

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

770

Séminaire Bourbaki
vol. 1978/79
Exposés 525 – 542



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

770

Séminaire Bourbaki
vol. 1978/79
Exposés 525 – 542

Avec table par noms d'auteurs de 1967/68 à 1978/79



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

AMS Subject Classifications (1980): 10G05, 12A35, 14F05, 14N10,
22E00, 34A00, 35J00, 35L00, 43A20, 44A25, 46B00, 53A00,
53A05, 53C00, 55A00, 57A15, 58B05, 81A00

ISBN 3-540-09733-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09733-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Universités <Paris> / Séminaire Bourbaki: Séminaire Bourbaki: exposés. – Berlin,
Heidelberg, New York: Springer.

525 – 542 = Vol. 1978/79. Avec table par noms d'auteurs de 1967/68 à 1978/79. – 1980.
(Lecture notes in mathematics; Vol. 770)

ISBN 3-540-09733-3 (Berlin, Heidelberg, New York)

ISBN 0-387-09733-3 (New York, Heidelberg, Berlin)

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or
part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting,
re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or
similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright
Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the
publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by N. Bourbaki 1980

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

TABLE DES MATIÈRES

18, 19, 20 novembre 1978

525	HELPER, Bernard	Propagation des singularités pour des problèmes aux limites [d'après R. B. Melrose, J. Sjöstrand]	1
526	KARCHER, Hermann	Report on M. Gromov's almost flat manifolds	21
527	LANNES, Jean	Un faux espace projectif réel de dimension 4 [d'après Sylvain E. Cappell et Julius L. Shaneson]	36
528	MEYER, Yves	Les nouvelles intégrales singulières de Calderón	57
529	POÉNARU, Valentin	Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller	66
530	SCHNEIDER, Michael	Holomorphic vector bundles on $\mathbb{P}_n$	80

17, 18, 19 février 1978

531	BEAUVILLE, Arnaud	Géométrie des tissus [d'après S. S. Chern et P. A. Griffiths]	103
532	BOUTET DE MONVEL, Louis	Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel [d'après V. Guillemin]	120
533	CARTIER, Pierre	Théorie de la diffusion pour l'équation de Schrödinger	132
534	MÉLA, Jean-François	Le calcul sur les caractères de l'algèbre $M(G)$ et le problème " $\mu * L^1$ fermé ?" [d'après les travaux de B. Host et F. Parreau]	151
535	OESTERLÉ, Joseph	Travaux de Ferrero et Washington sur le nombre de classes d'idéaux des corps cyclotomiques	170
536	SIEBENMANN, Laurent	Amorces de la chirurgie en dimension quatre : un $S^3 \times R$ exotique [d'après Andrew H. Casson and Michael H. Freedman]	183

16, 17, 18 juin 1979

537	A'CAMPO, Norbert	Sur la première partie du seizième problème de Hilbert	208
538	BERTRAND, Daniel	Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires	228
539	DELIGNE, Pierre	Sommes de Gauss cubiques et revêtements de $SL(2)$, d'après S. J. Patterson	244
540	EDWARDS, Robert D.	Characterizing infinite dimensional manifolds topologically [after H. Toruńczyk]	278
541	GUICHARDET, Alain	Représentations de G^X (G compact), selon Verchik, Gelfand, Graiev et Ismagilov	303
542	PISIER, Gilles	De nouveaux espaces de Banach sans la propriété d'approximation [d'après A. Szankowski]	312
	Table par noms d'auteurs		328

PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR DES
PROBLÈMES AUX LIMITES

[d'après R. B. MELROSE, J. SJÖSTRAND]

par Bernard HELFFER

§ 0. Introduction

Cet exposé est en quelque sorte la suite de la deuxième partie de l'exposé de J. Chazarain [5]. Les travaux de ces dernières années ont en effet permis de comprendre assez complètement comment les singularités C^∞ des solutions d'une équation de type principal réel se propagent au voisinage du bord. Les principales contributions depuis juin 1973 ont été celles de :

F. G. Friedlander [14], R. B. Melrose ([28] [29] [30] [31] [32] [34] [36]), M. Taylor [44] [45] [46], G. Eskin [12] [13], K. G. Andersson - R. B. Melrose [2], R. B. Melrose - J. Sjöstrand [33] et Ivrii [22].

