Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1438

P. G. Lemarié (Ed.)

Les Ondelettes en 1989

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1438

P.G. Lemarié (Ed.)

Les Ondelettes en 1989

Séminaire d'Analyse Harmonique,
Université de Paris-Sud, Orsay

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London
Paris Tokyo Hong Kong Barcelona

Editeur

Pierre Gilles Lemarié
Université Paris XI, Bât. 425
Campus d'Orsay
91405 Orsay Cedex, France

Mathematics Subject Classification (1980): 42C

ISBN 3-540-52932-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-52932-2 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper

LES ONDELETTES EN 1989

La théorie des ondelettes est un sujet récent et extrêmement mouvant. Peu de textes encore sont parus sur le sujet et leur disparité est importante. C'est pourquoi il a paru intéressant aux organisateurs du Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay de tenter de dresser un bilan de l'état actuel de la théorie et de le publier rapidement.

Neuf conférences ont eu lieu entre janvier et mars 1989 suivant trois axes : théorie mathématique des ondelettes (exposés 1 à 3), applications des ondelettes (exposés 4 à 6 : théorie des opérateurs, vision par ordinateur, traitement du signal) et analyse des fractals par les ondelettes (exposés 7 à 9). L'ensemble de ces conférences n'aurait pu avoir lieu sans le soutien chaleureux de Jean-Pierre Kahane, les conseils de Yves Meyer et, bien évidemment, la gentillesse des orateurs (et auteurs). Qu'ils en soient ici tous remerciés, ainsi que Mme J. Dumas qui a assuré avec son efficacité proverbiale la frappe de ce séminaire.

Pierre Gilles Lemarié
28 novembre 1989

Table des matières

INTRODUCTION A LA THEORIE DES ONDELETTES

Pierre Gilles Lemarié

La transformation en ondelettes a été introduite par J. Morlet et A. Grosmann [GRO-MOR 84] comme un moyen efficace de réaliser une analyse temps-fréquence et comme un outil pour la détection des singularités.

En nous appuyant sur les travaux d'I. Daubechies [DAU], nous allons rappeler quelques principes de l'analyse temps-fréquence (principe d'incertitude, fenêtres de Fourier, fonctions de Gabor) avant d'introduire la décomposition en ondelettes de J. Morlet. Enfin nous esquisserons la théorie des bases orthonormales d'ondelettes (que nous développerons de manière plus extensive dans l'exposé n° 3).

Une étude plus approfondie des analyses temps-fréquence sera présentée par P. Flandrin dans l'exposé n° 6 : *Quelques méthodes temps-fréquence et temps-échelle en traitement du signal.*

1. Les fenêtres de Fourier

Rappelons que *l'analyse de Fourier* d'une fonction f de la variable réelle t (le "temps") se fait à l'aide des fonctions analysantes $e_\xi(t) = e^{i\xi t}$ selon le schéma suivant :

(1.a) *analyse* $\hat{f}(\xi) = < f \mid e_\xi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$

(1.b) *synthèse* $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e_\xi(t) d\xi.$

Il est facile de vérifier que (1b) est équivalent à :

(1.c) *formule de Plancherel* $\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(\xi) \mid^2 d\xi$

lorsque $f \in L^2$.

La variable ξ est appelée la "fréquence". La taille de $\hat{f}$ à l'infini est liée à la régularité de f, comme on peut s'en convaincre d'après la formule de $\hat{f}'(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ et donc $f^{(k)} \in L^2 \Longleftrightarrow \xi^k\hat{f} \in L^2$. Or dans la formule (1.b) les termes $\hat{f}(\xi)e_\xi(t)$ sont tous de même amplitude lorsque t varie de sorte que si f est irrégulière *en un seul point* t_0 alors les termes $\hat{f}(\xi)e_\xi(t)$ seront d'amplitude importante *pour tout* t et l'intégrale (1.b) sera une intégrale oscillante, rendant instable la reconstruction de f.

Prenons l'exemple d'une fonction f_0 à support compact, C^1 par morceaux avec une seule discontinuité (du premier ordre) en un point t_0. Alors il est facile d'établir que :

$$(2) \qquad \hat{f}_0(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\sim} \frac{1}{i\xi}\left(f(t_0+0) - f(t_0-0)\right)e^{-it_0\xi}$$

et l'on voit bien le caractère divergent de l'intégrale (1.b).

