Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

807

Fonctions de Plusieurs Variables Complexes IV

Séminaire François Norguet
Octobre 1977 - Juin 1979

Edité par François Norguet

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

807

Fonctions de Plusieurs Variables Complexes IV

Séminaire François Norguet
Octobre 1977 – Juin 1979

Edité par François Norguet

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Editeur

François Norguet
U.E.R. de Mathématiques, Université Paris VII
2 Place Jussieu
75005 Paris
France

AMS Subject Classifications (1980): 10 K xx, 14-xx, 32-xx, 58 C xx

ISBN 3-540-10015-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-10015-6 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Fonctions de plusieurs variables complexes / ed. par François Norguet.
- Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
NE: Norguet, François [Hrsg.]
4. Séminaire François Norguet: Octobre 1977 - Juin 1979. - 1980.
(Lecture notes in mathematics; Vol. 807)
ISBN 3-540-10015-6 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-10015-6 (New York, Heidelberg, Berlin)
NE: Séminaire François Norguet <1977 - 1979, Paris>

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

P R E F A C E

Ce volume fait suite aux trois premiers de la série , numéros 409 (Octobre 1970-Décembre 1973) , 482 (Janvier 1974-Juin 1975) et 670 (Octobre 1975-Juin 1977) des Lecture Notes in Mathematics .

Il débute par des textes inédits de D. Barlet et F. Campana , correspondant respectivement aux conférences du 15 Mai 1975 et du 13 Mai 1977 , et toujours d'actualité .

En dehors de la participation précieuse de chercheurs étrangers , c'est le résultat d'une collaboration étroite et permanente entre les Universités de Bordeaux , Nancy et Paris VII . Dans une unité accrue , le thème de l'espace des cycles joue un rôle dominant .

Le séminaire a pu se poursuivre grâce aux subventions de l'Université Paris VII pour le paiement des frais de missions des participants ; en 1979 , il fait partie des activités de l'Année de Géométrie à Paris VII . Le fonctionnement en journées groupées a continué de s'imposer comme le plus commode et le plus fructueux , permettant en outre au séminaire hebdomadaire (non publié) de s'adresser spécialement à des chercheurs débutants .

La publication de ce volume a pu être réalisée grâce aux conférenciers qui ont bien voulu faire dactylographier leurs textes dans leur propre Université, et naturellement grâce à la Librairie Springer qui reste un modèle de compétence et de dynamisme .

F. Norguet

Paris , le 2 Novembre 1979 .

Au moment de la mise sous presse , un télex de l'Ecole Normale Supérieure de Pise annonce le décès d'Aldo Andreotti , survenu le 21 Février 1980 .

La dédicace de ce volume n'est pas seulement une marque de reconnaissance pour sa participation répétée aux travaux du séminaire ; elle tient à souligner le caractère essentiel de sa contribution à la naissance et au développement des théories auxquelles le séminaire se consacre .

F. Norguet

Paris , le 29 Février 1980 .

