Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1322

M. Métivier S. Watanabe (Eds.)

Stochastic Analysis

Proceedings, Paris 1987

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1322

M. Métivier S. Watanabe (Eds.)

Stochastic Analysis

Proceedings of the Japanese-French Seminar held in Paris, France, June 16–19, 1987

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editors

Michel Métivier
Département de Mathématiques Appliquées
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France

Shinzo Watanabe
Department of Mathematics, Faculty of Science
Kyoto University, Kyoto, 606 Japan

Mathematics Subject Classification (1980): 60F, 60G, 60H, 60J

ISBN 3-540-19352-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-19352-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

PREFACE

As a project under the France-Japan Cooperative Science Program sponsored by C.N.R.S. (Centre National de la Recherche Scientifique) and J.S.P.S. (Japan Society for the Promotion of Science), a joint seminar on probability theory was held June 16-19, 1987, at Ecole Normale Supérieure, Paris. The main theme was stochastic analysis and applications to large scale systems. Nineteen lectures were presented on various topics like the Malliavin calculus, infinite dimensional stochastic differential equations and stochastic partial differential equations, limit theorems for particle systems, diffusions in random environment, hydrodynamical models, etc.

This volume of the Springer Lecture Notes is devoted to the original papers presented by the participants. A few lectures given at the seminar correspond to papers already published or being published elsewhere and are therefore absent from this volume. Because of the variety of the problems studied in those lectures, we did not find proper to try to group them -rather artificially- by topics, and adopted the alphabetic order of authors.

We would express our sincere thanks to contributors of this volume, all the participants of the seminar and also to Professor T. Hida who could not participate but, without whose kind advice and suggestions, this seminar could not have been realized.

It is also our pleasure to give our appreciation to Springer-Verlag for the prompt and efficient publication of the volume and Mrs Jeanne Bailleul for her help in the organization of the meeting and the preparation of the final volume.

February 5, 1988

Michel METIVIER - Shinzo WATANABE

LIST OF PARTICIPANTS

D. BAKRY	Université Louis Pasteur, UER de Mathématiques 7, rue René Descartes. 67084 Strasbourg Cédex (France)
G. BEN AROUS	Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Normale Supérieure 45, rue d'Ulm. 75230 Paris Cédex 05 (France)
J.-M. BISMUT	UER 3e Cycle de Mathématiques. Université de Paris Sud Bâtiment 425. 91405 Orsay Cédex (France)
M. CHALEYAT-MAUREL	Laboratoire de Probabilités. Tour 56. Université de Paris VI 4, place Jussieu. 75252 Paris Cédex 05 (France)
N. EL KAROUI	Laboratoire de Probabilités. Tour 56. Université de Paris VI 4, place Jussieu. 75252 Paris Cédex 05 (France)
M. FUKUSHIMA	Department of Mathematics. College of General Education. Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560 (Japan)
T. FUNAKI	Department of Mathematics. Faculty of Science. Nagoya University, Nagoya, 464 (Japan)
B. GAVEAU	UER 47. Laboratoire Analyse Complexe et Géométrie. Tour 45-46. Université Paris VI. 4, pl. Jussieu. 75252 Paris Cx 05 (France)
N. IKEDA	Department of Mathematics. Faculty of Science Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560 (Japan)
K. ITO	RIMS, Kyoto University, Kyoto, 606 (Japan)
J. JACOD	Laboratoire de Probabilités. Tour 56. Université de Paris VI 4, place Jussieu. 75252 Paris Cédex 05 (France)
Y. KASAHARA	Institute of Mathematics. University of Tsukuba. Sakuramura. Ibaraki 305 (Japan)
C. KIPNIS	Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Polytechnique. 91128 Palaiseau Cédex (France)
S. KUSUOKA	RIMS. University of Kyoto, Kyoto, 606 (Japan)
R. LEANDRE	Département de Mathématiques. Faculté des Sciences de Besançon 25030 Besançon Cédex (France)
Y. LE JAN	Laboratoire de Probabilités. Tour 56. Université de Paris VI 4, place Jussieu. 75252 Paris Cédex 05 (France)
P. MALLIAVIN	10, rue Saint-Louis-en-l'Ile. 75004 Paris (France)
M. METIVIER	Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cédex (France)
P.-A. MEYER	Institut de Recherche Mathématique Avancée. Rue du Général Zimmer. 67084 Strasbourg Cédex (France)

J. NEVEU — Laboratoire de Probabilités. Tour 56. Université de Paris VI
4, place Jussieu. 75252 Paris Cédex 05 (France)

A.-S. SZNITMAN — Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University
251 Mercer Street. New York. N. Y. 10012 (U.S.A.)