Puisque les termes haute fréquence ($|\ \xi\ |$ grand) proviennent des irrégularités de f, une idée développée depuis au moins quarante ans consiste à faire une analyse de Fourier locale de f à l'aide d'une fenêtre $g(\theta - t) = g_t(\theta)$ que l'on fait glisser le long de l'axe réel en faisant varier t. On remplace l'analyse de $f(\theta)$ par celle de $f(\theta)g(\theta - t)$ qui donne un renseignement sur le comportement de f au voisinage de t. Si f est régulière au voisinage de t, $f(\theta)g(\theta - t)$ ne comportera pas de termes haute fréquence et sa reconstruction à partir de son analyse de Fourier sera rapide. L'analyse de Fourier de $f(\theta)g(\theta - f)$ se fait à l'aide des coefficients $C(t,\xi)$:

$$(3.a) \qquad C(t,\xi) = \int f(\theta)g(\theta - t)e^{-i\theta\xi}d\theta\ ;$$

or par la formule de Plancherel (1.c), en considérant $C(t,\xi)$ comme le produit scalaire de f avec $\bar{g}(\theta - t)e^{i\theta\xi}$, on obtient :

$$(3.b) \qquad C(t,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi - \eta)e^{it(\eta-\xi)}d\eta$$

de sorte que si $g(\theta)$ est concentrée autour de $\theta = 0$ et $\hat{g}(\eta)$ autour de $\eta = 0$, $C(t,\xi)$ donne un renseignement en moyenne du comportement de f autour de $\theta = t$ (formule (3.a)) et de $\hat{f}$ autour de $\eta = \xi$ (formule (3.b)).

$C(t,\xi)$ donnant simultanément un renseignement d'ordre temporel (autour de t) et d'ordre fréquentiel (autour de ξ), on dit qu'on a une *analyse temps-fréquence* de f. La précision de cette analyse dépend de l'étalement de $g(\theta)$ autour de sa valeur moyenne (formule (3.a)) et de celui de $\hat{g}(\eta)$ autour de sa valeur moyenne (formule (3.b)). Or nous allons voir que cette précision est limitée (*principe d'incertitude de Heisenberg*). Pour exprimer cette limitation, on mesure l'étalement de g et de $\hat{g}$ à l'aide des écarts-types de θ et de η par rapport aux densités $|\ g(\theta)\ |^2\ d\theta$ et $|\ \hat{g}(\eta)\ |^2\ d\eta$:

$$(4.a) \quad \textit{valeurs moyennes} : \bar{\theta} = \frac{\int \theta\ |\ g(\theta)\ |^2\ d\theta}{\int |\ g(\theta)\ |^2\ d\theta}\ ;\quad \bar{\eta} = \frac{\int \eta\ |\ \hat{g}(\eta)\ |^2\ d\eta}{\int |\ \hat{g}(\eta)\ |^2\ d\eta}\ ;$$

(4.b) *écarts-types :*

$$\sigma_\theta = \left(\frac{\int (\theta - \bar{\theta})^2 \mid g(\theta) \mid^2 d\theta}{\int \mid g(\theta) \mid^2 d\theta} \right)^{1/2} \quad ; \quad \sigma_\eta = \left(\frac{\int (\eta - \bar{\eta})^2 \mid \hat{g}(\eta) \mid^2 d\eta}{\int \mid \hat{g}(\eta) \mid^2 d\eta} \right)^{1/2}.$$

On a alors l'inégalité suivante :

(5) *incertitude de Heisenberg :* $\dfrac{1}{2} \leq \sigma_\theta \sigma_\eta$.

On appelle $\sigma_\theta\sigma_\eta$ l'incertitude jointe en (θ, η) ; c'est la mesure de l'imprécision (inévitable) de la localisation temps-fréquence de g. Le minimum $\left(\frac{1}{2}\right)$ de l'incertitude jointe est atteint pour les gaussiennes $e^{-\lambda x^2}$, qui sont donc fréquemment utilisées en analyse temps-fréquence.

Lorsque $\bar{\theta} = \bar{\eta} = 0$ (ce qu'on peut toujours réaliser, quitte à changer $g(\theta)$ en $g(\theta + \bar{\theta})e^{-i\theta\bar{\eta}}$), l'inégalité (5) se ramène à :

(5 *bis*)
$$\| g \|_2^2 \leq 2 \| \theta g \|_2 \| g' \|_2$$

et l'on voit que la *double localisation* de g en temps et fréquence ($\sigma_\theta < +\infty, \sigma_\eta < +\infty$) peut également s'interpréter en *localisation* et *régularité* temporelles ($\theta g(\theta) \in L^2$, $g'(\theta) \in L^2$).

