Campo sur la monodromie.

Dans l'exposé III, on étudie quelques propriétés de la cohomologie de De Rham algébrique des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique nulle, sans faire appel au principe de Lefschetz. On démontre la propriété de descente cohomologique des hyperrésolutions cubiques pour la cohomologie de De Rham, ce qui permet d'utiliser les hyperrésolutions cubiques dans ce contexte. Après avoir obtenu les propriétés usuelles d'une théorie cohomologique, on obtient une nouvelle preuve, purement algébrique, d'un résultat de Bloom-Herrera, ce qui donne comme conséquence quelques variantes du théorème faible de Lefschetz.

L'exposé IV est consacré à la théorie de Hodge-Deligne. On développe cette théorie pour les variétés algébriques singulières en suivant dans toutes ses lignes la construction de Deligne, bien qu'en utilisant les hyperrésolutions cubiques de l'exposé I au lieu des hyperrésolutions simpliciales de Deligne, ce qui conduit à des suites spectrales plus économiques, comme on l'a déjà remarqué. On montre aussi que les structures de Hodge mixtes construites via les schémas cubiques coïncident avec celles construites via les schémas simpliciaux par Deligne. Ensuite, on développe la théorie de Hodge pour les germes d'espaces analytiques autour des variétés algébriques compactes. Finalement, on étudie les limites des structures de Hodge dans la situation géométrique considérée par Schmid et Steenbrink, mais en permettant que la fibre générique soit aussi singulière, ce qui correspondrait à étudier des variations de structures de Hodge mixtes dans le cadre abstrait de Griffiths. On prouve qu'il existe une structure de Hodge mixte limite sur la cohomologie de la fibre générique et par rapport à laquelle le morphisme de spécialisation est un morphisme de

structures de Hodge mixtes. Finalement, on prouve que cette structure limite a les propriétés conjecturées par Deligne à l'égard de son analogue l-adique.

Dans l'exposé V, on étudie le complexe de De Rham filtré d'une variété algébrique complexe, déjà introduit par Du Bois dans le contexte simplicial, et on utilise la théorie de Hodge mixte et les hyperrésolutions cubiques pour établir le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano dans le cadre des variétés singulières, et prouver une généralisation très naturelle dans ce contexte du théorème d'annulation de Grauert-Riemenschneider.

L'exposé VI est consacré à la K-théorie algébrique. On démontre que les hyperrésolutions quasi-projectives cubiques d'une variété algébrique définie sur un corps arbitraire vérifient la propriété de descente cohomologique pour la K-théorie algébrique. Pour ceci, on travaille dans la catégorie d'homotopie stable. On obtient alors la covariance de la K-théorie pour tout morphisme propre. Finalement, on utilise les hyperrésolutions quasi-projectives cubiques pour démontrer le théorème de Riemann-Roch pour toute variété algébrique, en éliminant donc les hypothèses projectives que ce théorème avait dans le travail de Baum, Fulton et MacPherson. Ces résultats avaient été obtenus indépendemment (et antérieurement) par Gillet et Fulton-Gillet, respectivement, avec d'autres arguments.

Références

1. P. Deligne: Théorie de Hodge II, Publ. Math. I.H.E.S., 40 (1972), 5-57; III, Publ. Math. I.H.E.S., 44 (1975), 6-77.
2. A. Grothendieck: Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. (Sem. Bourbaki, 1959/60, n°. 190), dans Fondaments de la géométrie algébrique, Paris, 1962.
3. H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., 79 (1964), 109-326.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

TABLE DES MATIERES

I. Hyperrésolutions cubiques 1

1. Préliminaires 2
2. Hyperrésolutions cubiques d'un diagramme de schémas . . . 8
3. La catégorie des hyperrésolutions cubiques 15
4. Compactifications d'un diagramme de schémas 25
5. Faisceaux sur les diagrammes d'espaces topologiques . . . 29
6. Descente cubique abélienne 36
Bibliographie 41

II. Théorèmes sur la monodromie 43

1. Le formalisme des cycles évanescents. 44
2. Le théorème de la monodromie 47
3. La fonction zêta de la monodromie. 52
Bibliographie 57

III. Descente cubique de la cohomologie de De Rham algébrique . . 59

1. Le complexe de De Rham cohomologique 60
2. Le complexe de De Rham homologique 75
3. Hypercohomologie des complexes de De Rham 81
Bibliographie 86

IV. Applications des hyperrésolutions cubiques à la théorie de Hodge 87

1. Préliminaires 88
2. Structure de Hodge mixte sur $H(X_.)$ 98
3. Structure de Hodge mixte sur $H(X)$ 106
4. Structure de Hodge mixte sur $H_c(X)$ 112
5. Structure de Hodge mixte sur $H_Y(X)$ 115
6. Structure de Hodge mixte sur $H(X^*)$ 120
7. Structure de Hodge mixte limite 123
Bibliographie 131

V. Théorèmes d'annulation 133

1. Morphisme de Gysin et le théorème faible de Lefschetz . . 134
2. Morphisme de Gysin et théorie de Hodge 135
3. Le complexe de De Rham filtré d'une variété singulière . 138
4. Un exemple: Le complexe de De Rham filtré des variétés toroïdales 143
5. Le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano . . . 149
6. Théorèmes d'annulation locaux 152
7. Autres théorèmes d'annulation 154