Dans l'exposé de J. Chazarain (2e partie), l'accent a été mis sur la construction de paramétrixes ; comme on le verra dans la suite, cette approche devient très difficile (mais encore nécessaire dans un cas) quand on aborde des situations géométriques compliquées, et, dans [2] et surtout dans [33], les auteurs sont revenus à des méthodes plus implicites basées sur des inégalités d'énergie et inspirées des démonstrations "classiques" de [19] [21].

0.1. Quelques définitions

Avant d'énoncer le théorème de R. B. Melrose - J. Sjöstrand, rappelons un certain nombre de définitions et de résultats préliminaires. Soit u une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ ($u \in \mathcal{D}'(\Omega)$). Le front d'onde de u (noté $WF\ u$) est défini dans [20] par L. Hörmander comme un sous-ensemble fermé conique de $T^*\Omega \setminus 0$ ⁽¹⁾ :

On dit qu'un point (x_0, ξ_0) dans $T^*\Omega$ n'est pas dans le front d'onde de u , s'il existe une fonction φ dans $C_0^\infty(\Omega)$, non nulle en x_0 , telle que la transformée de Fourier de φu notée $\hat{\varphi u}$ est à décroissance rapide lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini pour ξ dans un ouvert conique Γ contenant ξ_0 .

On dira qu'un opérateur P continu de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$ est régularisant s'il envoie $\mathcal{D}'$ dans C^∞ .

⁽¹⁾ Dans la suite, on notera plus simplement $T^*\Omega$.

Soit maintenant p un symbole dans $S_{\text{classique}}^m(\dot{T}^*\Omega)$, i.e. p admet un développement asymptotique : $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$ avec $p_k \in C^\infty$ dans $\dot{T}^*\Omega$ et homogène en ξ de degré k .

On associe à p un opérateur pseudodifférentiel P (dans $OPS_{\text{class}}^m(\Omega)$) défini pour u dans $C_0^\infty(\Omega)$ par :

$$Pu = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Le symbole principal p_m est défini de manière invariante sur $\dot{T}^*\Omega$. On désignera par $\Sigma(p_m)$ l'ensemble des zéros de p_m dans $\dot{T}^*\Omega$.

Le front d'onde peut alors être défini de manière équivalente par :

$$WF u = \left\{ \bigcap \Sigma(p_0), p_0 \text{ symbole principal de l'opérateur pseudodifférentiel } P_0, P_0 u \in C^\infty \right\}.$$

Rappelons que la projection de $\dot{T}^*\Omega$ sur Ω envoie $WF u$ sur le support singulier de u .

A un symbole p réel défini sur $\dot{T}^*\Omega$, on associe le champ hamiltonien H_p qui est un champ de vecteurs sur $\dot{T}^*\Omega$ défini dans des coordonnées canoniques (x, ξ) par :

$$H_p = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\partial p}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Les courbes bicaractéristiques (ou rayons) sont les courbes intégrales de H_p contenues dans $\Sigma(p)$.

Elles vérifient le système d'équations

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = + \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}.$$

La solution de (*) ayant pour condition initiale $(x(0), \xi(0)) = \rho$ est notée $\exp tH_p(\rho)$.

0.2. Le théorème de Hörmander

Le point de départ de notre exposé est le théorème suivant dû à L. Hörmander (1970) [19] [20] [21] (cf. [1] dans la catégorie analytique) qui règle le problème de la propagation des singularités dans un ouvert pour un opérateur de type principal réel (voir (0.4) (Pr. 1) pour la définition).

THÉORÈME 1.- Soit P un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal réel p et u une distribution dans Ω telle que :

$$Pu = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors $WF(u) \setminus WF(f)$ est contenu dans $\Sigma(p)$ et est invariant par le flot du champ hamiltonien H_p dans $\dot{T}^*\Omega \setminus WF f$.

Nous esquisserons trois démonstrations de ce théorème au § 1, car chacune a fourni l'amorce d'une démonstration dans le cas à bord.