A D R E S S E S   D E S   A U T E U R S

C. BANICA . Dep. de Math. , Bd. Pacii 220 , Bucarest

D. BARLET . Université Nancy I , Case officielle 140 , 54037 Nancy Cedex

R. BENEDETTI . Università di Pisa , Via Buonarotti 2 , Pisa

F. CAMPANA . Université Nancy I

J. L. ERMINE . Unibersité Bordeaux I , 351 Cours de la Libération , 33405 Talence

A. SZPIRGLAS . 26 Rue Terre Neuve , 92190 Meudon

A. TOGNOLI . Istituto Matematico , Via Machiavelli , Ferrara

P R O G R A M M E   D U   S E M I N A I R E

Année 1977-1978

15 Décembre 1977 : J. L. ERMINE . Images directes à supports propres dans le cas d'un morphisme fortement q-concave .

D. BARLET . Résultats nouveaux sur l'espace des cycles .

R. GERARD . Résidus associés à une connexion avec singularités .

9 Février 1978 : B. LAWSON . Bords des variétés analytiques complexes .

J. P. RAMIS . Solutions Gevrey des équations différentielles à points singuliers irréguliers .

D. BARLET . Convexité au voisinage d'un cycle .

6 Avril 1978 : C. BANICA . Sur les fibres infinitésimales d'un morphisme propre d'espaces complexes .

25 Mai 1978 : A. HENAUT . Cycles et cône tangent de Zariski .

A. SZPIRGLAS . Platitude des revêtements ramifiés .

26 Mai 1978 : J. L. ERMINE . Courants ergodiques et répartition géométrique .

G. ROOS . Caractérisation des valeurs au bord des fonctions holomorphes .

Année 1978-1979

9 Mai 1979 : F. CAMPANA . Algébricité dans l'espace des cycles .

J. P. RAMIS . Résidus suivant une connexion .

10 Mai 1979 : D. BARLET . Déformations d'ordre un de cycles .

A. HENAUT . Sur l'éclatement d'un idéal $\mathfrak{M}$-primaire de $\mathbb{C}\{z_1,z_2,\dots\dots,z_n\}$.

B. KLARES . Classification topologique des couples de champs de vecteurs holomorphes , intégrables , dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

11Mai 1979 : J. J. RISLER . Fonctions de classe C^r et ensembles analytiques .

R. BENEDETTI et A. TOGNOLI . Approximation theorems in real algebraic geometry .

J. M. KANTOR . Equations différentielles algébriques .

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

* Le texte détaillé de cette conférence , remis par les auteurs le 11 Mai 1979 , et dont la publication était initialement prévue dans ce volume , est transféré dans le Séminaire de Géométrie Algébrique réelle de Paris VII (J.-J. Risler) , 1978-1979 , n°9 des Publications mathématiques de l'Université Paris VII (U.E.R. de mathématiques,Tour 45-55,5ème étage,Université Paris VII,2 place Jussieu,75221 Paris Cedex 05,tél. 336 25 25,poste 37 61).

FAMILLES ANALYTIQUES DE CYCLES ET CLASSES FONDAMENTALES RELATIVES

par

Daniel BARLET

INTRODUCTION

Le principal intérêt de cet article est de montrer que la notion de famille analytique de cycles d'une variété analytique qui a été introduite et étudiée dans [B] est caractérisée par l'existence d'une classe fondamentale relative.

Ceci permet de jeter une lumière nouvelle sur le chapitre 2 de [B], et de donner une démonstration probablement moins ardue du théorème 4 de ce même chapitre. En revanche, cette nouvelle formulation permet de considérer les théorèmes 6, 8 et 10 de [B] comme des critères d'existence de classes fondamentales relatives, et permet de généraliser le théorème 12 d'intégration de classes de cohomologie.

On remarquera que le §1 donne une construction élémentaire (en particulier sans complexe dualisant) de la classe fondamentale d'un cycle d'une variété analytique.

Je voudrais remercier ici P. Deligne qui m'a suggéré qu'une telle formulation était intéressante.

§ 1. - LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN CYCLE DANS UNE VARIETE ANALYTIQUE.

A) Définition et unicité.

Dans ce qui suit, Z désignera une variété analytique (lisse) de dimension pure $n+p$ dans laquelle nous considérerons des cycles analytiques de dimension pure n. Nous supposerons $p \geq 2$ en laissant au lecteur le soin d'adapter nos énoncés au cas $p=1$ (qui est beaucoup plus simple ; voir par exemple le théorème 9 de [B]).