H. TANAKA — Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology
Keio University, Yokohama, 223 (Japan)

S. WATANABE — Department of Mathematics. Faculty of Science
Kyoto University. Kyoto, 606 (Japan)

TITLES OF LECTURES WHICH HAVE BEEN PUBLISHED SEPARATELY

C. KIPNIS and S. OLLA
Large deviations from the hydrodynamical limit for a system of independent Brownian particles.

J. NEVEU
Multiplicative martingales for spatial branching processes.

A.-S. SZNITMAN
Propagation of chaos for annihilating Brownian spheres.

TABLE OF CONTENTS

NOYAU DE LA CHALEUR HYPOELLIPTIQUE ET GEOMETRIE SOUS-RIEMANNIENNE

Gérard BEN AROUS
Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm. 75230 Paris Cédex 05 (France)

I. INTRODUCTION

Nous allons décrire dans cet article les principaux résultats connus sur le comportement asymptotique du noyau de la chaleur associé à un opérateur elliptique dégénéré, illustrer les principaux phénomènes par des exemples et poser quelques problèmes encore ouverts.

Dans la suite, on considérera l'opérateur :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_o \tag{1.1}$$

où les X_i sont des champs de vecteurs C_b^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

On fera toujours l'hypothèse de Hörmander forte :

$$\mathrm{Lie}(X_1 \ldots X_m)(x) = \mathbb{R}^d \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{1.2}$$

qui assure que les opérateurs $\partial_t - L$ et L sont hypoelliptiques.

Soit alors $p_t(x,y)$ le noyau de la chaleur associé à L , c'est-à-dire la solution fondamentale de $\partial_t - L$, ou encore la densité de la loi de la diffusion $x_t(x)$ associée à L issue de x .

Cette diffusion est donnée par la solution de l'équation stochastique prise au sens de Stratonovitch :

$$\begin{cases} dx_t(x) = \sum_{i=1}^{m} X_i(x_t(x))dw_t^i + X_o(x_t(x))dt \\ x_o(x) = x \,, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $(W_\cdot^i)_{1\leq i\leq m}$ désigne un mouvement brownien m-dimensionnel.

Nous voulons étudier ici le comportement asymptotique de $p_t(x,y)$ lorsque t tend vers zéro, ou encore le comportement asymptotique, lorsque ε tend vers zéro, de $p_1^\varepsilon(x,y)$ où $p_t^\varepsilon(x,y)$ est la densité de la loi de la solution $x_t^\varepsilon(x)$ de :

$$\begin{cases} dx_t^\varepsilon(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{m} X_i(x_t^\varepsilon(x))dw_t^i + \varepsilon^2 X_o(x_t^\varepsilon(x)dt \\ x_o^\varepsilon(x) = x \,. \end{cases} \tag{1.4}$$

En effet, par scaling évident, on a : $p_{\varepsilon^2 t}(x,y) = p_t^\varepsilon(x,y)$.

Nous noterons H^1 l'espace des fonctions à dérivées L^2 sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, nulles en 0. Nous noterons $\overset{\circ}{h}$ la dérivée de $h \in H^1$ et $|h|_1$ la norme de h définie par :

$$|h|_1^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 |\overset{\circ}{h}{}^i_s|^2 \, ds \,. \tag{1.5}$$

Considérons alors, pour $x \in \mathbb{R}^d$, l'application Φ^x qui, à un élément h de H^1 associe la solution $\varphi = \Phi^x(h)$ de l'équation :

$$\begin{cases} d\varphi_t = \sum_{i=1}^{m} X_i(\varphi_t)\, \overset{\circ}{h}{}^i_t \, dt \\ \varphi_o = x \,. \end{cases} \tag{1.6}$$

