Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

780

Laurent Schwartz

Semi-Martingales sur des Variétés, et Martingales Conformes sur des Variétés Analytiques Complexes

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

780

Laurent Schwartz

Semi-Martingales sur des Variétés, et Martingales Conformes sur des Variétés Analytiques Complexes

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Auteur

Laurent Schwartz
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France

AMS Subject Classifications (1980): 32K99, 58C99, 60G46, 60G48

ISBN 3-540-09749-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09749-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Schwartz, Laurent:
Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes / Laurent Schwartz. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.
(Lecture notes in mathematics; 780)
ISBN 3-540-09749-X (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-09749-X (New York, Heidelberg, Berlin)

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

INTRODUCTION

La notion de martingale par rapport à un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{O}$, d'une probabilité λ sur $\mathcal{O}$, et d'une famille de tribus λ-mesurables $(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, croissante et continue à droite, est bien connue. Les martingales ont été généralisées de deux manières. D'abord, on introduit les martingales locales (M est une martingale locale s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$ pour $n\to+\infty$, telle que chaque processus arrêté $X^{T_n}\,1_{\{T_n>0\}}$ soit une martingale) ; alors qu'une martingale est nécessairement intégrable (M_t est intégrable pour tout t), une martingale locale ne l'est plus nécessairement. Ensuite on définit une semi-martingale : X est une semi-martingale s'il est, de manière non unique mais unique dans le cas de processus continus, la somme d'un processus adapté cadlag à variation finie, et d'une martingale locale. Un processus à variation finie est peu oscillant, alors qu'une martingale locale peut l'être beaucoup ; les principales singularités de la semi-martingale proviendront de la martingale locale. La première raison fondamentale de l'introduction des semi-martingales est qu'on peut calculer l'intégrale d'une fonction H assez régulière par rapport à une fonction à variation finie, $\int_{]0,t]} H_s\,dV_s$, mais que l'on peut aussi, c'est un résultat fondamental dû essentiellement à Itô, calculer une intégrale stochastique $\int_{]0,t]} H_s\,dM_s$ de H, processus prévisible localement borné, par rapport à une martingale locale M ; le calcul ne se fait plus trajectoire par trajectoire, il est global, et dépend non seulement des processus H et M, mais de la mesure de base λ, et d'ailleurs il n'est défini que comme classe de processus, à un ensemble λ-négligeable près de Ω. On peut donc aussi calculer une intégrale stochastique $\int_{]0,t]} H_s\,dX_s$ d'un processus prévisible localement borné H par rapport à une semi-martingale X. Et il existe alors une formule remarquable du changement de variables, aussi due à Itô, ici page 5, qui permet d'exprimer $\varphi(X)$, si φ est une fonction réelle de classe C^2, comme somme d'intégrales stochastiques, portant sur les dérivées $\varphi'(X)$, $\varphi''(X)$, relativement à X et à une autre semi-martingale $\langle X^c, X^c \rangle$. Et ainsi, alors qu'une fonction C^1 d'un processus à variation finie est encore à variation finie, une fonction C^2 d'une semi-martingale est une semi-martingale. Et c'est là la deuxième raison fondamentale de l'introduction des semi-martingales : les martingales ne sont stables que par les applications affines, les semi-martingales sont stables par les applications C^2 ; on peut "courber" une semi-martingale, elle reste une semi-martingale. Ceci est naturellement valable pour des semi-martingales à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, et pour des applications φ de classe C^2 d'un espace vectoriel dans un autre. Les semi-martingales ont d'ailleurs bien d'autres stabilités (par exemple on peut remplacer la mesure de base λ par une autre équivalente), ce qui en a fait, dans les dernières années, un outil tout-à-fait fondamental.

Il était alors intuitif qu'on devait pouvoir définir les semi-martingales à valeurs dans des variétés différentielles de classe C^2. Et, curieusement, cela n'avait pas été vraiment fait. C'est d'autant plus curieux que de telles semi-martingales ont été, en fait, utilisées. On a longement étudié le "mouvement brownien" sur une variété, associé à un opérateur différentiel du second ordre elliptique (voir ici § 8). On étudie couramment ce processus <u>carte par carte</u>, comme processus de Markov, mais on ne l'a jamais appelé semi-martingale ! Ce qui a pour conséquence d'oblitérer certaines de ses propriétés. C'est cette lacune que nous allons combler ici. En même temps, on introduira de remarquables intégrables stochastiques par rapport à ces semi-martingales sur les variétés.