Si X est une sous-variété analytique fermée de Z de dimension pure n, la notion de classe fondamentale de X est bien connue. Rappelons que cette classe fondamentale, que nous noterons c_X^Z est un élément de $H_X^p(Z,\Omega^p)$ qui est localement défini comme suit au voisinage de X :

Si $X = f^{-1}(0)$ où $f : Z \to \mathbb{C}^p$ est une application analytique, on définit $c_X^Z = f^*(c_o)$ où c_o (qui est la classe fondamentale de l'origine de $\mathbb{C}^p$) est l'élément de $H_{\{0\}}^p(\mathbb{C}^p,\Omega^p)$ qui est donné par le cocycle.

$$\frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_p}{x_p}$$

relatif au recouvrement de Leray de $\mathbb{C}^p - \{0\}$ par les ouverts $\{x_i \neq 0\}$ compte tenu de l'isomorphisme canonique :

$$H^{p-1}(\mathbb{C}^p - \{0\}, \Omega^p) \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}}^p(\mathbb{C}^p, \Omega^p) \quad .$$

On vérifie que la construction de c_X^Z ne dépend pas du choix des coordonnées normales à X ce qui permet de globaliser car on a

$$H_X^p(Z,\Omega^p) = H^o(Z,\underline{H}_X^p(\Omega^p)) \quad (*) \quad .$$

Considérons maintenant un cycle analytique X de Z de dimension pure n, et notons par $|X|$ son support.

(*) Ceci est vrai dès que X est de codimension pure p, car la suite spectrale $H_X^p(Z,\Omega^p) \Longleftarrow E_2^{\alpha,p-\alpha} = H^{\alpha}(Z,\underline{H}_X^{p-\alpha}(\Omega^p))$ dégénère puisque : $\underline{H}_X^q(\underline{E}) = 0$ pour $\underline{E}$ localement libre sur Z et $q<p$ [S.T].

DEFINITION 1. - Nous dirons qu'un élément c_X^Z de $H^p_{|X|}(Z,\Omega^p)$ est une classe fondamentale du cycle X si au voisinage de chaque point lisse x de $|X|$ on a $c_X^Z = k_x \cdot c^Z_{|X|}$ où k_x désigne la multiplicité de X au voisinage de x.

LEMME 1. - Si une classe fondamentale de X dans Z existe, elle est unique.

Démonstration. - Si on fait la différence de deux classes fondamentales du cycle X on obtient un élément de $H^p_{|X|}(Z,\Omega^p)$ qui est l'image d'une section globale du faisceau $\underline{H}^p_Y(\Omega^p)$ où Y désigne le lieu singulier de $|X|$; comme Y est de codimension au moins égale à $p+1$ et que le faisceau Ω^p est localement libre, le faisceau $\underline{H}^p_Y(\Omega^p)$ est nul ([S.T]) ce qui prouve le résultat.

B) $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \ast \mathbb{C}^p$.

Notons par $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ la variété algébrique normale $(\mathbb{C}^p)^k/\sigma_k$ où σ_k désigne le groupe des permutations de l'ensemble à k éléments. Rappelons que si $S_h : (\mathbb{C}^p)^k \to S_h(\mathbb{C}^p)$ est l'application algébrique définie par :

$$S_h(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{1\leq i_1<<i_k\leq k} x_{i_1} \ldots x_{i_h} \quad \text{pour} \quad h \in (1,k) .$$

La somme directe $\overset{k}{\underset{1}{\oplus}} S_h$ passe au quotient et définit un plongement algébrique propre de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans $\overset{k}{\underset{1}{\oplus}} S_h(\mathbb{C}^p)$.

Si $x \in \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$, nous noterons par $|x|$ le sous-ensemble (fini) de $\mathbb{C}^p$ définit par l'équation algébrique vectorielle (à valeurs dans $S_k(\mathbb{C}^p)$) :

$$|x| = \{y \in \mathbb{C}^p / \sum_{o}^{k} (-1)^h S_h(x).y^{k-h} = 0\}$$

avec la convention $S_o(x) = 1$. Il est clair que $|x|$ s'identifie au support du cycle x de $\mathbb{C}^p$.

Nous noterons par $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \ast \mathbb{C}^p$ le sous-ensemble algébrique de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$ $\{(x,y) \in \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p / y \in |x|\}$.