On dira que $\varphi \in \Phi^x(H^1)$ est une courbe horizontale issue de x.
Pour x et y dans $\mathbb{R}^d$, considérons le sous-ensemble K_x^y de H^1 défini par :

$$K_x^y = \{h \in H^1 \ / \ \Phi_1^x(h) = y\} = (\Phi_1^x)^{-1}(\{y\}) \,. \tag{1.7}$$

Par l'hypothèse (1.2), cet ensemble est non vide ; on définit alors la distance sous-riemannienne (ou de Carnot-Carathéodory) par :

$$d^2(x,y) = \inf(|h|_1^2 \,,\, h \in K_x^y) \,. \tag{1.8}$$

L'infimum est atteint dans (1.8) et d définit une distance continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (*cf.* [8], p. 33).
Si L est elliptique, cette distance coïncide avec la distance riemannienne associée à la métrique riemannienne définie par l'inverse du symbole principal de $2L$. Rappelons qu'alors L s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}\Delta + X \tag{1.9}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami pour cette métrique et X un champ de vecteur.
Le premier pas dans l'étude asymptotique de $p_t(x,y)$ a été fait par Léandre ([13]) et généralise le résultat de Varadhan [19] relatif au cas elliptique :

THÉORÈME 1.10.- *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\lim_{t\to o} t \log p_t(x,y) = -\frac{1}{2} d^2(x,y)$$

Remarque 1.11.- Ce résultat pourrait être obtenu de façon purement analytique en utilisant la technique introduite par Kannaï [11] dans le cas elliptique. C'est alors un résultat sur la vitesse de propagation des ondes pour l'opérateur $\partial_t^2 - L$.

II. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU DE LA CHALEUR HORS DU CUT-LOCUS

1. Le cut-locus sous-riemannien

Nous allons ici donner le comportement asymptotique précis du noyau de la chaleur $p_t(x,y)$ pour les "bons points" (x,y), i.e. les points hors du cut-locus. Commençons par définir cette notion de cut-locus qui généralise la notion correspondante dans le cas riemannien et qui a été introduite par Bismut [8].
Considérons le hamiltonien H associé à L, sur le cotangent de $\mathbb{R}^d$:

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \langle X_i(x),p\rangle^2 \quad \text{pour} \quad (x,p) \in T^*\mathbb{R}^d \tag{2.1}$$

et notons $\psi_t(x,p)$ le flot hamiltonien associé à H issu de (x,p), et π la projection de $T^*\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION (2.2).- *Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^d$, le couple (x,y) n'est pas dans le cut-locus si et seulement si :*

1) *Il existe un unique $h_o \in K_x^y$ tel que : $|h_o|_1^2 = d^2(x,y)$.*
2) *Il existe un unique $p_o \in T^*\mathbb{R}^d$ tel que : $\Phi_t^x(h_o) = \pi\psi_t(x,p_o)$ $\forall t \in [0,1]$.*
3) *x et y sont non conjugués, i.e. : $\partial_p \pi\psi_1(x,.)_{|p=p_o}$ est inversible.*

On dira que h_o est la minimisante qui joint x à h, et que $\Phi^x(h_o)$ est la géodésique qui joint x à y.

Remarque (2.3).- Cette définition coïncide avec la définition du cut-locus riemannien lorsque L est elliptique. En effet, dans ce cas, toute géodésique est projection d'une bicaractéristique et la condition 2) est toujours satisfaite. L'application qui, à $p \in T_x^*\mathbb{R}^d$ associe $\pi\psi_1(x,p)$ est alors simplement l'application exponentielle riemannienne usuelle $\exp_x$ (après identification de $T_x^*\mathbb{R}^d$ et de $T_x\mathbb{R}^d$).

Dans le cas où L est dégénéré, s'il est clair que la projection $\pi\psi_.(x,p)$ d'une bicaractéristique $\psi_.(x,p)$ est une courbe horizontale issue de x, il n'est pas évident par contre qu'une courbe horizontale issue de x (et en particulier la géodésique $\Phi_.^x(h_o)$) soit la projection d'une bicaractéristique. Le problème est de passer de la formulation lagrangienne du problème de minimum (1.8) à une formulation hamiltonienne ; c'est-à-dire d'être capable de définir un "état dual", ou encore d'écrire l'équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par les géodésiques.