Considérons donc une fonction $g \in L^2$, localisée ($\sigma_\theta < +\infty$, $\sigma_\eta < +\infty$). On dispose alors d'une analyse temps-fréquence à l'aide des fonctions analysantes $g_{t,\xi}(\theta) = g(\theta - t)e^{i\theta\xi}$ selon le schéma suivant :

(6.a) *analyse* $C(t, \xi) = < f \mid g_{t,\xi} > = \displaystyle\int f(\theta)\bar{g}(\theta - t)e^{-i\theta\xi} d\theta$;

(6.b) *synthèse* $f(\theta) = \dfrac{1}{2\pi \| g \|_2^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(t, \xi) g_{t,\xi}(\theta) dt d\xi$,

la formule (6.b) étant équivalente à :

(6.c) *formule de Plancherel* $\| f \|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi \| g \|_2^2} \displaystyle\int\int \mid C(t, \xi) \mid^2 dt d\xi$.

Si $\bar{\theta} = \bar{\eta} = 0$, $C(t, \xi)$ donne une information moyenne sur f autour de $\theta = t$, $\eta = \xi$ avec une résolution σ_θ en θ et σ_η en η. [La démonstration de la formule (6.c) est élémentaire. On pose $\Gamma_\xi(\theta) = \bar{g}(-\theta)e^{i\theta\xi}$ alors $C(t, \xi) = (f * \Gamma_\xi(t))\, e^{-it\xi}$ et donc $\int \mid C(t, \xi) \mid^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int \mid \hat{f}(\eta) \mid^2 \mid \hat{g}(\eta - \xi) \mid^2 d\eta$ d'où (6.c)].

Dans le formalisme des *fenêtres de Fourier*, on traite en fait avec des versions discrétisées de (6.a) et (6.b). On échantillonne de manière uniforme l'espace des temps et celui des fréquences, et on analyse f à l'aide des $C_{n,m} = < f \mid g_{nt_0, m\xi_0} >$

$(n \in Z \ , \ m \in Z)$. Pour décrire la qualité de l'analyse obtenue, plaçons-nous momentanément dans un cadre un peu plus général.

On se donne un espace de Hilbert H et une famille de vecteurs $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$. On cherche à analyser les vecteurs f de H à l'aide des moments $< f \mid e_\alpha >$. On peut alors exiger les propriétés suivantes de cette analyse (les exigences seront croissantes) :

(7.a) *injectivité* $f \longrightarrow (< f \mid e_\alpha >)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est injective.

Cela revient à dire que les combinaisons linéaires des e_α sont denses dans H. Il va de soi que cette exigence est minimale pour pouvoir distinguer les éléments de H.

(7.b) *reconstructibilité* : $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} < f \mid e_\alpha > h_\alpha$ avec les conditions de *stabilité* suivantes:

(*i*)
$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |< f \mid e_\alpha >|^2 \leq A \parallel f \parallel_2^2 \ ;$$

(*ii*)
$$\parallel \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha h_\alpha \parallel^2 \leq B \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mid \lambda_\alpha \mid^2$$

où A et B sont deux constantes > 0. Les h_α ne sont pas uniquement déterminés (a priori). Une formulation intrinsèque équivalente à (7.b), (i) et (ii) est que les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ forment un *frame*, c'est-à-dire que l'on ait :

(*iii*)
$$\frac{1}{B} \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |< f \mid e_\alpha >|^2 \leq A \parallel f \parallel^2 .$$

On a alors un *algorithme* de reconstruction de f par les formules suivantes :

(*iv*)
$$\bar{f} = \frac{2B}{AB+1} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} < f \mid e_\alpha > e_\alpha$$

(*v*)
$$\parallel f - \bar{f} \parallel \leq \frac{AB-1}{AB+1} \parallel f \parallel .$$

Comme $\frac{AB-1}{AB+1} < 1$, on peut itérer (iv) et reconstruire f.