0.3. Le problème au bord

Le théorème 1 ne dit rien sur le comportement des singularités au voisinage du bord $\partial\Omega$ de Ω supposé C^∞ , lorsqu'on se place par exemple dans le cas où P est un opérateur du second ordre et que u est une distribution prolongeable telle que Pu est C^∞ jusqu'au bord et de trace C^∞ sur $\partial\Omega$. Les premiers résultats obtenus concernent la réflexion des singularités lorsque les courbes bicaractéristiques rencontrent le bord transversalement. Si deux courbes bicaractéristiques distinctes γ_1 et γ_2 coupent le bord $\partial T^*\Omega$ transversalement au-dessus d'un même point de $\dot{T}^*\partial\Omega$, alors la présence de singularités pour u sur γ_1 implique qu'il y a des singularités sur γ_2 (on dit que γ_2 est le rayon réfléchi de γ_1). Ces résultats [4] [7] [8] [26] [39] [41] [43] ont été partiellement exposés dans [5]. Le cas resté longtemps sans solution (encore que des amorces de solution figurent dans les travaux de Ludwig [24] [25]) est celui où le champ hamiltonien H_p devient tangent au bord en des points de $\Sigma(p)$.

Le premier cas résolu indépendamment par R. B. Melrose [29] et M. Taylor [44] a été le cas "rasant" ou "diffractif", cas où les bicaractéristiques peuvent rencontrer $\partial T^*\Omega$ tangentiellement, mais en restant en projection localement dans Ω au voisinage du point de contact.

On peut par exemple analyser complètement la propagation des singularités pour le problème mixte suivant pour l'équation des ondes :

$$(**) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans } R_t \times U \\ u|_{R_t \times \partial U} = 0 \\ u|_{t=0} = \delta_{x_0}(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

où U est l'extérieur d'un corps strictement convexe K de $\mathbb{R}^n$.

Dans la figure 1, on indique en projection sur U la position du front d'onde aux différents temps $t_1, t_2, \dots$

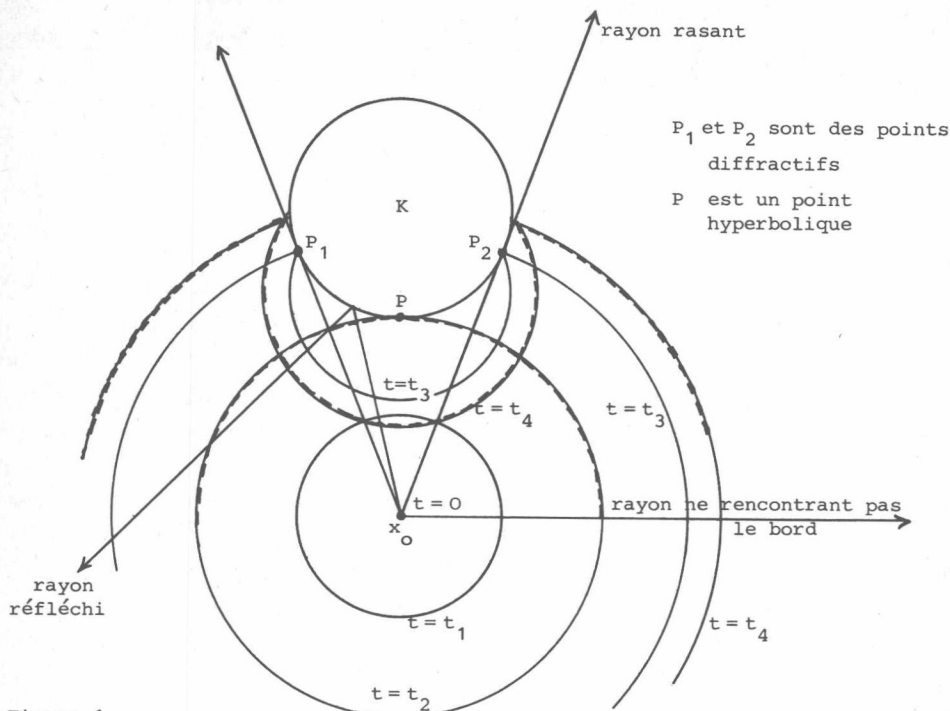


Figure 1

Le second cas étudié est le cas "glissant" (en anglais gliding). Les résultats ont été obtenus par K. G. Andersson - R. B. Melrose [2] et G. Eskin [13]. On peut ainsi analyser le problème de la propagation des singularités à l'intérieur et au bord d'une région convexe.