Les propriétés du cut-locus ainsi défini sont celles que l'on attend (*cf.* [8] et [3]) :

PROPOSITION (2.4).- 1) *Le cut-locus est fermé dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.*

2) *$d^2(x,y)$ est une fonction C^∞ de (x,y) sur le complémentaire du cut-locus.*

3) *L'unique minimisante h_o définie au 1) de la définition (2.2) varie de façon C^∞ en fonction de x et y, lorsque x et y varient dans le complémentaire du cut-locus.*

Remarque (2.5).- Dans le cas où L est elliptique, le complémentaire du cut-locus est un voisinage de la diagonale de $\mathbb{R}^d$ $\mathbb{R}^d$; ainsi deux points assez proches sont de "bons points". Ceci est faux si L n'est pas elliptique, précisément le cut-locus rencontre la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ exactement aux points (x,x) tels que L n'est pas elliptique en x .

Bismut a isolé ([8], th. 1.17) une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une courbe horizontale soit la projection d'une (unique) bicaractéristique :

PROPOSITION (2.6).- *Si l'application* Φ_1^x *de* H^1 *dans* $\mathbb{R}^d$ *est une submersion en* $h_o \in H^1$ (i.e. $d\Phi_1^x(h_o)(H^1) = \mathbb{R}^d$), *alors il existe un unique* $p_o \in T_x^*\mathbb{R}^d$ *tel que* : $\forall t \in [0,1]$ $\pi\psi_t(x,p_o) = \Phi_t^x(h_o)$.

Il est facile de vérifier que cette condition de submersion est équivalente à la non-dégénérescence de la forme quadratique définie sur $T_x^*\mathbb{R}^d$ par :

$$<C^{h_o,x}p,p> = \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 <\Phi_s(h_o)^{*-1}X_i(x),p>^2 \, ds \tag{2.7}$$

où $\Phi_s(h)$ désigne le flot de difféomorphismes défini par l'équation (1.6). $C^{h_o,x}$ est appelée matrice de Malliavin déterministe de h_o (en x).

Remarque (2.8).- On peut vérifier (*cf.* [3]) que dans la définition (2.2) du cut-locus, on peut remplacer la condition 2) par la condition 2 bis) suivante :

2 bis) Φ_1^x est une submersion en h_o .

La proposition (2.6) montre que 2 bis) implique 2); en fait, grâce à l'hypothèse 3) de la définition (2.2), 2) implique 2 bis).

En fait, on peut même affaiblir 2 bis) et la remplacer par :

2 ter) $d\Phi_1^x(h)$ est de rang localement constant au voisinage de h_o .

La condition 2 ter) est la condition naturelle pour assurer que l'ensemble $K_x^y = (\Phi_1^x)^{-1}\{y\}$ est une sous-variété hilbertienne de l'espace H^1 au voisinage de la minimisante h_o . Les points (x,y) tels que 2 ter) ne serait pas vérifié sont donc tels que l'ensemble des chemins K_x^y a une structure très singulière au voisinage de la minimisante h_o .

Un problème ouvert :

Nous mentionnons ici le fait que nous ne connaissons pas un seul exemple de points joints par une géodésique qui ne soit pas la projection d'une bicaractéristique. En effet, le contre-exemple fourni par [9] ne semble pas correct.

Signalons enfin que dans un article récent Strichartz [18] a donné une condition suffisante (la "strong bracket generating hypothesis") pour que toute géodésique soit projection d'une bicaractéristique. Cette condition contient la condition donnée par Bismut ([8], déf. 1.9) sous le nom d'hypothèse H2. La version publiée de [18] qui affirme trop rapidement que toute géodésique est projection d'une bicaractéristique sans aucune condition a en effet été récemment corrigée. Il serait très intéressant de savoir ce que deviennent les résultats très complets de Strichartz sans cette condition.

2. Le développement asymptotique du noyau de la chaleur

Pour des points (x,y) hors du cut-locus, le comportement du noyau de la chaleur en temps petit est analogue à celui du noyau de la chaleur elliptique. Cette conjecture, due à Bismut [8], a trouvé une réponse positive (dans [3] et [15]).