(7.c) *formule de Plancherel* $\parallel f \parallel^2 = B \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |< f \mid e_\alpha >|^2$

ou de manière équivalente $f = B \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} < f \mid e_\alpha > e_\alpha$

(7.d) *Orthonormalité* : la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est une base orthonormale de H. Remarquons que dans (7.c) la famille $\sqrt{B}e_\alpha$ n'est une base orthonormée de H que si et seulement si $\forall\alpha \quad \| e_\alpha \| = \frac{1}{\sqrt{B}}$: en effet $(1 - B \| e_\alpha \|^2)e_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} < e_\alpha \mid e_\beta > e_\beta$ et

$$(1 - B \| e_\alpha \|^2) \| e_\alpha \|^2 = \sum_{\beta=\alpha} |< e_\alpha \mid e_\beta >|^2 .$$

Revenons aux fenêtres de Fourier. Les résultats décrits par I. Daubechies dans [DAU] sont les suivants :

• $f \mapsto (C(nt_0, m\xi_0))_{n,m\in Z}$ n'est jamais injective dans L^2 pour $t_0\xi_0 > 2\pi$. Les fonctions élémentaires de Gabor [GAB 46]

$$(8) \qquad g_{n,m}(\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{D}\right)^{1/2} exp\left(-\pi\left(\frac{\theta - nD}{D}\right)^2\right) exp\left(2i\pi m\frac{\theta}{D}\right)$$

avec $t_0 = D$, $\xi_0 = \frac{2\pi}{D}$ correspondent donc au cas critique. La transformation

$f \to (< f \mid g_{n,m} >)_{n,m\in Z}$ est alors injective (pour ce choix particulier de $g_{n,m}$).

• Si $t_0\xi_0 = 2\pi$ et si les $g_{nt_0,m\xi_0}$ forment un frame dans L^2, alors σ_θ ou $\sigma_\eta = +\infty$ (*Principe d'incertitude fort* de Balian [BAL 81]). En particulier les fonctions de Gabor ci-dessus ne forment pas un frame ; il y a instabilité, qui provient du fait que le système bi-orthogonal aux fonctions de Gabor (calculé par Bastiaans dans [BAS 81]) est composé de fonctions qui ne sont pas dans L^2. Le principe d'incertitude fort est illustré dans le point ci-dessous.

• Si on a la formule de Plancherel $\| f \|_2^2 = B \sum_{n,m} |< f \mid g_{nt_0,m\xi_0} >|^2$ alors $\| g \|_2^2 \, B = \frac{t_0\xi_0}{2\pi} \leq 1$. On a alors le choix entre $t_0\xi_0 < 2\pi$ et il y a *redondance* ou $t_0\xi_0 = 2\pi$ et il y a *délocalisation* des fonctions analysantes (d'après le principe d'incertitude fort).

Ce balancement entre la redondance d'une part et la délocalisation ou l'instabilité d'autre part disparaîtra dans la transformation en ondelettes de J. Morlet, où l'on verra qu'il existe dans cette nouvelle analyse temps-fréquence des bases orthonormées composées de fonctions fortement localisées en temps et en fréquence.

2. Les ondelettes de J. Morlet

Les ondelettes de J. Morlet se déduisent par dilatation et translation d'une seule fonction g :

$$(9.a) \qquad g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0 \ , \ b \in \mathcal{R}$$

et l'analyse par ondelettes se fait à l'aide des coefficients :

$$C(a,b) = < f \mid g_{a,b} > . \tag{9.b}$$

Le terme d'*ondelettes* est un raccourci d'*ondelettes de forme constante*. En effet le mot d'ondelette était employé depuis longtemps pour désigner une *petite onde* par opposition aux ondes pures indéfiniment entretenues, c'est-à-dire une onde (une fonction localisée en fréquence autour d'une valeur centrale $\bar{\xi}$) limitée dans le temps (localisée en temps autour d'une valeur centrale $\bar{t}$). Les ondelettes utilisées dans l'analyse par fenêtres de Fourier $g(\theta - t)e^{i\xi\theta}$ ne sont pas de formes constantes : elles ont la même enveloppe $g(\theta)$ mais leur aspect varie lorsque ξ varie. Dans la formule (9.a) au contraire, les graphes des fonctions $g_{a,b}$ se déduisent les uns des autres par similitude.

L'analyse par ondelettes est une analyse temps-fréquence comme le montre la formule de Plancherel :

$$C(a,b) = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \sqrt{a} \hat{g}^*(a\xi) e^{ib\xi} d\xi. \tag{10}$$

On suppose f et g à valeurs réelles, $\hat{g}$ plate en 0. Alors $\hat{f}(-\xi) = \hat{f}^*(\xi)$, $\hat{g}(-\xi) = \hat{g}^*(\xi)$(*) de sorte que l'information sur $\hat{f}$ et sur $\hat{g}$ est entièrement contenue sur $[0, +\infty]$, $\hat{g}$ y est concentrée autour d'une valeur centrale $\bar{\xi} = \frac{\int_0^\infty \xi |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi}{\int_0^\infty |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi}$. Le coefficient $C(a,b)$ donne donc une information sur le comportement de f au voisinage de $t = b$ (si g est concentrée autour de 0) avec une résolution de l'ordre de $a\sigma_t$ et sur celui de $\hat{f}$ au voisinage de $\mid \xi \mid = \frac{\bar{\xi}}{a}$ avec une résolution en $\frac{1}{a}\sigma_\xi$, en particulier l'incertitude jointe $a\sigma_t . \frac{1}{a}\sigma_\xi$ reste constante.