Les martingales conformes, à valeurs complexes ou dans un espace vectoriel complexe de dimension finie, ont été étudiées par Getoor et Sharpe [1]. Elles ont diverses application à l'étude des fonctions holomorphes ou harmoniques. Ici la formule de changement de variables d'Itô a une conséquence remarquable : une fonction holomorphe d'une martingale conforme est une martingale conforme, les martingales conformes sont stables par applications holomorphes. Il est donc à présumer qu'on peut définir les martingales conformes à valeurs dans des variétés analytiques complexes. Toutefois il existe ici des difficultés fondamentales, tenant à ce qu'une variété complexe peut avoir très peu de fonctions holomorphes (seulement les constantes si elle est compacte), il faudra tout un mécanisme d'équivalences locales de processus pour dépasser cette difficulté.

Telles ont été les motivations de cet ouvrage. C'est parce qu'elles sont d'ordre très général, et que les semi-martingales sur les variétés me paraissent devoir être utilisées systématiquement (le mouvement brownien sur une variété riemannienne est bien un objet courant !) que je suis heureux que les Lecture Notes veuillent bien leur donner accueil.

Voici maintenant un résumé, paragraphe par paragraphe.

§ 1. Semi-martingales à valeurs dans une variété différentielle, p. 1 à 6.

Ce paragraphe donne d'abord quelques définitions de base, puis la définition (1.2) page 6 d'une semi-martingale X à valeurs dans une variété V de classe C^2 : le processus X est une semi-martingale si, pour toute fonction φ réelle de classe C^2 sur V, $\varphi(X)$ est une semi-martingale réelle ; cela coïncide avec la définition usuelle si V est un espace vectoriel. C'est stable par application C^2 d'une variété dans une autre. Si X est un processus à valeurs dans une sous-variété V' d'une variété V, il est semi-martingale à valeurs dans V' si et seulement s'il est à valeurs dans V.

§ 2. Localisation des semi-martingales, et passage du local au global, p. 7 à 13.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, A leur réunion. On souhaite des théorèmes du type suivant : si un processus X sur A est, sur chaque A_n, restriction d'une semi-martingale, il l'est aussi sur A. Sous cette forme générale, c'est évidemment faux. C'est vrai si les A_n sont des ensembles semi-martingales (page 7), et si A est leur réunion stationnaire (pour tout, $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ est réunion d'un nombre fini des $A_n(\omega)$), lemme (2.2), page 8 . On peut aussi considérer (ce sera toujours le cas dans les paragraphes suivants) des A_n ouverts (A_n est ouvert, si, pour tout ω, sa coupe $A_n(\omega)$ est ouverte sur $\overline{\mathbb{R}}_+$). Même là, le résultat est faux, déjà pour une réunion de deux ouverts ; mais il est vrai pour une réunion d'une suite d'ouverts optionnels, si cette réunion est $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ tout entier, proposition (2.4), page 10. Cette possibilité de recollement permettra de considérer, pour une variété V, un atlas $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et de prendre pour A_n les $X^{-1}(V'_n)$ (lorsque que X est continue adaptée). C'est ainsi que nous démontrerons que, si $\tilde{V}$ est un revêtement de V, X une semi-martingale continue sur V, $\tilde{X}$ un relèvement de X dans $\tilde{V}$ (un tel relèvement est connu dès que le relèvement au temps 0, $\tilde{X}_0$, est connu, parce que $\overline{\mathbb{R}}_+$ est un segment), tel que $\tilde{X}_0$ soit $\mathcal{T}_0$-mesurable, alors $\tilde{X}$ est encore une semi-martingale, à valeurs dans $\tilde{V}$, proposition (2.6) - théorème I, page 11.

§ 3. Localisation des processus attachés à une semi-martingale vectorielle ; équivalence de semi-martingales vectorielles, p. 14 à 28.

