Nachrichtentechnik 13

F. M. Wahl

Digitale Bildsignalverarbeitung

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Friedrich M. Wahl

Digitale Bildsignalverarbeitung

Grundlagen, Verfahren, Beispiele

Mit 85 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. FRIEDRICH M. WAHL

IBM Forschungslaboratorium Zürich
CH-8803 Rüschlikon, Schweiz

Dr.-Ing. HANS MARKO

Professor, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Technische Universität München

Text und Formeln wurden vom Autor unter Verwendung von D. Knuth's Typesetting System TEX gesetzt und auf einem IBM 4250 Elektroerosionsdrucker ausgedruckt.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Wahl, Friedrich:
Digitale Bildsignalverarbeitung: Grundlagen, Verfahren, Beispiele/Friedrich M. Wahl. -
Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1984.
(Nachrichtentechnik; Bd. 13)

ISBN 3-540-13586-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-13586-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

NE: GT

Druck: Brüder Hartmann GmbH & Co., Berlin; Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin
2362/3020-543210

Nachrichtentechnik
Herausgegeben von H. Marko
Band 13

Mathematische Grundlagen	Band 1:	Methoden der Systemtheorie (H. Marko)
	Band 4:	Numerische Berechnung linearer Netzwerke und Systeme (H. Kremer)
	Band 7:	Grundlagen digitaler Filter (R. Lücker)
	Band 10:	Grundlagen der Theorie statistischer Signale (E. Hänsler)
	Geplant:	Anwendungsbeispiele zur Systemtheorie
	Geplant:	Mehrdimensionale Systemtheorie
	Geplant:	Kanalcodierung
Baugruppen und Systeme	Band 3:	Bau hybrider Mikroschaltungen (E. Lüder)
	Band 8:	Nichtlineare Schaltungen (R. Elsner)
	Geplant:	Transistorverstärker
Signalverarbeitung	Band 5:	Prozeßrechentechnik (G. Färber)
	Band 12:	Sprachverarbeitung und Sprachübertragung (K.-R. Fellbaum)
	Band 13:	Digitale Bildsignalverarbeitung (F. Wahl)
	Geplant:	Analoge Bildverarbeitung
Signalübertragung	Band 2:	Fernwirktechnik der Raumfahrt (P. Hartl)
	Band 6:	Nachrichtenübertragung über Satelliten (E. Herter, H. Rupp)
	Band 11:	Bildkommunikation (H. Schönfelder)
	Geplant:	Millimeterwellen
	Geplant:	Lichtwellenleiter
	Geplant:	Optimierung digitaler Übertragungssysteme
	Geplant:	Antennen
	Geplant:	Radartechnik
Ergänzungen	Band 9:	Nachrichten-Meßtechnik (E. Schuon, H. Wolf)

Herausgeber und Verlag danken für alle Anregungen zur weiteren Ausgestaltung dieser Reihe. Die freundliche Aufnahme in der Fachwelt hat die Richtigkeit der Idee, das sich schnell entwickelnde Gebiet der Nachrichtentechnik oder Informationstechnik in einer Buchreihe darzustellen, bestätigt.

München, im Frühjahr 1984 H. Marko

Zur Buchreihe „Nachrichtentechnik“

Die Nachrichten- oder Informationstechnik befindet sich seit vielen Jahrzehnten in einer stetigen, oft sogar stürmisch verlaufenden Entwicklung, deren Ende nicht abzusehen ist. Durch die Fortschritte der Technologie wurden ebenso wie durch die Verbesserung der theoretischen Methoden nicht nur die vorhandenen Anwendungsgebiete ausgeweitet und den sich ändernden Erfordernissen angepaßt, sondern auch neue Anwendungsgebiete erschlossen.