On suppose donc g à valeurs réelles et on introduit la condition d'admissibilité suivante :

$$C_g = \int_0^\infty \mid \hat{g}(\xi) \mid^2 \frac{d\xi}{\xi} < +\infty. \tag{11}$$

Alors l'analyse par ondelettes se fait à l'aide des ondelettes analysantes $g_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right)$ $(a > 0,\ b \in \mathcal{R})$ selon le schéma suivant :

(12.a) *analyse* $C(a,b) = < f \mid g_{a,b} > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$

(12.b) *synthèse* $f(t) = \frac{1}{C_g} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(a,b) g_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db$

(*) où f^* désigne pour raisons typographiques le conjugué complexe de f, noté également $\bar{f}$)

la formule (12.b) étant équivalente à :

(12.c) *formule de Plancherel* $\| f \|_2^2 = \frac{1}{C_g} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | C(a,b) |^2 \frac{da}{a^2} db.$

[Comme (6.c), (12.c) est une formule élémentaire. On pose $\Gamma(x) = \bar{g}(-x)$ et $\Gamma_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{x}{a}\right)$ alors $C(a,b) = f * \Gamma_a(b)$ et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | C(a,b) |^2 \, db = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} | \hat{f}(\xi) |^2 \, a \, | \hat{g}(a\xi) |^2 \, d\xi].$$

Les formules (12) sont valables pour $f \in L^2$ à valeurs complexes. Lorsque f est à valeurs réelles, l'information fréquentielle sur f est entièrement donnée par $\hat{f}(\xi)$ sur $\xi \geq 0$ et on peut donc remplacer g par l'ondelette complexe $\gamma = g + iG$ où G est la transformée de Hilbert de g :

(13.a) $$G = \frac{1}{\pi} \; V.\,P. \; \frac{1}{x} * g$$

(13.b) $$\hat{\gamma}(\xi) = 0 \quad si \quad \xi < 0 \quad , \quad 2\hat{g}(\xi) \quad si \quad \xi > 0.$$

On a alors, en posant $\gamma_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \gamma\left(\frac{t-b}{a}\right)$, le schéma d'analyse suivant pour f à valeurs réelles:

(14.a) *analyse* $\tilde{C}(a,b) = \langle f \mid \gamma_{a,b} \rangle = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\gamma}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$

(14.b) *synthèse* $f(t) = \frac{1}{2C_g} \mathcal{R}e \left\{ \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(a,b) \gamma_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \right\}$

(14.c) *formule de Plancherel* $\| f \|_2^2 = \frac{1}{2C_g} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | \tilde{C}(a,b) |^2 \frac{da}{a^2} db.$

On représente alors l'information complexe $\tilde{C}(a,b)$ à l'aide de deux diagrammes dans le demi-plan temps-fréquence ($b \in \mathcal{R}$, $a > 0$ où a correspond à la fréquence $\xi = \frac{1}{a}$) : le diagramme des modules $| \tilde{C}(a,b) |$ et celui des phases $Arg\,\tilde{C}(a,b)$. (Plus précisément on représente les lignes de niveau de $| \tilde{C}(a,b) |$ et les lignes isophases pour $Arg\,\tilde{C}(a,b)$). A cause de la formule de Plancherel (14.c), le diagramme des modules donne un renseignement quantitatif : comment se répartit l'énergie du signal $f(t)$ (mesurée par $\| f \|_2^2$) dans le demi-plan temps-fréquence. Les lignes isophases donnent un renseignement d'ordre qualitatif : elles convergent vers les singularités de f. On trouve de belles illustrations de ces diagrammes modules et phases dans l'article de *Pour la Science* [JAF-MEY-RIO 87].