Les processus attachés à une semi-martingale X sont la composante martingale locale continue X^c, ses intégrales stochastiques $H \bullet X$; et, pour deux semi-martingales X, Y, leur crochet $[X,Y]$. En dehors des semi-martingales, on ne peut avoir de recollement analogue à la proposition (2.4) : si, dans chaque A_n, X est restriction d'une martingale locale continue, par exemple, il ne l'est jamais dans A, même dans les cas les plus simples. On utilisera la notion d'équivalence. X est équivalent à 0 dans l'ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $X \underset{A}{\sim} 0$, s'il est localement (au sens topologique) constant sur A, définition (3.1), page 15 . A partir d'un lemme fondamental (si, pour une martingale locale de carré intégrable M, $\langle M,M\rangle$ est équivalent à 0 sur A, M l'est aussi, lemme (1.3 bis) page 15), on démontre alors les propriétés suivantes : si X est équivalent à 0 sur A, X^c l'est aussi, tous les crochets $[X,Y]$ aussi, et toutes les intégrales stochastiques $H \bullet X$ aussi ; si $H = 0$ sur A, $H \bullet X$ est équivalente à 0 sur A pour toute X, proposition (3.2)-théorème II, page 17. Ce théorème sera la clé de toute la suite. On en déduit qu'une semi-martingale X a un plus grand ouvert d'équivalence avec une martingale locale continue, et qu'il est optionnel, proposition (3.4)-théorème III, page 21 ; donc, si $A = \bigcup_n (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et si une semi-martingale X est, dans chaque A_n, équivalente à une martingale locale continue, elle l'est aussi dans A. C'est ce passage du local au global pour les équivalences qui remplacera la proposition (2.4) manquante, pour les martingales locales continues. On relie cette localisation à des intégrales stochastiques : pour A ouvert optionnel, X est équivalente sur A à une martingale locale continue, ssi $1_A \bullet X$ est une martingale locale continue, corollaire (3.8), page 25. Enfin on essaie de localiser les processus croissants, de manière à pouvoir localiser les sous-martingales locales continues, comme on a localisé les martingales locales continues ; ce sont les propositions (3.10) page 26 et (3.11) page 27, soumises à la restriction de la continuité de X, gênante pour les applications ; cette restriction est peut-être évitable, mais je n'ai pas pu l'éviter.

§ 4. Martingales conformes vectorielles et leurs localisations, pages 29 à 37.

Dans ce paragraphe, semi-martingale voudra dire semi-martingale continue, martingale voudra dire martingale locale continue. Un processus **M**, à valeurs vectorielles, est appelé une martingale conforme, si **M** et $\mathbf{M}^2$ sont des martingales ; ou si **M** est une martingale, et $\langle \mathbf{M},\mathbf{M} \rangle$ constant. La proposition (4.2)-théorème IV donne les propositions d'équivalence ; essentiellement, X est équivalente sur A à une martingale conforme, ssi X et X^2 sont équivalentes à des martingales, ou X à une martingale et $[X,X]$ à 0. On en déduit que X a un plus grand ouvert d'équivalence à une martingale conforme (passage du locale au global), et qu'il est optionnel. Les intégrales stochastiques d'une martingale conforme sont encore des martingales conformes, les fonctions holomorphes d'une martingale conforme sont des martingales conformes, ce qui permettra de définir les martingales conformes sur les variétés analytiques complexes. La proposition (4.3)-théorème V étend ce résultat à des équivalences ; il sera fondamental pour le paragraphe suivant. Puis (4.5) étend aux semi-martingales conformes, pour lesquelles X^c est une martingale conforme.

§ 5. Martingales et semi-martingales conformes à valeurs dans des variétés analytiques complexes, pages 38 à 55.

On pourrait songer à utiliser la même définition que pour une semi-martingale à valeurs dans une variété, en disant que X est une martingale conforme à valeurs dans V si, pour tout fonction φ holomorphe sur V à valeurs complexes, $\varphi(X)$ est une martingale conforme. C'est impossible, parce qu'une variété V qui n'est pas de Stein a trop peu de fonctions holomorphes (si V est compacte, une fonction holomorphe est constante). On devra prendre une définition locale, utilisant les équivalences du paragraphe précédent : X est une martingale conforme si, pour toute φ complexe de classe C^2 sur V, holomorphe sur un ouvert V' de V, $\varphi(X)$ est une semi-martingale, équivalente sur $X^{-1}(V')$ à une martingale conforme, définition (5.1), page 38. Grâce au théorème V, cela redonne la définition usuelle si V est un espace vectoriel. L'image d'une martingale conforme par une application holomorphe de V dans une autre variété analytique W, est trivialement une martingale conforme ; la proposition (5.3)-théorème VI étend ce théorème aux équivalences locales. Par exemple, si X est un processus prenant ses valeurs dans une sous-variété analytique V' de V, X est martingale conforme à valeurs dans V' ssi elle l'est à valeurs dans V, corollaire (5.4) page 41. On en déduit l'analogue du théorème I, la proposition (5.5)-théorème VII : le relèvement d'une martingale conforme dans un revêtement est encore une martingale conforme.