0.4. Le théorème de Melrose - Sjöstrand

Nous allons maintenant énoncer le théorème général. On se place sur une variété $C^\infty M$ de dimension $(n+1)$, de bord régulier ∂M et d'intérieur $\overset{\circ}{M}$. Soit P un opérateur différentiel du second ordre à coefficients C^∞ sur M de symbole principal p réel vérifiant :

- (Pr 1) dp et α sont indépendants dans T^*M
(où α désigne la 1-forme fondamentale, dite de Liouville sur T^*M) ;
- (Pr 2) dp et α restreints à $\partial T^*M \setminus 0$ sont indépendants ;
- (Pr 3) ∂M est non caractéristique pour p , i.e. p est non nul sur le fibré conormal à ∂M .

On dira alors que P est de type principal réel jusqu'au bord.

La notion de rayon a été définie ci-dessus dans $T^*\overset{\circ}{M}$, de même que la notion de rayon réfléchi dans le cas transversal. On peut étendre par continuité cette notion de rayon (il y a cependant des difficultés sérieuses lorsque H_p a un contact d'ordre infini avec $\partial T^*\overset{\circ}{M}$) ; ces rayons, qui seront définis au § 2.4, seront des courbes dans BM ($= \dot{T}^*\overset{\circ}{M} \cup \dot{T}^*\partial M$) muni de la topologie quotient naturelle. On définira également au § 2.1 le front d'onde d'une distribution prolongeable u sur M $WF_b u$ dans BM dont la restriction à $\dot{T}^*\overset{\circ}{M}$ est le front d'onde usuel défini précédemment.

THÉORÈME 2 (cf. [33]).- Soient P un opérateur différentiel du second ordre à coefficients C^∞ sur M de type principal réel jusqu'au bord et u une distribution prolongeable telle que :

$$Pu \in C^\infty(M) \quad \text{et} \quad u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M)$$

alors, si p appartient à $WF_b u$, il existe un rayon maximal dans BM , passant par p et entièrement contenu dans $WF_b u$.

Remarque 0.1.- Il résulte de (Pr 3) (cf. [17]) que si Pu est dans $C^\infty(M)$, la trace de u sur ∂M est bien définie.

Remarque 0.2.- On peut prendre dans le théorème 2 d'autres conditions que la condition de Dirichlet (cf. [2], [33], [36]).

Remarque 0.3.- L'étude de la propagation des singularités dans le cadre analytique est encore très incomplète. Le cas des rayons transversaux au bord est traité par P. Schapira dans [42]. Par contre, dans les cas où les rayons sont rasants, un seul exemple est traité dans [15]. Cet exemple montre que les phénomènes de propagation sont différents de ceux de la catégorie C^∞ .

Application 1.- Formule sommatoire de Poisson pour une variété à bord.

Le théorème 2 permet d'obtenir des informations sur le support singulier de la transformée de Fourier de la mesure spectrale associée au problème de Dirichlet pour le Laplacien dans une variété riemannienne compacte à bord (cf. l'exposé de Chazarain [6] (pour le cas d'une variété sans bord) et les travaux récents [2], [16]).

Application 2.- Conjecture de "Lax-Philipps" [23] [38] [35].

Dans le cas du problème mixte pour l'équation des ondes le théorème implique des résultats sur la décroissance de l'énergie dans un compact de l'espace lorsque le temps tend vers l'infini.

§ 1. Propagation des singularités à l'intérieur

Nous esquissons dans ce paragraphe plusieurs démonstrations du théorème 1 qui servent de point de départ pour les démonstrations du théorème 2 dans le cas rasant, glissant ou général. On supposera pour simplifier dans ce paragraphe que $\overset{\circ}{M} = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1. Utilisation des transformations canoniques (cf. [20], [21])

Si p est une fonction dans $C^\infty(\dot{T}^*\overset{\circ}{M})$ homogène de degré 1 vérifiant (Pr 1), il existe "microlocalement" (i.e. localement dans $\dot{T}^*\overset{\circ}{M}$) une transformation canonique homogène κ (i.e. un difféomorphisme homogène qui respecte la 2-forme symplectique $\sum_{j=1}^n dx^j \wedge d\xi_j$) d'un ouvert conique de $\dot{T}^*\overset{\circ}{M}$ dans $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ tel que :

$$p \circ \kappa^{-1} = \xi_1 \quad (\text{où } (x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n) \text{ désigne le point courant de } T^*\mathbb{R}^n).$$

On peut alors associer à κ des opérateurs Fourier-Intégraux A et B tels que, si P est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal p , BPA soit un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole complet est ξ_1 . La démonstration du théorème 1 se ramène microlocalement à l'étude de l'opérateur $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^1}$ dans $\mathbb{R}^n$, et il est facile d'écrire la solution explicite de: $\frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial x^1} = f$.