Pour illustrer la convergence des lignes isophases, reprenons notre exemple de la fonction f_0 avec une discontinuité du premier ordre en t_0. Supposons que $\hat{g}$ soit suffisamment plate en 0:

$$\int_0^{\infty} \mid \hat{g}(\xi) \mid^2 \frac{d\xi}{\xi^2} < +\infty \tag{15}$$

(ce qui découle de la condition d'admissibilité (11) dès que $\hat{g}$ est C^1, c'est-à-dire dès que g décroît suffisamment vite à l'infini). Alors g est la dérivée d'une fonction $\omega \in L^2$ et pareillement G est la dérivée de $\Omega \in L^2$. On pose $h = \omega + i\Omega$, $h_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right)$. La dérivée de f_0 s'écrit $f_0^{'} = A\,\delta(t{-}_0) + \varphi(t)$ où $\varphi \in L^2$ et où A est le saut de f_0 en t_0 $A = f_0(t_0 + 0) - f_0(t_0 - 0)$. Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(a,b) = a < f \mid (h_{a,b})' > &= -\sqrt{a} A\, h\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) - a < \varphi \mid h_{a,b} > \\ &= -\sqrt{a} A\, h\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) + O(a) \end{aligned} \tag{16}$$

puisque $|< \varphi \mid h_{a,b} >| \leq \| \varphi \|_2 \| h \|_2$. Quand a tend vers 0, le terme prépondérant est le premier et les lignes isophases de $\tilde{C}(a,b)$ tendent vers t_0 (la ligne $Arg\, \tilde{C}(a,b) = Arg\, h(u)$ se comportant comme la droite $b = t_0 - au$).

On peut de même décoder des singularités dans des dérivées d'ordre supérieur à condition de pouvoir faire plusieurs intégrations par parties, et donc que $\hat{g}$ soit plus plate en 0.

La formule (16) montre que la transformation en ondelettes est bien adaptée à la *détection des singularités*. La partie analyse (14.a) de la transformation permet de pointer les singularités, tandis que dans la partie synthèse (14.b) la reconstruction du signal $f(t)$ n'est affectée par la présence de hautes fréquences qu'au voisinage des singularités de f. Plus précisément à l'échelle a (la fréquence $\frac{1}{a}$) la singularité ne produit son effet que sur un voisinage de cette singularité de taille $a\sigma_t$.

Le fait que la transformation en ondelettes travaille à toutes les échelles en même temps permet évidemment une bonne résolution dans l'analyse des singularités. Alors que dans la méthode des fenêtres de Fourier la résolution est fixée une fois pour toutes à σ_t, dans la transformation en ondelettes on peut adapter la résolution à l'échelle du phénomène que l'on cherche à isoler. Cela se relève particulièrement utile lorsqu'il y a des phénomènes à échelles très précises mais non fixées a priori ou lorsque coexistent plusieurs échelles significatives dans l'approche d'un phénomène (en vision par exemple). Des exemples d'applications en physique des algorithmes d'ondelettes seront développés par A. Arneodo dans l'exposé n° 9 : *Transformation en ondelettes des objets fractals: phénomènes à croissance fractale et turbulence pleinement développée.* Le cas de la vision sera traité par J. M. Morel dans l'exposé n° 5 : *Traitement d'images et analyse multi-échelles.*

Le problème de la discrétisation des formules (12) a été traité par I. Daubechies dans [DAU]. On discrétise l'axe des échelles par un échantillonnage *logarithmiquement uniforme* a_0^m, $m \in Z$, $a_0 > 1$ fixé, (le poids de $[a_0^m\ ,\ a_0^{m+1}]$ par rapport à la mesure invariante par dilatation $\frac{da}{a}$ est constant et égal à $log\, a_0$) et l'axe du temps est échantillonné avec un pas adapté à l'échelle a_0^m (puisque les fonctions $g_{a_0^m,b}$ ont une résolution en t de l'ordre de $a_0^m\sigma_t$) : on cherche donc à quelles conditions la famille $g_{a_0^m,na_0^m b_0}$($b_0 > 0$, $a_0 > 1$ fixés, $n \in Z$, m$\in Z$) forme un frame.

I. Daubechies démontre alors le résultat suivant. Sous les hypothèses :

$$(17.a) \qquad 0 < A \leq \sum_{m\in Z} \mid \hat{g}(a_0^m\xi) \mid^2 \leq B < +\infty$$

$$(17.b) \qquad \exists\gamma > 1 \quad \sum_{m\in Z} \mid \hat{g}(a_0^m\xi) \mid\mid \hat{g}(a_0^m\xi + s) \mid \leq C(1+s^2)^{-\gamma/2}$$

où A, B, C sont des constantes indépendantes de ξ et de s, il existe $B_0 > 0$ tel que pour tout $b_0 < B_0$ la famille $g_{a_0^m,na_0^m b_0}$ forme un frame dans L^2.