La fin du paragraphe étudie les relations entre martingales conformes, fonctions plurisous-harmoniques et ensembles pluri-polaires. Si X est une martingale conforme, et φ une fonction plurisous-harmonique C^2 sur V, $\varphi(X)$ est une sous-martingale locale continue (avec version locale), proposition (5.8)-théorème VIII, page 44. La proposition (5.10)-théorème VIII bis étend ce résultat aux fonctions plurisous-harmoniques non nécessairement continues, mais seulement si V est un ouvert de $\mathbb{C}^N$, ce qui est regrettable (je ne sais pas si le résultat général est vrai).

Pour terminer, on établit une relation entre martingales conformes et ensembles pluripolaires, analogue à celle qui existe entre mouvement brownien et ensembles polaires en théorie du potentiel. Un ensemble H de $\mathbb{C}$ est polaire (en dimension $N = 1$), si, pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe un voisinage U de a et une fonction φ sous-harmonique dans U, non identique à $-\infty$, mais égale à $-\infty$ sur $H \cap U$. On sait alors que le mouvement brownien, quelle que soit sa distribution de départ (il peut partir d'un point de H) est toujours dans $\complement H$ aux temps > 0. Comme une martingale conforme à valeurs dans $\mathbb{C}$ est, à un changement de temps près, un mouvement brownien, on en déduit que toute martingale conforme "quitte H sans retour", ce qui veut dire que, dès que la trajectoire a quitté H (ce qui peut ne jamais lui arriver), c'est pour toujours. Il s'agit d'étendre cela aux variétés de dimension $N_{\mathbb{C}}$ quelconque. Les martingales conformes sont alors bien plus générales que des mouvements browniens plus ou moins modifiés ; on doit remplacer les ensembles polaires par les ensembles pluripolaires, pour lesquelles on remplace fonction sous-harmonique par fonction plurisous-harmonique. Mais ce n'est pas exactement ainsi que le problème se présente, on doit considérer les ensembles $\mathbb{C}$-fermés, proches des ensembles pluripolaires, mais pas identiques. C'est l'objet de la proposition (5.11)-théorème VIII ter, page 52, au sujet de laquelle il y a bien des problèmes non résolus.

§ 6. <u>Sous-espaces stables de martingales réelles</u>. <u>Sous-espaces stables et intégrales stochastiques associées à une semi-martingale à valeurs dans une variété</u>, pages 56 à 85.