On remarquera que si $P : \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p \to S_k(\mathbb{C}^p)$ désigne l'application algébrique définie par :

$$P(x,y) : \sum_{o}^{k} (-1)^h S_h(x).y^{k-h}$$

On a ensemblistement $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \ast \mathbb{C}^p = P^{-1}(0)$ et que les équations de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \ast \mathbb{C}^p$ données par les composantes de P , bien que non réduites en général, sont génériquement réduites (en particulier aux points réguliers de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$) .

Soit $q : (\mathbb{C}^p)^k \to \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ l'application quotient ; si U est un ouvert de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ et m un entier, posons :

$$\omega_s^m(U) = \{w \in H^o(q^{-1}(U), \Omega^m) / s^* w = w \quad \forall\, s \in \sigma_k\} .$$

LEMME 2. - <u>Pour chaque entier</u> m , <u>le préfaisceau</u> ω_s^m <u>sur</u> $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ <u>est un faisceau algébrique cohérent</u> (<u>resp. analytique cohérent</u> !) .

<u>Démonstration.</u> - L'opération du faisceau structural de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ sur ω_s^m est claire, et la vérification des axiomes de faisceaux évidente.

On a d'autre part une inclusion naturelle de faisceaux algébriques :

$$j : \omega_s^m \to q_*(\Omega^m)$$

et $q_*(\Omega^m)$ est cohérent car q est finie. Il nous suffit donc de montrer que ω_s^m est facteur direct de $q_*(\Omega^m)$ pour conclure. Or l'application de symétrisation :

$$S(w) = (1/k!) \sum_{s \in \sigma_k} s^*(w)$$

définit un morphisme de faisceaux algébriques (resp. analytiques) sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$:

$$S : q_*(\Omega^m) \to \omega_s^m$$

qui vérifie $S \circ j = \mathrm{id}$ d'où le résultat.

Si $\underline{F}$ est un faisceau algébrique cohérent sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$, nous noterons par $H^r_{\ast}(\underline{F})$ l'espace $H^r_{\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \ast \mathbb{C}^p}(\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p, \underline{F})$.

Si m est un entier, nous noterons par Ω_s^m le faisceau algébrique (resp. analytique) cohérent sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$ défini par

$$\Omega_s^m = \bigoplus_{r=o}^{m} [p_1^*(\omega_s^{m-r}) \otimes p_2^*(\Omega^r)]$$

où p_1 et p_2 sont les projections sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ et $\mathbb{C}^p$.

Nous nous proposons maintenant de montrer qu'il existe un élément $c_{*} \in H^{p}_{*}(\Omega^{p}_{s})$ qui jouera le rôle d'une classe fondamentale pour le cycle de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$ défini par $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) * \mathbb{C}^{p}$.

Remarque. - Pour chaque entier m, on a un morphisme naturel de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p})$ $i : \Omega^{m} \to \omega^{m}_{s}$ car l'image réciproque par q d'une forme différentielle sur $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p})$ est invariante par l'action σ_{k}. De plus, la restriction de i à l'ouvert des points réguliers de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p})$ est un isomorphisme. On en déduit l'existence d'un morphisme naturel de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$ que l'on notera encore $i : \Omega^{m} \to \Omega^{m}_{s}$ qui est un isomorphisme aux points réguliers de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$.

On montrera plus loin que la restriction de c_{*} aux points réguliers de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$ s'identifie (via i) à la classe fondamentale dans cet ouvert lisse de la sous-variété lisse $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) * \mathbb{C}^{p}$.