THÉORÈME (2.9) ([3]).- *Pour* (x,y) *hors du cut-locus, et* $n \geq 0$ *, on a le développement asymptotique à l'ordre* n :

$$p_t(x,y) = \frac{1}{t^{d/2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{2t}} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j(x,y) t^j + t^{n+1} r_{n+1}(t,x,y) \right) \tag{2.10}$$

où :

a) *Les* c_j *sont des fonctions* C^∞ *sur le complémentaire du cut-locus.*

b) $c_0(x,y) > 0$.

c) *Pour tout compact* K *inclus dans le complémentaire du cut-locus, pour tous multi-indices* α, β *et tout entier* m *, il existe* $t_0 > 0$ *tel que*

$$\sup_{t \leq t_0} \sup_{x,y \in K} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^m r_{n+1}(t,x,y)| < \infty \ . \tag{2.11}$$

Ainsi le développement asymptotique (2.10) est uniforme sur les compacts qui ne rencontrent pas le cut-locus et la majoration (2.11) donne aussi évidemment un développement asymptotique de toutes les dérivées du noyau de la chaleur $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_t^m p_t(x,y)$. Ce qui permet, grâce à l'équation satisfaite par $p_t(x,y)$, de vérifier que d est solution sur le complémentaire du cut-locus de l'équation de Hamilton - Jacobi $\sum_{i=1}^{m} (X_i d)^2 = 1$, et que les coefficients c_j sont solutions des équations de transport évidentes.

Nous allons donner ici une idée très rapide de la preuve du théorème (2.9) :
Soit F une fonction C^∞ bornée sur $\mathbb{R}^d$; par inversion de Fourier, on a :

$$p_1^\varepsilon(x,y)\, e^{-\frac{F(y)}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\xi\, E\left(e^{i\xi.(x_1^\varepsilon(x)-y)}\, e^{-\frac{F(x_1^\varepsilon(x))}{\varepsilon^2}} \right),$$

avec les notations de (1.4). Ou encore, après le changement de variable $\zeta = \varepsilon\xi$:

$$p_1^\varepsilon(x,y)\, e^{-\frac{F(y)}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int d\zeta\, E\left(e^{i\zeta.\left(\frac{x_1^\varepsilon - y}{\varepsilon}\right)}\, e^{-\frac{F(x_1^\varepsilon)}{\varepsilon^2}} \right).$$

Si on choisit F tel que l'infimum de $F + \frac{1}{2} d^2(x,.)$ soit atteint en y et que ce minimum soit non dégénéré (par exemple $F(z) = -\frac{1}{2} d^2(x,z) + |z-y|^2$) , les résultats de [6] sur la méthode de Laplace permettent d'évaluer asymptotiquement, à ζ fixé, l'espérance : $E\left(e^{i\zeta \frac{x^\varepsilon - y}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{F(x_1^\varepsilon)}{\varepsilon^2}} \right)$.

En effet, dire que (x,y) n'est pas dans le cut-locus revient exactement à dire que les hypothèses variationnelles nécessaires pour utiliser les résultats de [6] sont

vérifiées dans cette situation très simple où la fonctionnelle $F(x_1^\varepsilon)$ ne dépend que du point final de la diffusion.
Enfin, le calcul de Malliavin permet d'intégrer en ζ ce développement asymptotique grâce à l'hypothèse de non-dégénérescence de la matrice de Malliavin déterministe (2.7). On obtient ainsi le développement cherché de $p_1^\varepsilon(x,y)$.

La nature de cette preuve est nouvelle, même dans le cas elliptique, son caractère essentiel étant d'utiliser directement les hypothèses variationnelles qui traduisent le fait que (x,y) n'est pas dans le cut-locus, à savoir que la géodésique réalise un minimum non dégénéré de l'énergie. En particulier, même dans le cas elliptique, elle a ceci de nouveau par rapport à la preuve de Molchanov [16] qu'elle n'utilise pas un résultat vrai pour des points proches, résultat que l'on propagerait aux points lointains grâce à la relation de semi-groupe. Ceci est important pour le cas dégénéré, car cette dernière approche n'est plus du tout possible dans ce cas si on veut un résultat fin sur $p_t(x,y)$.