Bibliographie 159

VI. Descente cubique pour la K-théorie des faisceaux cohérents et l'homologie de Chow 161

1. La catégorie d'homotopie stable 162
2. Spectre simple d'un spectre cubique 166
3. Descente pour la K-théorie des faisceaux cohérents . . . 173
4. Homologie de Chow de diagrammes et descente 178
5. Le théorème de Riemann-Roch pour les schémas algébriques. 182

Bibliographie 187

Index terminologique 189

Exposé I

HYPERRESOLUTIONS CUBIQUES

par F. GUILLEN

Nous développons dans cet exposé la théorie des hyperrésolutions cubiques de V. Navarro Aznar. Cette théorie a déjà été présentée partiellement dans [7], où on a donné une application à la théorie de Hodge-Deligne qui se base essentiellement sur la construction cubique. Le lecteur pourra trouver dans [8] une introduction aux idées principales. La variante des hyperrésolutions cubiques projectives a eté introduite dans [13]. Cet exposé donne un développement plus formel et complet de la théorie citée ci-dessus.

Les théorèmes fondamentaux se trouvent dans les paragraphes 2, 3 et 6. Le théorème (2.15) prouve, à partir du résultat clef (2.6), l'existence d'hyperrésolutions cubiques d'un k-schéma S, où k est un corps de caractéristique zéro. Ce théorème, en termes simpliciaux (voir [7](2.1.6) pour la relation entre objets cubiques et objets simpliciaux), assure l'existence d'une hyperrésolution simpliciale stricte lisse $X_\cdot \longrightarrow S$ de S telle que $\dim X_n \leq \dim S-n$, pour tout n. Le théorème (3.8) établit une équivalence entre la catégorie des k-schémas et une catégorie localisée de la catégorie des hyperrésolutions cubiques des k-schémas, équivalence qui, avec des hypothèses convenables explicitées dans (3.10), permet d'étendre un foncteur cohomologique de la catégorie des k-schémas lisses à la catégorie des k-schémas arbitraires. Les hypothèses mentionnées sont vérifiées dans le théorème (6.9) pour la cohomologie singulière des varietés complexes.On trouvera dans les exposés suivants d'autres théorèmes de descente cohomologique analogues à (6.9).

Le §1 est consacré aux préliminaires catégoriques. La section A) contient des définitions relatives aux diagrammes. Dans la section B), on rappelle une construction, due à Grothendieck, qui associe un scindage à tout diagramme de catégories, et qui permet de définir le diagramme total d'un diagramme de diagrammes d'une catégorie arbitraire. Dans la section C), on introduit la notion de catégorie ordonnable, dont un cas particulier est celui des catégories cubiques, introduites dans la section D).

Dans le §5, on rappelle la définition de faisceau sur un diagramme

d'espaces topologiques et des foncteurs d'image réciproque et d'image directe associés à un morphisme de diagrammes d'espaces topologiques. La remarque (5.18) établit la relation entre les notions données ici et les notions originales de la théorie des topos, en considérant un diagramme d'espaces topologiques comme un site fibré.

Finalement, le §4 montre l'existence de compactifications d'un diagramme de schémas.

Je voudrais vivement remercier ici V. Navarro Aznar qui m'a donné l'occasion d'exposer sous une forme écrite sa théorie.

1. Préliminaires.

1.1 Dans tout l'exposé, on fixe un univers $\underline{U}$. Les notions de petitesse seront relatives à $\underline{U}$.

On dénote par $\underline{Cat}$ la catégorie (large) des petites catégories. Si C est une catégorie, C^{o} désigne la catégorie opposée à la catégorie C . Si n est un entier ≥ 0 , on dénote par $\underline{n}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Soient $F: D \longrightarrow C$ un foncteur, s un objet de C . On dénote par F/s la catégorie des objets de D au-dessus de s relativement à F , définie de la façon suivante. Les objets de F/s sont les couples (x,a) , où $x \in Ob\ D$ et $a: F(x) \longrightarrow s$ est un morphisme de C . Si (x,a) , (y,b) sont deux objets de F/s , un morphisme de (x,a) dans (y,b) est un morphisme $f: x \longrightarrow y$ de D tel que $a = b \circ F(f)$. On définit de façon analogue la catégorie $s\backslash F$ des objets de D au-dessous de s relativement à F .

A) Diagrammes.

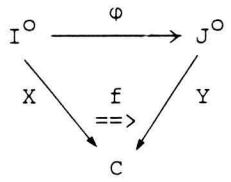
Dans les sections A) et B) suivantes, C désignera une catégorie.

1.2 Si I est une petite catégorie, on appelle 1-diagramme de C de type I , ou I-objet de C , tout foncteur de I^{o} dans C .

Soit $\varphi: I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories. Si Y est un J-objet de C , le foncteur $Y \circ \varphi$ est un I-objet de C que nous dé-noterons par $\varphi^{*}(Y)$ ou $Yx_{I}J$, selon le contexte.