Pour $\ell \in (\mathbb{C}^{p})^{*}$, considérons l'ouvert V_{ℓ} de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$ qui est défini par $V_{\ell} = \{(x,y) / P(x,y)(\ell) \neq 0\}$, où l'on a identifié les éléments de $S_{k}(\mathbb{C}^{p})$ aux polynômes homogènes de degré k sur $(\mathbb{C}^{p})^{*}$. Quant ℓ décrit $(\mathbb{C}^{p})^{*}$, les ouverts affines V_{ℓ} forment un recouvrement, que nous noterons $\mathcal{V}$, de $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p} - \mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) * \mathbb{C}^{p}$, et pour tout faisceau algébrique cohérent $\underline{F}$ sur $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p}$ et tout entier r on a un isomorphisme de Leray :

$$H^{r}(\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p} - \mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) * \mathbb{C}^{p}, \underline{F}) \xrightarrow{\sim} H^{r}(\mathcal{V}, \underline{F}) .$$

Comme $\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p})$ est affine, l'application naturelle :

$$H^{r}(\mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) \times \mathbb{C}^{p} - \mathrm{Sym}^{k}(\mathbb{C}^{p}) * \mathbb{C}^{p}, \underline{F}) \to H^{r+1}_{*}(\underline{F})$$

est un isomorphisme pour $r \geq 1$. Ceci nous permet donc, puisque nous supposons $p \geq 2$, d'identifier $H^{p}_{*}(\Omega^{p}_{s})$ et $H^{p-1}(\mathcal{V}, \Omega^{p}_{s})$.

Considérons maintenant la $(p-1)$-cochaîne $c_{*} \in C^{p-1}(\mathcal{V}, \Omega^{p}_{s})$ qui est définie par :

$$c_{*}(\ell_{1}, \ldots, \ell_{p})(x,y) = \sum_{j=1}^{k} \bigwedge_{i=1}^{p} \frac{d[\ell_{i}(y-x)]}{\ell_{i}(y-x_{j})}$$

où l'on à supposer que $q(x_1,\ldots,x_k) = x$.

LEMME 3. - La cochaîne $c_{\divideontimes}$ définie ci-dessus est un cocycle.

Démonstration. - Nous avons donc à montrer que si $\ell_o,\ldots,\ell_p$ sont des éléments de $(\mathbb{C}^p)^*$, l'élément de $H^o(V_{\ell_o} \cap \ldots \cap V_{\ell_i}, \Omega_s^p)$ qui est donné par :

$$(\delta\, c_{\divideontimes})\,(\ell_o,\ldots,\ell_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \; c_{\divideontimes}(\ell_o,\ldots,\hat{i}\ldots,\ell_p)$$

est nul. Comme le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^p)^*$ engendré par $\ell_o,\ldots,\ell_p$ est de dimension au plus p , nous pouvons toujours supposer que l'on a

$$\ell_o = \sum_1^p a_i\, \ell_i$$

où $a_1,\ldots,a_p$ sont des scalaires. Explicitons :

$$(\delta\, c_{\divideontimes})\,(\ell_o,\ldots,\ell_p)\,(x,y) = c_{\divideontimes}(\ell_1,\ldots,\ell_p)\,(x,y) + A(x,y)$$

où

$$A(x,y) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \sum_{j=1}^{k} \frac{d[\ell_o(y-x)]}{\ell_o(y-x_j)} \wedge\ldots\; \hat{i} \;\ldots\wedge \frac{d[\ell_p(y-x_j)]}{\ell_p(y-x_j)}$$

et comme on a

$$d\ell_o = \sum_1^p a_i . d\ell_i \quad ,$$

$$A(x,y) = -\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} \frac{a_i\;\ell_i(y-x)}{\ell_o(y-x_j)} \; \frac{d[\ell_1(y-x_j)]}{\ell_1(y-x_j)} \wedge\ldots\wedge \frac{d[\ell_p(y-x_j)]}{\ell_p(y-x_j)}$$

ce qui donne, en sommant d'abord en i et en réutilisant la relation $\ell_o = \sum_1^p a_i\, \ell_i$ que $A(x,y) = -(c_{\divideontimes})\,(\ell_1,\ldots,\ell_p)\,(x,y)$ ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 2. - Nous appellerons classe fondamentale (généralisée) de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p$ dans $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$ l'élément de $H^p_{\divideontimes}(\Omega_s^p)$ défini par le cocycle $c_{\divideontimes}$ considéré ci-dessus.