La condition (17.a) est nécessaire. On peut s'en rendre rapidement compte en semi-discrétisant (12.c) :

$$(17.a) \iff A \parallel f \parallel_2^2 \leq \sum_{m\in Z} \int \mid C(a_0^m, b) \mid^2 db \leq B \parallel f \parallel_2^2 .$$

Si $\hat{g}$ est continue (ce qui est le cas dès que $\sigma_t < +\infty$) la minoration $\inf\limits_{\xi} \sum_m \mid a_0^m\xi \mid^2 > 0$ est réalisée dès que a_0 est assez petit. La majoration $\sup\limits_{\xi} \sum_m \mid a_0^m\xi \mid < +\infty$ indique que $\hat{g}$ est plate à l'origine et à l'infini ; elle est automatique (quel que soit a_0) dès que $\hat{g}$ est $O(\mid \xi \mid^\beta)$ pour un $\beta > 0$ et $O(\mid \xi \mid^{-\alpha})$ pour un $\alpha > 0$. La majoration (17.b) demande plus de décroissance à l'infini ($\hat{g}$ doit être $O(\mid \xi \mid^{-\alpha})$ avec $\alpha > 1$).

Le problème de la discrétisation par des frames des formules (12) est donc résolu (avec également dans [DAU] un procédé de calcul de B_0). Quant à celui des bases orthonormées, il fait l'objet de la partie suivante et de l'exposé n° 3 : *Analyse multi-échelles et ondelettes à support compact.*

3. Bases orthonormées d'ondelettes

Il n'y a pas de phénomène d'incertitude forte en théorie des ondelettes. Y. Meyer a construit en 1985 ([LEM-MEY 86], [MEY 86]) une fonction ψ dans la classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées telle que les fonctions $2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, $j \in \mathcal{Z}$, $k \in \mathcal{Z}$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathcal{R})$.

Une telle base est adaptée à l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund puisque ceux-ci sont définis en terme d'estimations de taille et de régularité de leur noyau-distribution invariantes par dilatation et translation. En particulier une telle base est une base inconditionnelle de L^p $1 < p < +\infty$, de l'espace de Hardy H^1, de BMO, des espaces de Sobolev H^s $s \in \mathcal{R}$ et des espaces de Besov $B^s_{p,q}$, $s \in \mathcal{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. ([MEY 86]).

La base d'Yves Meyer a été suivie de bases construites à partir de fonctions ψ moins régulières mais mieux localisées temporellement (fonctions à décroissance exponentielle [BAT 87], [LEM 88], fonctions à support compact [DAU 88]). Elle a été également précédée, comme Yves Meyer s'en est aperçu cet été, par une base de fonctions splines de régularité finie (mais arbitraire) et à localisation exponentielle, construite par Strömberg en 1981 [STR 81].

Dans la terminologie d'Yves Meyer, la fonction ψ est la *mère* des ondelettes $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$. Nous allons voir que les ondelettes ont aussi un *père*. Pour cela on considère l'espace W_j, sous-espace fermé de L^2 engendré par les ondelettes d'échelle $\frac{1}{2^j}$:

$$W_j = Vect(\psi_{j,k} / k \in \mathcal{Z}) \tag{18.a}$$

de sorte que $L^2(\mathcal{R}) = \bigoplus_{j \in \mathcal{Z}} W_j$. On considère alors les sommes partielles sur les basses fréquences :

$$V_j = \bigoplus_{\ell < j} W_\ell. \tag{18.b}$$

Les espaces V_j vérifient alors les propriétés suivantes :

$$V_j \subset V_{j+1} \tag{19.a}$$

$$\bigcap_{j \in \mathcal{Z}} V_j = \{0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in \mathcal{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2. \tag{19.b}$$

$$f \in V_j \Longleftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \tag{19.c}$$

$$f \in V_0 \Longleftrightarrow f(t-k) \in V_0. \tag{19.d}$$

[(19.d) vient de ce que $V_0^{\perp} = \bigoplus_{j \geq 0} W_j$ et que chaque W_j, $j \geq 0$, est invariant par translation entière].

Dans tous les exemples cités précédemment, V_0 vérifie une condition supplémentaire (qui n'est pas - contrairement aux conditions (19.a) à (19.d) - une conséquence du fait que les ψ_{jk} forment une base orthonormée de $L^2(\mathcal{R})$) :

(19.e) V_0 admet une base orthonormée de la forme $\varphi(t-k)$, $k \in \mathcal{Z}$.