Nous revenons au cas réel ; dans ce paragraphe, semi-martingale voudra dire semi-martingale continue, martingale voudra dire martingale locale continue nulle au temps 0. Deux martingales M, N, sont orthogonales si $\langle M,N\rangle = 0$. Un espace stable $\mathcal{M}$ de martingales est un espace vectoriel de martingales, tel que : a) si $M \in \mathcal{M}$, si T est un temps d'arrêt, $M^T \in \mathcal{M}$; b) si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt tendant stationnairement vers $+\infty$ pour $n \to \infty$, et si, pour tout n, $M^{T_n} \in \mathcal{M}$, alors $M \in \mathcal{M}$; c) si $\mathcal{L}^2$ est l'espace des martingales vraies (pas seulement locales) de carré intégrable, $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}^2$ est fermé dans $\mathcal{L}^2$. On établit alors des relations entre la stabilité et l'orthogonalité ; le sous-espace stable engendré par un espace de martingales est son biorthogonal, et, si $\mathcal{M}$ est stable, $\mathcal{M}^+$ l'est aussi et l'espace des martingales est somme directe $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^+$. Le sous-espace stable engendré par m martingales orthogonales $(M_k)_{k=1,\ldots,m}$ est l'ensemble des $H_1 \bullet M_1 + H_2 \bullet M_2 + \ldots + H_m \bullet M_m$, où H_k est dM_k-intégrable. Si alors X est une semi-martingale sur une variété V, on appelle $\mathcal{M}(X)$ le sous-espace stable de martingales engendré par les $(\varphi(X))^c$, φ fonctions réelles C^2 sur V. Comme V est plongeable dans $\mathbb{R}^{2N+1}$, $N = \dim V$, $\mathcal{M}(X)$ est engendré par $m \leq 2N+1$ martingales orthogonales. On établit alors une remarquable formule symbolique : si les M_k, $k = 1,2,\ldots,m$, sont des martingales orthogonales engendrant au moins $\mathcal{M}(X)$, on peut écrire symboliquement, d'une manière unique, $X^c = \sum_k H_k \bullet M_k$, où les H_k sont des processus tangents optionnels intégrables ($H_k(t,\omega)$ est un vecteur tangent au point $X(t,\omega)$, H_k est dM_k-intégrable) ; ce qui veut dire, que pour tout plongement de V dans un espace vectoriel, X^c s'écrit effectivement de cette manière, voir (6.2)-théorème IX, page 62. Ceci permet d'introduire de remarquables intégrales stochastiques, les intégrales de processus optionnels cotangents. Un tel processus J est optionnel, à valeurs dans le fibré cotangent, $J(t,\omega)$ cotangent au point $X(t,\omega)$. On peut alors essayer de définir l'intégrale stochastique $(J \bullet X)_t = \int_{]0,t]} (J_s | dX_s)$, dans la mesure où dX est presque tangent. En fait, on ne le peut pas, mais on peut définir sa composante martingale , $J \bullet X^c$. Un moyen direct d'y arriver est d'utiliser la martingale symbolique indiquée ci-dessus, $X^c = \sum_k H_k \bullet M_k$, en posant $J \bullet X^c = \sum_k (J|H_k) \bullet M_k$, J étant dX^c-intégrable si et seulement si chaque $(J|H_k)$ est dM_k-intégrable, proposition (6.5) - théorème X page 67. Et l'ensemble des $J \bullet X^c$ ainsi obtenu est exactement l'espace $\mathcal{M}(X)$ engendré par X, proposition (6.4)-théorème XI, page 74. Comme alors l'ensemble des J peut être engendré par N processus cotangents optionnels, $\mathcal{M}(X)$ admet un système générateur de $m \leq N$ martingales orthogonales, au lieu de $m \leq 2N+1$ trouvé antérieurement, proposition (6.5)-théorème XII, page 78. La proposition (6.7) page 83 étudie les sous-espaces stables $\mathcal{M}(X)$ et leurs équivalences sur des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et on en déduit que, si $\tilde{X}$ est un relèvement de X dans un revêtement $\tilde{V}$ de V, $\mathcal{M}(\tilde{X}) = \mathcal{M}(X)$.

§ 7. Sous-espaces stables de martingales complexes. Sous-espaces stables et intégrales stochastiques associées à une semi-martingale conforme à valeurs dans une variété analytique, pages 86 à 100.

Ici V est une variété analytique. Si X est une semi-martingale à valeurs dans V, on considèrera l'espace stable $\mathcal{M}(X)$ de martingales complexes engendré par les $(\varphi(X))^c$, φ fonctions complexes de classe C^2 sur V, et des intégrales stochastiques $J \bullet X^c$ de processus cotangents complexes J. Parmi les vecteurs cotangents complexes en un point de V (applications $\mathbb{R}$-linéaires de l'espace tangent en v dans $\mathbb{C}$) figurent ceux, appelés $\mathbb{C}$-cotangents, qui sont des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur l'espace tangent en v, relativement à la structuree complexe de l'espace tangent définie par celle de V. On peut alors donner une caractérisation globale des semi-martingales conformes (alors que la définition (5.1) page 38 était locale) : X est une semi-martingale conforme si et seulement si, pour tout J processus optionneel $\mathbb{C}$-cotangent dX^c-intégrable, $J \bullet X^c$ est une martingale conforme, proposition (7.1)-théorème XIII, page 89. On peut aussi, page 92 , donner de manière analogue une définition globale des martingales conformes, en utilisant les intégrales stochastiques de Stratonovitch.