Soient X et Y deux 1-diagrammes de C de types I et J respectivement. Un morphisme de 1-diagrammes de C de X dans Y est un couple formé d'un foncteur $\varphi: I \longrightarrow J$ et d'une transformation naturelle $f: X \Longrightarrow \varphi^{*}(Y)$. On dénote le dit morphisme par le

diagramme



et on dit que f est un φ-morphisme. Si φ est l'identité de I on dit simplement que f est un I-morphisme ou un morphisme de I-objets.

Si i, j sont des objets de I et u est un morphisme de I, on désignera par X_i (resp. X_u, resp. f_i) l'image de i (resp. u, resp. i) par X (resp. X, resp. f).

Si $X: I \longrightarrow C$ est un I^o-objet de C, on utilisera la notation X^i, X^u, f^i, au lieu de X_i, X_u, f_i.

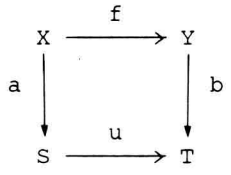
Les 1-diagrammes de C définissent une catégorie qu'on note $\underline{Diagr}_1(C)$ (voir [10], (VI.5.6.6)). Les I-objets et les I-morphismes de C définissent une sous-catégorie de $\underline{Diagr}_1(C)$, qui s'identifie a la catégorie $Hom_{\underline{Cat}}(I^o, C)$. On a un foncteur

$$typ: \underline{Diagr}_1(C) \longrightarrow \underline{Cat}$$

défini par typ(X) = I pour tout I-objet X de C, et typ(f) = φ pour tout φ-morphisme f de 1-diagrammes de C.

1.3 Soient S un objet de C, I une petite catégorie. Nous appellerons I-objet de C augmenté vers S tout I-objet X^+ de C/S, que nous identifierons à un I-objet X de C muni d'un morphisme $a: X \longrightarrow S$ de 1-diagrammes de C tel que typ(a) soit le foncteur canonique $I \longrightarrow \underline{1}$.

Soient $\varphi: I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories, $u: S \longrightarrow T$ un morphisme d'objets de C. Si $a: X \longrightarrow S$, resp. $b: Y \longrightarrow T$, est un I-objet, resp. J-objet, de C augmenté vers S, resp. T, nous appellerons φ-morphisme augmenté au-dessus de u tout φ-morphisme $f: X \longrightarrow Y$ tel que le diagramme



soit commutatif.

Les diagrammes augmentés de C et les morphismes d'augmentations définis ci-dessus forment une catégorie que nous noterons $\underline{Diagr}_1^+(C)$.

On a des foncteurs

$$C \xleftarrow{\pi_0} \underline{Diagr}_1^+(C) \xrightarrow{\pi_1} \underline{Diagr}_1(C)$$

définis par $\pi_0(X \longrightarrow S) = S$ et $\pi_1(X \longrightarrow S) = X$.

B) Diagramme total d'un 2-diagramme.

Cette section ne sera utilisée que jusqu'au §3.

1.4 On appelle catégorie des 2-diagrammes de C et on note $\underline{Diagr}_2(C)$ la catégorie $\underline{Diagr}_1(\underline{Diagr}_1(C))$ (voir [10]).

On a un foncteur

$$typ_1 : \underline{Diagr}_2(C) \longrightarrow \underline{Diagr}_1(\underline{Cat})$$

défini par $typ_1(X) = typ \circ X$, pour tout 2-diagramme X de C .

1.5 Soient I une petite catégorie, K un I-objet de $\underline{Cat}$. Dans [4] on associe à K une nouvelle catégorie, que nous noterons $tot(K)$ et appellerons catégorie totale du foncteur K , de la façon suivante: les objets de $tot(K)$ sont les couples (i,x) tels que $i \in Ob\ I$ et $x \in Ob\ K_i$, et les morphismes $(i,x) \longrightarrow (j,y)$ sont les couples (u,a) formés par un morphisme $u: i \longrightarrow j$ de I et par un morphisme $a: x \longrightarrow K_u(y)$ de K_i . La composition $(w,c) = (v,b) \circ (u,a)$ de deux morphismes $(u,a): (i,x) \longrightarrow (j,y)$ et $(v,b): (j,y) \longrightarrow (k,z)$ de $tot(K)$ est définie par $(w,c) = (v \circ u, K_u(b) \circ a)$.

Si $f: K \longrightarrow L$ est un morphisme de 1-diagrammes de $\underline{Cat}$ tel que $typ(f) = \varphi$, f définit alors un foncteur

$$tot(f): tot(K) \longrightarrow tot(L)$$

par $tot(f)(i,x) = (\varphi(i), f_i(x))$, si $(i,x) \in Ob\ tot(K)$, et par $tot(f)(u,a) = (\varphi(u), f_i(a))$, si $(u,a): (i,x) \longrightarrow (j,y)$ est un morphisme de $tot(K)$.

Il est aisé de voir qu'avec ces définitions

$$tot: \underline{Diagr}_1(\underline{Cat}) \longrightarrow \underline{Cat}$$

est un foncteur.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com