Les singularités se propagent dans la direction des x^1 , on a en effet :

$$H_P = H_{\xi_1} = + \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Cette idée de se ramener à des modèles microlocaux simples sera reprise dans le cas "diffractif" et dans le cas "glissant" (cf. § 3).

1.2. "Trouver un opérateur pseudodifférentiel qui commute avec P " (cf. [19])

On suppose pour simplifier que :

- a) $WF f = \emptyset$
- b) P est hyperbolique dans la direction des x^1 (cf. [5]).

Comme souvent, on va démontrer le théorème 1 en démontrant la propagation de la régularité.

Soit $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \notin WF u$; cela signifie qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel A , elliptique en ρ_0 (i.e. de symbole principal non nul en ρ_0) tel que Au est C^∞ . On va construire un opérateur pseudodifférentiel B qui a la même propriété que A mais sur le rayon passant par ρ_0 . On cherche B tel que $[B, P] (= BP - PB)$ soit un opérateur régularisant et tel que Bu soit C^∞ près

de $x^1 = x^1_0$. La première condition implique que, si b_0 désigne le symbole principal de B , il doit vérifier l'équation :

$$(E) \quad H_p b_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{p, b_0\} = 0 \quad (1) \quad .$$

En particulier, b_0 est constant le long des courbes bicaractéristiques. On choisit une solution b_0 de l'équation ci-dessus en se donnant une trace sur l'hypersurface $x^1 = x^1_0$ (transverse à H_p) à support compact et égale à 1 au voisinage de ρ_0 sur cette hypersurface. On obtient que le symbole complet de $[B, P]$ est nul en résolvant par récurrence une suite d'équations du type (E) (mais avec second membre), obtenues en regroupant les termes par homogénéité. On obtient ainsi que :

$$PBu = BPu + [P, B]u \in C^\infty.$$

La construction standard de la paramétrix pour un opérateur elliptique permet de montrer l'existence d'un opérateur pseudodifférentiel C tel que $(B - CA)$ soit régularisant près de $x^1 = x^1_0$ (en effet, si x^1 est près de x^1_0 , un choix convenable de la trace de b sur $x^1 = x^1_0$, permet d'obtenir que A est elliptique sur le support de b).

Alors $Bu = CAu + (B - CA)u$ est C^∞ près de $x^1 = x^1_0$ et PBu est C^∞ .

Un résultat classique sur les opérateurs hyperboliques (cf. [5]) permet de conclure que Bu est C^∞ partout. B étant elliptique au voisinage du rayon passant par ρ_0 , on en déduit que le front d'onde de u ne rencontre pas le rayon passant par ρ_0 . C.Q.F.D.

Cette méthode est utilisée dans [2] pour étudier le cas "glissant".

1.3. Méthode des inégalités d'énergie [21] [38]

La méthode des inégalités d'énergie est implicitement utilisée dans la méthode précédente, puisqu'on utilise des résultats sur les opérateurs hyperboliques. Ici, on démontre le théorème 1 en étudiant la propagation de la régularité H^s (H^s désigne l'espace de Sobolev usuel construit à partir de L^2 :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On peut microlocaliser les espaces H^s de la manière suivante : on dira qu'une distribution u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est H^s au point ρ de $T^*\Omega$ et on notera : $\rho \notin WF_{(s)} u$, si il existe un opérateur pseudodifférentiel A d'ordre 0, elliptique

(1) Si f et g sont deux fonctions C^∞ sur $T^*\Omega$, on définit le crochet de Poisson $\{f, g\}$ par : $\{f, g\} = H_f g$.

au point p , tel que Au soit dans $H^s(\Omega)$. On suppose ici que P est d'ordre 1. Pour démontrer le théorème 1, on va montrer que si f est dans H^s le long d'un rayon $\gamma(t)$ ($t \in I = [t_1, t_2]$) et si u est dans H^s en $\gamma(t_2)$, alors u est dans H^s sur $\gamma(t)$ pour $t \in I$. On peut toujours supposer que u est dans $H^{s-1/2}$ sur $\gamma(I)$.