Montrons maintenant que la définition 2 est compatible avec la définition 1.

LEMME 4. - La restriction de $c_{\divideontimes}$ à l'ouvert des points réguliers de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p$ est la classe fondamentale de la sous-variété de cet ouvert définie par $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p$.

Démonstration. - Nous allons travailler en géométrie analytique (ce qui implique le résultat algébrique). Commençons par préciser que x dans $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ est régulier dès que $x = q(x_1,\ldots,x_k)$ où les vecteurs $x_1,\ldots,x_k$ de $\mathbb{C}^p$ sont deux à deux distincts.

Soit donc $x^o = q(x_1^o,\ldots,x_k^o)$ un point régulier de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ et prouvons le résultat au voisinage du point (x^o, x_1^o) de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p$.

Choisissons alors une base $\ell_1,\ldots,\ell_p$ de $(\mathbb{C}^p)^*$ telle que l'on ait $\ell_i(x_j^o - x_1^o) \neq 0$ pour $j \in (2,k)$ et $i \in (1,p)$. Soit U un voisinage ouvert de Stein de x^o dans $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ tel que la projection sur U de $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p \cap (U \times \mathbb{C}^p)$ soit un revêtement trivial à k feuillets ; notons par $f_1,\ldots,f_k$ les applications analytiques de U dans $\mathbb{C}^p$ dont les graphes sont les feuilles de ce revêtement, et supposons que l'on a $f_i(x^o) = x_i^o$ pour chaque $i \in (1,k)$. Quitte à choisir U assez petit, on peut trouver un polydisque ouvert B de $\mathbb{C}^p$ de centre x_1^o de manière à vérifier :

$$U \times B - \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p = \left(\bigcup_{i=1}^{p} V_{\ell_i}\right) \cap (U \times B) \quad .$$

Comme $U \times B$ est de Stein et $p \geq 2$, on a un isomorphisme entre $H^p_{\divideontimes}(U \times B, \Omega^p)$ et $H^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^p)$ où $\mathcal{U}$ désigne le recouvrement de $U \times B - \mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \divideontimes \mathbb{C}^p$ par les ouverts de Stein $V_{\ell_i} \cap (U \times B) = \mathcal{U}_i$ pour $i \in (1,p)$.

La restriction de $c_{\divideontimes}$ à $U \times B$ est alors donnée par le $(p-1)$ - cocycle (comme il n'y a que p ouverts dans le recouvrement $\mathcal{U}$, un $(p-1)$ - cocycle est seulement un élément de $H^o(\bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{U}_i, \Omega^p)$

$$\bar{c}_{\divideontimes}(x,y) = \sum_{j=1}^{k} \bigwedge_{i=1}^{p} \frac{d[\ell_i(y-f_j(x))]}{\ell_i(y-f_j(x))} \quad .$$

Mais d'autre part, pour U et B assez petits, le choix de la base $\ell_1,\ldots,\ell_p$ permet de supposer que $\ell_i(y-f_j(x))$ ne s'annule pas sur $U \times B$ pour

$j \in (2,k)$, ce qui montre que $\bar{c}_{*}$ est cohomologue au cocycle :

$$\bar{c}^{1}_{*}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{p} \frac{d[\ell_i(y-f_1(x))]}{\ell_i(y-f_1(x))} \quad .$$

Il suffit alors de constater que l'application analytique de $U \times B$ dans $\mathbb{C}^p$ définie par les fonctions analytiques $\ell_i(y-f_1(x))$ donne des coordonnées normales sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p) * \mathbb{C}^p \cap (U \times B)$ ce qui est clair.

c) Formes de Newton.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les faisceaux ω^m_s et en particulier d'exhiber des sections globales qui les engendrent au voisinage de chaque point.