A côté de l'espace $\mathcal{M}(X)$, existe un espace plus petit, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$; si X est une martingale complexe M (à valeurs dans $V = \mathbb{C}$), $\mathcal{M}(X)$ est l'espace stable engendré par Re M et Im M, alors que $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(M)$ est l'espace engendré par M seule. On définit $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$ comme l'espace des $J \cdot X^c$, pour tous les J $\mathbb{C}$-cotangents optionnels dX^c-intégrables. On étudie ensuite ses équivalences sur des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et on en déduit que, si $\tilde{X}$ est le relèvement de X sur un revêtement $\tilde{V}$ de V, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\tilde{X}) = \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$, proposition (7.4) page 98. Si V est de Stein, $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$ est simplement l'espace stable de martingales engendré par les $(\varphi(X))^c$, φ holomorphes sur V, corollaire (7.5) page 98, comme $\mathcal{M}(X)$ était l'espace engendré par les $(\varphi(X))^c$, φ de classe C^2 sur V.

§ 8. Diffusion et mouvement brownien sur une variété sans bord, pages 101 à 120.

Soit L un opérateur différentiel sur V, de second ordre, sans terme constant, lu dans une carte comme

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad .$$

Les $a^{i,j}$ définissent intrinsèquement un champ de formes quadratiques sur les espaces cotangents, donc une structure riemannienne sur V ; on désignera par $(\ |\ )_{T^*}$ le produit scalaire ainsi défini sur les espaces cotangents. Les méthodes de Stroock et Varadhan lui associent un processus de Markov. On montre alors que ce processus X est une semi-martingale, proposition (8.4)-théorème XIV, dont on détermine très explicitement la composante X^c au sens du § 6. La proposition (8.5)-théorème XV, page 107, étudie les intégrales stochastiques $J \cdot X^c$: J est dX^c-intégrable ssi $(J|J)_{T^*}$ est presque sûrement intégrable Lebesgue. On a la formule remarquable, pour deux processus optionnels cotangents J, J' : $\langle J \cdot X^c, J' \cdot X^c \rangle_t = \int_{]0,t]} (J_s | J'_s)_{T^*}\, ds$, formule (8.6), page 107. Si $J^1, J^2, \ldots, J^N$ sont N processus optionnels cotangents orthonormés, les $J^k \cdot X^c = B^k$

sont N mouvements browniens indépendants. On suppose ensuite V analytique complexe, et L hermitienne ; alors, X est une semi-martingale conforme, proposition (8.9)-théorème XVI, page 116 , et une martingale conforme si L est pseudo-kählérienne (en particulier si L est le laplacien d'une structure kählérienne sur V), proposition (8.11)-théorème XVII, page 119 .

Ce texte a été dactylographié au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Laboratoire Associé au C.N.R.S. No 169, par Marie-José Lécuyer.

TABLE DES MATIERES

Introduction v

§ 1. Semi-martingale à valeurs dans une variété différentielle 1

§ 2. Localisation des semi-martingales et passage du local au global 7

§ 3. Localisation des processus attachés à une semi-martingale vectorielle ; équivalences de semi-martingales vectorielles 14

§ 4. Martingales conformes à valeurs vectorielles et leurs localisations 29

§ 5. Martingales et semi-martingales conformes à valeurs dans des variétés analytiques complexes 38

§ 6. Sous-espaces stables de martingales réelles. Sous-espaces stables et intégrales stochastiques associées à une semi-martingale à valeurs dans une variété 56

§ 7. Sous-espaces stables de martingales complexes. Sous-espaces stables et intégrales stochastiques associées à une semi-martingale conforme à valeurs dans une variété $\mathbb{C}$-analytique 86

§ 8. Diffusion et mouvement brownien sur une variété sans bord 101

Notes 121

Index bibliographique 127

Index terminologique et index des notations 130

§ 1. SEMI-MARTINGALES A VALEURS DANS UNE VARIETE DIFFERENTIELLE.