Rappelons (cf. par exemple [20] ou [21]) que l'on désigne par $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions $p \in C^\infty$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus 0$ telles que: $\forall K \subset\subset \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists C_{\alpha, \beta}(K)$; $\forall x \in K$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$$

$S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes :

$$p \longrightarrow P_{K, \alpha, \beta}(p) = \sup_{x \in K} \frac{|D_x^\alpha D_\xi^\beta p|}{(1 + |\xi|)^{m - |\beta|}}.$$

Soit maintenant $F \subset S^{s-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ un ensemble borné de $S^s(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ de fonctions réelles à support dans un voisinage fermé conique Γ de $\gamma(I)$.

Soit c dans F et notons $C = c(x, D)$ l'opérateur pseudodifférentiel de symbole c . On considère :

$$\text{Im}(Cf, Cu) = \text{Im}(CPu, Cu).$$

Quelques lignes de calcul permettent d'obtenir l'inégalité :

$$\text{Im}(Cf, Cu) \geq \text{Re}(\{p, c^2\}(x, D)u, u) - C_1 \|Cu\|_{L^2}^2 - C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de C dans F .

Posant $e(x, \xi) = \{p, c^2\}(x, \xi) - (2C_1 + 1)c(x, \xi)^2$, on obtient aisément :

$$\text{Re}(e(x, D)u, u) \leq \|Cf\|_{L^2}^2 + C_2,$$

où C_2 est indépendant de C dans F .

Soit Γ_0 un voisinage ouvert conique de $\gamma(t_2)$ tel que u est de classe H^s dans Γ_0 , et choisissons une fonction $c \in C^\infty$ non négative homogène de degré s à support dans Γ telle que :

$$\{p, c^2\} \geq 0,$$

dans $\Gamma \setminus \Gamma_0$, avec inégalité stricte dans $\gamma(I) \setminus \Gamma_0$.

Choisissons également des symboles a_0 et a_1 homogènes de degré 0 (resp. 1) tels que :

$$H_p a_0 = 1; \quad H_p a_1 = 0 \quad \text{et } a_1 \text{ non nul sur le support de } c.$$

On prendra pour F l'ensemble des fonctions :

$$c_{\lambda, \varepsilon} = c e^{\lambda a_0} (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

où λ est fixé assez grand.

Si c est remplacé par $c_{\lambda, \varepsilon}$ la fonction e devient :

$$e_{\lambda, \varepsilon} = (\{p, c^2\} + (2\lambda - 2c_1 - 1)c^2) e^{2\lambda a_0} (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1}.$$

Comme $e_{\lambda, \varepsilon}$ est non négative en dehors de Γ_0 et strictement positive sur $\gamma(I) \setminus \Gamma_0$, nous pouvons choisir une fonction r , homogène de degré s , non négative, positive strictement sur $\gamma(I)$, et une fonction q homogène de degré s à support dans Γ_0 et vérifiant : $q(x, D)u$ dans L^2 , telles que :

$$r^2 \leq (\{p, c^2\} + (2\lambda - c_1 - 1)c^2) e^{2\lambda a_0} + q^2.$$

$$\text{Soient : } r_\varepsilon = r (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}, \quad q_\varepsilon = q (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}.$$

On obtient en utilisant l'inégalité classique de Gårding que :

$$\|r_\varepsilon(x, D)u\|_0^2 \leq \operatorname{Re} (e_{\lambda, \varepsilon}(x, D)u, u) + \|q_\varepsilon(x, D)u\|_0^2 + C_3.$$

Chacun des termes du membre de droite est borné, lorsque ε tend vers 0, indépendamment de ε . On en déduit, en faisant tendre ε vers 0, que $r(x, D)u$ est dans L^2 , et par conséquent que u est dans H^s le long de $\gamma(I)$ (car r est elliptique sur $\gamma(I)$). (C.Q.F.D.)

C'est cette méthode qui sera utilisée pour démontrer une grande partie du théorème 2.

§ 2. Quelques définitions. Classification des points du bord

2.1. Définition du front d'onde au bord

Beaucoup de définitions ont été proposées. Nous prendrons ici celle utilisée dans [8], [2], [33]. Une définition plus sophistiquée est proposée dans [34] ou [36] mais nécessite l'introduction d'une nouvelle classe d'opérateurs pseudodifférentiels au bord (différente de celle de [3]) que nous ne présentons pas ici.