On dit alors qu'on dispose d'une *analyse multi-échelles* et la fonction φ est le *père* des ondelettes.

En effet à partir des espaces V_j vérifiant les conditions (19.a) à (19.e) on peut facilement reconstruire une base d'ondelettes de $L^2(\mathcal{R})$. On pose W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} de sorte que $L^2 = \bigoplus_{j \in \mathcal{Z}} W_j$. Alors $f \in W_j \Longleftrightarrow f\left(\frac{t}{2^j}\right) \in W_0$ et pour trouver une base d'ondelettes de $L^2(\mathcal{R})$ $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ il suffit de trouver une base orthonormée $\psi(t-k)$ de W_0. Or, puisque $\varphi(t) \in V_0 \subset V_{-1}$, on a :

(20.a)
$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} a_k \varphi(2t-k)$$

et on vérifie facilement que la fonction

(20.b)
$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} (-1)^k a_{k+1} \varphi(2t+k)$$

est avec ses translatées $\psi(t-k)$, $k \in \mathcal{Z}$, une base orthonormée de W_0.

La fonction φ a été introduite initialement, à l'instar du système de Haar, pour passer à $L^2(\mathcal{R}^d)$. En effet, on a alors une base orthonormée de $L^2(\mathcal{R}^d)$

(21)
$$\psi_{j,k,\epsilon}(t) = 2^{j\,d/2}\psi^{(\epsilon_1)}2^j t_1 - k_1)\ldots\psi^{(\epsilon_d)}(2^j t_d - k_d)$$

où $\psi^{(0)} = \varphi$, $\psi^{(1)} = \psi$, $j \in \mathcal{Z}$, $k \in \mathcal{Z}^d$, $\epsilon \in \{0,1\}^d$, $\epsilon \neq (0,\ldots,0)$.

En dimension 2, cela revient à approcher $L^2(\mathcal{R}^2)$ par les produits tensoriels $V_j \otimes V_j$ et à écrire :

(22.a)
$$V_{j+1} \otimes V_{j+1} = V_j \otimes V_j \oplus V_j \otimes W_j \oplus W_j \otimes V_j \oplus W_j \otimes W_j$$

(22.b)
$$L^2(\mathcal{R}^2) = \bigoplus_{j \in \mathcal{Z}} (V_j \otimes W_j \oplus W_j \otimes V_j \oplus W_j \otimes W_j).$$

Mais la fonction φ a pris un rôle primordial dans la théorie des ondelettes, puisqu'elle engendre l'analyse multi-échelles V_j et est donc le *père* des ondelettes.

Une simplification supplémentaire a été introduite par Stéphane Mallat durant l'automne 1986 [MAL 87]. De la formule (20.a) on tire $\hat{\varphi}(\xi) = m\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ où $m(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in Z} a_k e^{-ik\xi}$ est une fonction 2π−périodique, d'où :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m\left(\frac{\xi}{2^j}\right). \tag{23}$$

On est alors ramené à l'étude de la fonction 2π−périodique m et des conditions à lui imposer pour qu'elle engendre une analyse multi-échelles. Les détails seront donnés dans l'exposé n° 3. Signalons que c'est grâce à l'introduction de cette fonction m qu'Ingrid Daubechies a pu construire des ondelettes à support compact.

Une dernière remarque est que cette fonction m est à l'origine des algorithmes de S. Mallat de transformation en ondelettes rapide, comme nous le verrons dans l'exposé n° 3.

Références

[BAL 81] **R. Balian** Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique. *C. R. Acad. Sc. Paris 292, série 2 (1981).*

[BAS 80] **M. J. Bastiaans** Gabor's signal expansion and degrees of freedom of a signal. *Proc. IEEE 68 (1980), 538-539.*

[BAT 87] **G. Battle** A block spin construction of ondelettes. Part I : Lemarié functions. *Comm. Math. Phys. (1987).*

[DAU 88] **I. Daubechies** Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math. 46 (1988), 909-996.*

[DAU] **I. Daubechies** The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *AT & T Bell Laboratories, à paraître.*

[GAB 46] **D. Gabor** Theory of communication. *J. Inst. Electr. Engin. (London) 93 (III) (1946), 429-457.*

[GRO-MOR 84] **A. Grossmann & J. Morlet** Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal. (1984), 723-736.*

[JAF-MEY-RIO 87] **S. Jaffard, Y. Meyer & O. Rioul** L'analyse par ondelettes. *Pour la Science, Sept. 1987, 28-37.*