3. Quelques exemples

a) *Le cas elliptique*

Si l'opérateur L est elliptique, le résultat du théorème (2.9) est bien connu (*cf.* [16], [1], [2], [8], [11] par exemple).
Rappelons simplement que, dans ce cas, la définition (2.2) coïncide avec celle de cut-locus riemannien usuel.

b) *Un exemple non-elliptique bien connu : le groupe d'Heisenberg*

Considérons, dans $\mathbb{R}^3$, les champs $X_1 = \partial_{x_1} - 2x_2\partial_{x_3}$ et $X_2 = \partial_{x_2} + 2x_1\partial_{x_3}$ et l'opérateur $L = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$.
Ces champs vérifient l'hypothèse H2 de Bismut, à savoir :

a) les champs X_i sont linéairement indépendants, et

b) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, si on pose $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, les champs : $X_1, X_2, [Y,X_1], [Y,X_2]$ engendrent $\mathbb{R}^3$ en tout point.

Ceci montre (*cf.* [8], th. 1.10) que, pour tout $h \in H^1 \setminus \{0\}$, la matrice de Malliavin déterministe $C^{h,x}$ est inversible et donc, par la proposition (2.6), que toute courbe horizontale non constante est projection d'une unique bicaractéristique. On peut calculer explicitement le flot hamiltonien (voir [9] et [2]), et on vérifie que le cut-locus est constitué des couples (x,y) tels que $x_i = y_i$ $i \in \{1,2\}$.
Ou encore, si on identifie $\mathbb{R}^3$ au groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}$, et X_1, X_2 aux champs invariants à gauche qui engendrent l'algèbre de Lie de $\mathbb{H}$, le cut-locus est constitué des couples (x,y) avec $y-x$ dans le centre de $\mathbb{H}$.
Pour (x,y) hors du cut-locus, on obtient donc le développement asymptotique (2.10) qui est bien connu depuis que Gaveau [9] a montré comment il se déduit très simplement de la formule de l'aire de Paul Lévy.
Cet exemple, où L n'est elliptique nulle part, montre que le théorème (2.9) ne concerne pas que des cas "quasi-elliptiques". Cependant, on pourrait croire que

l'hypothèse H2 joue un rôle crucial, et en particulier que le théorème (2.9) ne s'applique que dans des cas où les crochets de longueur ≤ 2 des champs X_i suffisent pour engendrer l'espace tangent.
L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien.

c) *Un exemple arbitrairement dégénéré*

L'exemple qui suit provient d'une discussion avec R. Léandre et sera développé dans un travail futur.
Considérons sur $\mathbb{R}^d$ (avec $d \geq 2$) les deux champs de vecteurs :

$$X_1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{i=2}^{m} x_1^{k_i} \partial_{x_i}$$

où $k_2 < k_3 < \ldots < k_d$ sont des entiers positifs.
L'opérateur $L = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)$ satisfait à la condition de Hörmander forte (1.2), mais bien sûr L n'est nulle part elliptique si $d > 2$.
De plus, il est clair que la longueur des crochets des champs X_i nécessaires pour engendrer $\mathbb{R}^d$ tend vers l'infini avec la dimension d .
Soit, pour des réels positifs C,D,δ l'ensemble :

$$A(C,D,\delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ , \ C < |y_1 - x_1| < D \ , \ |y_i - x_i| < \delta \ \ \forall i \geq 2\} \ .$$

On a alors :

PROPOSITION (2.12).- *Pour tous réels positifs* $0 < C < D$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $A(C,D,\delta)$ *ne rencontre pas le cut-locus et donc tel que le développement asymptotique du noyau de la chaleur associé à* L *soit donné par le théorème* (2.9) *pour* $(x,y) \in A(C,D,\delta)$.

Preuve.- Le cut-locus étant fermé, il suffit de vérifier que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que : $x_1 \neq y_1$ et $x_i = y_i$ $i \geq 2$, alors (x,y) ne soit pas dans le cut-locus.
Soit donc un tel couple (x,y) et $h \in K_x^y$, on a alors $\Phi_t^x(h) = (x_i(t))_{1\leq i\leq d}$ avec :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1 + h_t^1 \\ x_i(t) = x_i + \displaystyle\int_0^t (h_s^1)^{k_i} dh_s^2 \ , \text{ pour } i \geq 2 \ . \end{cases} \tag{2.13}$$