On considère une variété C^∞ à bord M de dimension $(n+1)$ et on choisit au voisinage d'un point m de ∂M un système de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de sorte que m est le point $(0, 0)$ et que M est définie localement par : $x \geq 0$. Les coordonnées duales dans T^*M sont données par (ξ, η) de sorte que y et (y, η) forment un système de coordonnées naturelles dans ∂M et $T^*\partial M$.

Considérons un point σ de $\dot{T}_m^* \partial M$, alors u est dit C^∞ jusqu'au bord

en σ dans les coordonnées (x, y) , s'il existe un opérateur pseudodifférentiel A dans $\text{OPS}^0(\mathbb{R}^n)$, à support compact (i. e. son noyau distribution est à support compact), elliptique en σ , tel que :

$$A(y, D_y)u(x, y) \Big|_{0 \leq x \leq \varepsilon} \in C^\infty([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}_y^n).$$

Cette définition reste très liée à un choix de coordonnées. Cependant, lorsqu'on ne considère que des distributions prolongeables u qui vérifient : $Pu \in C^\infty(M)$, avec P satisfaisant à (Pr 3), on peut montrer que cette notion est indépendante du choix de coordonnées et de l'opérateur A .

On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION.— Soit u dans $\mathcal{D}'(M)$ telle que Pu soit dans $C^\infty(M)$, où P est non caractéristique sur ∂M (condition Pr 3), alors on définit le front d'onde au bord de u $\text{WF}_b(u)$ dans $\text{BM} = \dot{T}^*M \cup \dot{T}^*\partial M$ par :

$$\text{Si } \rho \in \dot{T}^*\dot{M}, \quad \rho \in \text{WF}_b u \iff \rho \in \text{WF}(u/\dot{M}).$$

$$\text{Si } \rho \in \dot{T}^*\partial M, \quad \rho \notin \text{WF}_b u \iff u \text{ est } C^\infty \text{ jusqu'au bord au sens ci-dessus.}$$

2.2. Classification des points du bord

Si b désigne la projection de $\dot{T}^*M$ sur BM , on désigne par Σ_b l'image de $\Sigma(p)$ par b . p est ici le symbole d'un opérateur différentiel du second ordre de type principal réel jusqu'au bord.

$$\begin{aligned} \text{On pose : } \Sigma_b^0 &= \Sigma_b \cap \dot{T}^*\dot{M} \\ \Sigma_b^1 &= \{ \rho \in \Sigma_b, \ b^{-1}(\rho) \text{ contient deux points} \}. \end{aligned}$$

Dans un système de coordonnées convenables, on peut supposer que M est définie dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^n$ par $x \geq 0$ et que : $p = \xi^2 + r(x, y, \eta)$ où r vérifie la condition : dr et $\sum_{j=1}^n \eta_j dy^j$ sont linéairement indépendants. On voit alors facilement que :

$$\Sigma_b^1 = \{ (y, \eta) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n ; r(0, y, \eta) < 0 \}$$

$$\text{et que : } \Sigma_b \setminus (\Sigma_b^0 \cup \overset{\text{déf}}{\Sigma_b^1}) \equiv G = \{ (y, \eta) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n ; r(0, y, \eta) = 0 \},$$

G est appelé l'ensemble des points glancing.

Pour $k \geq 2$, on pose :

$$\Sigma_b^k = \{ \rho \in G ; H_P^j x = 0, \ j \leq k-1 ; H_P^k x \neq 0 \text{ en } b^{-1}(\rho) \}$$

où x est une fonction telle que M est définie par $x \geq 0$ et telle que dx est

non nulle en tout point de ∂M .

Enfin, on pose : $\Sigma_b^\infty = \{\rho \in G ; H_p^j x = 0 \text{ pour tout } j \text{ en } b^{-1}(\rho)\}$

et $\Sigma_b^{(k)} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \Sigma_b^j$.

2.3. Etude de Σ_b^2 , théorème d'équivalence des hypersurfaces glancing

Si ρ est dans Σ_b^2 , $b^{-1}(\rho)$ consiste en un point μ , on définit :

$$\Sigma_b^{2,\pm} = \{\rho \in \Sigma_b^2 ; H_p^2 x \lesseqgtr 0 \text{ en } \mu\}.$$

Si ρ est dans $\Sigma_b^{2,+}$, alors la courbe intégrale de H_p passant par μ quitte $\dot{T}^*M$ pour t non nul. On est dans le cas "glissant".