Nous emploierons, à quelques modifications près, les notations de Paul-André MEYER [1], auquel il sera référé par M[1]. Pour les notions de base, on pourra consulter aussi Paul-André MEYER [2], ou Claude DELLACHERIE [1]. Les processus seront toutefois définis sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, au lieu de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\overline{\mathbb{R}}_+$ étant la demi-droite achevée $[0,\infty]$. Si le processus est noté X, sa valeur en $(t,\omega) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ sera $X(t,\omega)$; pour $\omega \in \Omega$, la trajectoire $X(\omega)$ sera la fonction $t \mapsto X(t,\omega)$; pour $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, X_t sera la fonction $\omega \mapsto X(t,\omega)$. En général, X prendra ses valeurs dans un espace topologique, d'abord un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ensuite une variété différentielle de classe C^2. On dira que le processus est cadlag (continu à droite, pourvu de limites à gauche), si, pour tout ω, $X(\omega)$ est cadlag ; il sera alors souvent commode de considérer que la trajectoire est la fonction $(t,\omega) \mapsto X(t,\omega)$, $(t,\omega) \mapsto X(t_-,\omega)$, définie sur $[0,\infty] \times]0,\infty]$, et elle sera alors compacte. Bien sûr, Ω sera muni d'une tribu $\mathcal{O}$ et d'une probabilité λ, ainsi que d'une famille de tribus $(\mathcal{T}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}$ λ-mesurables, croissante, et continue à droite (i.e. $\mathcal{T}_t = \bigcap_{t'>t} \mathcal{T}_{t'}$, pour $t < +\infty$). On supposera aussi que chaque $\mathcal{T}_t$ contient toutes les parties λ-négligeables. Le processus X est alors dit adapté si toute X_t est $\mathcal{T}_t$-mesurable. Rappelons qu'un temps d'arrêt♦ est une variable aléatoire (que nous supposerons ici partout définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) telle que, pour tout t, l'ensemble $\{T \leq t\}$ soit $\mathcal{T}_t$-mesurable. La tribu $\mathcal{T}_t$ du temps d'arrêt T est alors l'ensemble des $A \subset \Omega$ tels que, pour tout t, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{T}_t$. On dit habituellement qu'un processus réel ou vectoriel X, nul au temps

---

♦ Pour les temps d'arrêt, consulter Claude DELLACHERIE [1], chapitre III, page 44.

$0(X_o = 0)$ vérifie <u>localement</u> une propriété P (par exemple X est une martingale locale, si P est la propriété d'être une martingale ; martingale sous-entend toujours cadlag), s'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, tendant vers $+\infty$ pour $n \to +\infty$, telle que chaque processus arrêté X^{T_n}, défini par $X_t^{T_n} = X_{T_n \wedge t}$, ait la propriété P (par exemple soit une martingale) ; et, pour X quelconque, X a localement la propriété P si $X - X_o$ l'a♦. Ceci permet, par exemple, à un processus constant c, adapté à l'instant 0 donc à tout instant, d'être une martingale locale, bien que non nécessairement intégrable ; et, si M est une martingale, cM l'est aussi. On veut en somme que, si X a localement la propriété P, $X + c$ et cX l'aient aussi. C'est <u>en général</u> équivalent à dire que chaque processus $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ a la propriété P (on utilise le fait qu'il existe une suite croissante $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partie de Ω, de réunion Ω, $\Omega_n \in \mathcal{T}_o$, telles que X_o soit bornée sur chaque Ω_n, à savoir $\Omega_n = \{|X_o| \leq n\}$; si alors $S_n = +\infty$ sur Ω_n, 0 sur $\complement \Omega_n$, S_n est un temps d'arrêt, alors $X^{S_n} 1_{\{S_n > 0\}}$ est nul sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \complement \Omega_n$, et borné au temps 0). Avec cette définition, le mouvement brownien, défini seulement sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, pris égal à une constante arbitraire au temps $+\infty$ (il n'est plus alors cadlag sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$), est une martingale locale, en prenant $T_n = n$. C'est ce que nous ne voulons pas ici. Nous serons donc amenés à modifier cette définition de deux manières. D'une part la tendance des T_n vers $+\infty$ était adaptée aux processus sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$; pour des processus sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, nous supposerons que les T_n tendent <u>stationnairement</u> vers $+\infty$, c-à-d. que, pour tout ω, $T_n(\omega) = +\infty$ pour n assez grand. (Alors le mouvement brownien prolongé n'est plus une martingale locale, puisqu'il n'est pas cadlag !) Ensuite, X prendra souvent ses valeurs dans une variété V, alors $X - X_o$ n'a aucun sens, ni $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$. Nous dirons donc qu'un processus X

♦ Voir par exemple la définition d'une martingale locale dans M[1], définition 1, page 291.