d'où : $|h|_1^2 \geq |h^1|_1^2 \geq |y_1 - x_1|^2$, ainsi $d^2(x,y) \geq |y_1 - x_1|^2$.
Mais en choisissant $h_s^1 = (y_1 - x_1)s$ et $h_s^2 \equiv 0$, on vérifie que $h \in K_x^y$ et que h est l'unique élément de K_x^y tel que : $|h|_1^2 = d^2(x,y)$, où bien sûr la distance hypoelliptique $d^2(x,y)$ est ici égale à la distance euclidienne :

$$d^2(x,y) = \|y - x\|^2 = |y_1 - x_1|^2 \tag{2.14}$$

Ainsi, le 1) de la définition (2.2) est vérifié.
D'autre part, le hamiltonien est ici égal à :

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \left(\sum_{i=2}^{m} x_1^{k_i} p_i\right)^2\right) \ . \tag{2.15}$$

Le flot hamiltonien associé $\psi_t(x,p) = (x_t, p_t)$ est donné par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1}{dt} = p_1 & \dfrac{dp_1}{dt} = -\sum\limits_{i=2}^{d} k_i x_1^{k_i - 1} p_i \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \left(\sum\limits_{j=2}^{d} x_1^{k_j} p_j\right) x_1^{k_i} & \dfrac{dp_i}{dt} = 0 \qquad d \geq i \geq 2 . \end{array}\right. \tag{2.16}$$

On vérifie ainsi qu'il existe un unique $p_o \in T_x^*\mathbb{R}^d$ (à savoir $p_o = (y_1 - x_1, 0, \ldots, 0)$) tel que : $\forall t \in [0,1]$ $\Phi_t^x(t) = \pi\psi_t(x,p_o)$.

Le 2) de la définition (2.2) est donc vérifié.

Il reste à montrer que les points x et y sont non conjugués :

Le jacobien $\partial_p \pi\psi_1(x,.)_{|p=p_o}$ se calcule aisément par (2.16) :

$$\partial_p \pi\psi_1(x,.)_{|p=p_o} = \begin{pmatrix} 1 & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

où la matrice $(d-1) \times (d-1)$ A est donnée par : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq d-1}$ et

$$a_{ij} = \int_0^1 x_1(s)^{k_i + k_j} ds = \int_0^1 (x_1 + s(y_1 - x_1))^{k_i + k_j} ds . \tag{2.18}$$

Or A est inversible, comme matrice de Gram (pour le produit scalaire de L^2) des fonctions $s \longrightarrow x_1(s)^{k_i}$ $(2 \leq i \leq d)$. En effet, ces fonctions sont linéairement indépendantes du fait que les k_i sont distincts et que $x_1(s)$ n'est pas constante puisque $x_1 \neq y_1$.

Ainsi $\partial_p \pi\psi_1(x,.)_{|p=p_o}$ est inversible, ce qui montre que x et y sont non conjugués et achève la preuve de la proposition.

En fait, il est possible de retrouver, sur cet exemple, le résultat du théorème (2.9) par un calcul direct que nous indiquons rapidement.

Soit $x_t^\varepsilon(x)$ la diffusion de générateur $\varepsilon^2 L$ issue de x . L'équation (1.4) s'écrit ici :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^\varepsilon(t) = x_1 + \varepsilon w_t^1 \\ x_i^\varepsilon(t) = x_i + \varepsilon \displaystyle\int_0^t (\varepsilon w_s^1 + x_1)^{k_i} dw_s^2 , \qquad i \geq 2 \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Conditionnellement à $w_\cdot^1$, $(x_i^\varepsilon(t))_{i \geq 2}$ est une variable gaussienne de moyenne $(x_i)_{i \geq 2}$, et de covariance $\varepsilon^2 \Gamma^\varepsilon(t)$ donnée par :

$$\Gamma_{ij}^\varepsilon(t) = \int_0^t (x_1 + \varepsilon w_s^1)^{k_i + k_j} ds , \qquad 2 \leq i,j \leq d \tag{2.20}$$

On obtient ainsi l'expression du noyau de la chaleur :

$$p_{\varepsilon^2}(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\varepsilon)^d}\, e^{-\frac{|y_1 - x_1|^2}{2\varepsilon^2}}\, E\left((\det \Gamma^\varepsilon(1))^{-\frac{1}{2}} \,\middle|\, \varepsilon w_1(1) = y_1 - x_1\right) \tag{2.21}$$

pour (x,y) tels que : $y_i - x_i = 0$ si $i \in \{2 \ldots d\}$.