Si ρ est dans $\Sigma_b^{2,-}$, alors la courbe intégrale de H_p passant par μ rentre dans $\dot{T}^*M$ pour t non nul. On est dans le cas "rasant" ou "diffractif".

L'étude de Σ_b^2 a conduit R. B. Melrose [30] à résoudre un joli problème de géométrie symplectique. La motivation est la suivante : comme au paragraphe (1.1), on cherche à simplifier le problème en trouvant une transformation canonique homogène κ telle que $p \circ \kappa^{-1}$ ait une allure sympathique. Mais ici, on doit de plus "conserver" le bord de M .

Théorème d'équivalence des hypersurfaces glancing. Soient ρ dans $\dot{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$ et f et g deux fonctions C^∞ dans $\dot{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$ homogènes respectivement d'ordre 0 et 2

vérifiant : df, dg et $\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j dx_j$ linéairement indépendants en ρ

$$f(\rho) = g(\rho) = \{f, g\}(\rho) = 0$$

$$\{f, \{f, g\}\}(\rho) \neq 0, \quad \{g, \{g, f\}\}(\rho) \neq 0,$$

alors il existe une transformation canonique homogène κ et des symboles elliptiques

a_1 et a_2 tels que :

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (f \circ \kappa^{-1}) &= x \\ a_2 \cdot (g \circ \kappa^{-1}) &= \xi^2 + x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n, \end{aligned}$$

où $\kappa(\rho) = (x, y, \xi, \eta)$ est le point ($x = \xi = 0 ; \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = 1, y^1 = \dots = y^n = 0$).

Tous les couples d'hypersurfaces glancing non dégénérées (i.e. dans Σ_b^2) sont équivalents et la forme normale ne dépend que de la dimension. Le théorème est faux dans la catégorie analytique [40] et il n'y a pas de théorème équivalent dans $\Sigma_b^{(3)}$ (cf. [30]).

En fait le théorème ci-dessus est suffisant dans la démarche adoptée dans [2], mais il reste insuffisant lorsqu'on veut construire des paramétrixes.

Dans [32] et [36], R. B. Melrose propose une définition plus restrictive de transformation canonique pour une variété à bord et une théorie des Fourier-Intégraux associés à ces transformations canoniques.

Il montre alors qu'en un point du bord, on peut microlocalement se ramener par une transformation canonique aux modèles suivants au voisinage du point $(y^1 = \dots = y^n = 0, \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = 1)$ de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$.

En dehors de Σ_b : $D_x^2 + D_{y_n}^2$ (cas elliptique cf. [3][17][18])

En un point de Σ_b^1 : (Figure 2) $D_x^2 - D_{y_n}^2$ (cas hyperbolique cf. [5][39][43])

En un point de $\Sigma_b^{2,-}$: (Figure 3) $D_x^2 - x D_{y_n}^2 + D_{y_1} D_{y_n}$ (cas rasant cf. [14][29][12][44])

En un point de $\Sigma_b^{2,+}$: (Figure 4) $D_x^2 + x D_{y_n}^2 + D_{y_1} D_{y_n}$ (cas glissant cf. [2] [12])

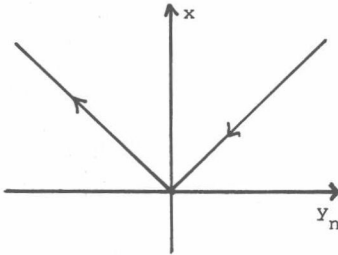


Figure 2 - Projection des bicaractéristiques dans $\mathbb{R}^2$

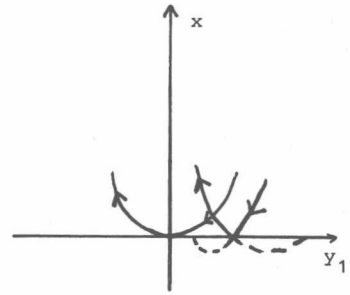


Figure 3

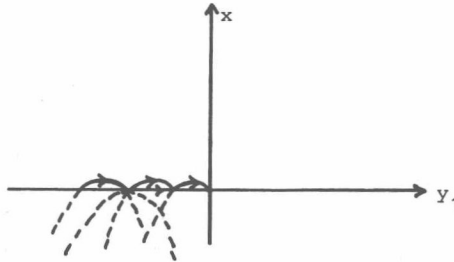


Figure 4 (c'est la figure 3 regardée dans les x négatifs !)