DEFINITION 3. - *Soit* U *un ouvert de* $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$, *et soit* $w \in H^o(U,\omega^m_s)$. *Nous dirons que* w *est de Newton s'il existe une forme différentielle* v *sur l'ouvert* :

$$p(U) = \{x \in \mathbb{C}^p / \exists\ x_2,\dots,x_k \in \mathbb{C}^p \quad \text{avec} \quad q(x,x_2,\dots,x_k) \in U\}$$

de $\mathbb{C}^p$ vérifiant $\sum_{j=1}^{k} p_j^*(v) = w$ où p_j désigne la j-ième projection de $(\mathbb{C}^p)^k$ sur $\mathbb{C}^p$.

Nous noterons par N_m le sous-faisceau algébrique de ω^m_s qui est engendré par les formes de Newton de degré m .

Remarquons que la propriété d'être de Newton pour une section de ω^m_s est locale, puisque l'application $v \to \sum_{j=1}^{k} p_j^*(v)$ est injective.

LEMME 5. - *Pour chaque entier* m , *le faisceau* N_m *est algébrique cohérent sur* $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$.

Démonstration. - Nous allons montrer que si $a \in \mathbb{N}^p$ vérifie $|a| \leq k-1$ et si I est une partie ordonnée à m éléments $(m \leq p)$ de $(1,p)$ les formes de Newton globales $w_{a,I} = \sum_{j=1} p_j^*(x^a\, dx^I)$ engendrent $H^o(\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p),N_m)$ comme module sur l'anneau des fonctions globales sur $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$.

Pour chaque entier n , considérons la forme vectorielle (à valeurs dans $S_n(\mathbb{C}^p)$) $W_{n,I}$ dont les composantes dans la base canonique de $S_n(\mathbb{C}^p)$ sont les formes $w_{a,I}$ pour $|a| = n$.

On aura alors pour chaque I fixée et chaque entier $n \geq 0$, les relations de Newton :

$$\sum_{k=o}^{k} (-1)^h S_h(x_1,\ldots,x_k)\ W_{n+h,I}(x_1,\ldots,x_k) = 0 \quad (\text{avec } S_o = 1)$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 6. - <u>On a les relations de Newton suivantes pour chaque entier</u> $m \geq 1$

$$\omega_s^m = \sum_{i=1}^{m} \omega_s^{m-i} \wedge N_i \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Considérons la forme $r = x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k}\ dx_1^{I_1} \wedge\ldots\wedge dx_k^{I_k}$ où les a_i sont dans $\mathbb{N}^p$ et les I_i des parties ordonnées de $(1,p)$. Nous dirons que r est de poids n s'il existe exactement $k-n$ valeurs de $i \in (1,p)$ pour lesquelles on a à la fois $|a_i| = 0$ et $I_i = \phi$; plus généralement, nous dirons qu'une forme est de poids au plus n si chacun de ses monômes est de poids au plus n . Supposons le résultat vrai pour les formes de poids $n' < n$; pour prouver le résultat pour les formes de poids n , il suffit de montrer que si r est de poids n , sa symétrisée est une section globale du faisceau

$$\sum_1^m \omega_s^{m-i} \wedge N_i \ .$$

Supposons que x_1 intervient effectivement dans r (ce qui n'est pas restrictif puisque nous ne nous intéressons qu'à la symétrisée de r) et posons :

$$r_1 = x_1^{a_1}\ dx_1^{I_1} \quad \text{et} \quad r' = x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}\ dx_2^{I_2} \wedge\ldots\wedge dx_k^{I_k} \ .$$

Notons par R, R_1 et R' les symétrisées de r, r_1 et r' . On vérifie alors que la forme $(k/k-n+1)\ R_1 \wedge R' - R$ est de poids au plus $n-1$, et d'après notre hypothèse de récurrence, cette forme est une section globale du faisceau $\sum_1^m \omega_s^{m-i} \wedge N_i$. D'autre part, la forme R' nous définit une section globale de