Or le pont brownien converge vers le segment $s \longrightarrow s(y_1 - x_1)$ lorsque ε tend vers zéro, et $\Gamma^{\varepsilon}(1)$ converge vers la matrice A introduite en (2.18).
Si $y_1 - x_1 \neq 0$, on peut montrer que $E((\det \Gamma^{\varepsilon}(1))^{-1/2} \mid \varepsilon w_1(1) = y_1 - x_1)$ converge vers $(\det A)^{-1/2}$ et on obtient ainsi l'équivalent :

$$p_{\varepsilon^2}(x,y) \sim \frac{(\det A)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\frac{|y_1-x_1|^2}{2\varepsilon^2}},$$

ce qui, compte tenu de (2.14), est exactement le résultat donné par la proposition (2.12) (ou le théorème (2.9)).
Le développement asymptotique complet s'obtiendrait en développant (en puissances de ε) $(\det \Gamma^{\varepsilon}(1))^{-1/2}$.
Ce calcul donne aussi la valeur des coefficients du développement au moins pour les points x,y tels que $x_i - y_i = 0 \quad 2 \leq i \leq d$ et $x_1 - y_1 \neq 0$.

III. NOYAU DE LA CHALEUR SUR LA DIAGONALE

1. Le théorème

Les résultats du II ne concernent pas le comportement asymptotique du noyau de la chaleur sur la diagonale, c'est-à-dire de $p_t(x,x)$ car comme on l'a vu (x,x) est dans le cut-locus si L n'est pas elliptique en x.

Nous allons donner ce comportement asymptotique dans le cas particulier où *le drift* X_0 *est nul*. Nous consacrerons une section à l'influence (surprenante) du drift sur ce comportement asymptotique.

L'étude faite ici est donc la première approche pour comprendre le comportement asymptotique du noyau de la chaleur sur le cut-locus.

Commençons par introduire quelques notations :

Soit, pour tout entier $k \geq 0$, l'espace vectoriel $C_k(x)$ engendré par les crochets des champs $(X_i)_{1\leq i\leq m}$, de longueur inférieure ou égale à k, pris au point $x \in \mathbb{R}^d$.

Par l'hypothèse (1.2), il existe un entier $r(x)$ tel que : $C_{r(x)}(x) = \mathbb{R}^d$. Notons

$Q(x) = \sum_{k=1}^{r(x)} k(\dim C_k(x) - \dim C_{k-1}(x))$.

Soit la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^d$:

$$x \sim y \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad \dim C_k(x) = \dim C_k(y) \tag{3.1}$$

et notons $[x]$ la classe d'équivalence de x.

Nous allons voir que le comportement de $p_t(x,x)$ dépend de ce que nous appellerons "la géométrie en x", i.e. la classe d'équivalence $[x]$.

On a en effet, avec les notations et les hypothèses précédentes (en particulier $X_0 = 0$) :

THÉORÈME (3.2) (cf. [4] et [14]).- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a le développement asymptotique à l'ordre* n

$$p_t(x,x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\,Q(x)}} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x) t^k + t^{n+1} r_{n+1}(t,x) \right) \quad \textit{où}$$

a) *les* c_k *sont des fonctions continues sur* $[x]$;

b) $c_0(x) > 0$;

c) *le développement est uniforme sur les compacts de* $[x]$: *si* K *est un compact inclus dans* $[x]$, *il existe* $t_0 > 0$ *tel que :*

$$\sup_{t\leq t_0} \sup_{y\in K} |r_{n+1}(t,y)| < \infty .$$

De plus, si $[x]$ *est d'intérieur non vide, les* c_k *sont des fonctions* C^∞ *sur tout ouvert inclus dans* $[x]$.

Remarque (3.3).- On peut aussi, en utilisant les résultats de [5], donner une expression explicite (mais très lourde), du premier coefficient $c_0(x)$ (voir [4]).

Nous allons, de nouveau, ne donner qu'une indication très rapide de la preuve du théorème (3.2) :