Zu den klassischen Aufgaben der Nachrichtenübertragung und Nachrichtenvermittlung sind die Nachrichtenverarbeitung und die Datenverarbeitung hinzugekommen, die viele Gebiete des beruflichen sowie des privaten Lebens in zunehmendem Maße verändern. Die Bedürfnisse und Möglichkeiten der Raumfahrt haben gleichermaßen neue Perspektiven eröffnet wie die verschiedenen Alternativen zur Realisierung breitbandiger Kommunikationsnetze. Neben die analoge ist die digitale Übertragungstechnik, neben die klassische Text-, Sprach- und Bildübertragung ist die Datenübertragung getreten. Die Nachrichtenvermittlung im Raumvielfach wurde durch die elektronische zeitmultiplexe Vermittlungstechnik ergänzt. Satelliten- und Glasfasertechnik haben zu neuen Übertragungsmedien geführt. Die Realisierung nachrichtentechnischer Schaltungen und Systeme ist durch den Einsatz des Elektronenrechners und die digitale Schaltungstechnik erheblich verbessert und erweitert worden. Die schnelle Entwicklung der Halbleitertechnologie zu immer höheren Integrationsgraden erschließt neue Anwendungsgebiete besonders auf dem Gebiet der digitalen Technik.

Die Buchreihe „Nachrichtentechnik“ trägt dieser Entwicklung Rechnung und bietet eine zeitgemäße Darstellung der wichtigsten Themen der Nachrichtentechnik an. Die einzelnen Bände werden von Fachleuten geschrieben, die auf dem jeweiligen Gebiet kompetent sind. Jedes Buch soll in ein bestimmtes Teilgebiet einführen, die wesentlichen heute bekannten Ergebnisse darstellen und eine Brücke zur weiterführenden Spezialliteratur bilden. Dadurch soll es sowohl dem Studierenden bei der Einarbeitung in die jeweilige Thematik als auch dem im Beruf stehenden Ingenieur oder Physiker als Grundlagen- oder Nachschlagewerk dienen. Die einzelnen Bände sind in sich abgeschlossen, ergänzen einander jedoch innerhalb der Reihe. Damit ist eine gewisse Überschneidung unvermeidlich, ja sogar erforderlich.

Die derzeitige Planung der Reihe umfaßt die mathematischen Grundlagen, die Baugruppen und Systeme sowie die Technik der Signalverarbeitung und Signalübertragung. Eine Ergänzung bildet die Meßtechnik. Das folgende Schema zeigt den heutigen Stand der Reihe unter Einschluß der demnächst erscheinenden Bände.

Vorwort

Mit dem vorliegenden Buch soll eine Einführung in die digitale Bildverarbeitung gegeben werden. Hierbei werden gemäß der allgemeinen Themenstellung der vorliegenden Buchreihe insbesondere die signalorientierten Aspekte der Bildverarbeitung in den Vordergrund gestellt. Den besonderen Reiz der Bildverarbeitung sehe ich in dem interessanten Zusammenwirken von intuitiven und theoretischen Lösungsansätzen, die jeweils durch "anschauliche" Experimente evaluierbar sind. Entsprechend wird in der vorliegenden Darstellung versucht, insbesondere anhand von zahlreichen Simulationsbeispielen ein Verständnis dieses jungen, an Bedeutung zunehmenden Gebietes beim Leser zu erreichen. Zum Verständnis des Buches sind außer Kenntnissen der Mathematik, wie sie etwa in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen vermittelt werden, Grundkenntnisse der linearen Systemtheorie bzw. Signalverarbeitung und Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorteilhaft.

Das Material des vorliegenden Buches wurde zum größten Teil während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität in München erarbeitet. Meinen herzlichen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. Marko aussprechen, der dieses Buch anregte, in großzügiger Art unterstützte und durch zahlreiche Ratschläge förderte. Besonderer Dank gebührt auch meinen früheren und jetzigen Kollegen für viele Diskussionen und Anregungen zur behandelten Problematik. Meinen zahlreichen früheren Studenten verdanke ich nicht nur einen Großteil der Illustrationen, sondern auch sehr viel Spaß beim gemeinsamen Experimentieren und Suchen nach Lösungen während der letzten Jahre. Schließlich sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre finanzielle Unterstützung gedankt.

Rüschlikon, im Frühjahr 1984 — Friedrich M. Wahl

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Neben der Sprache spielt die bildhafte Information zur Orientierung und Kommunikation beim Menschen eine entscheidende Rolle. Es wird geschätzt, daß etwa 75% aller durch den Menschen aufgenommenen Information über das visuelle System erfolgt, was schon in dem alten chinesischen Sprichwort "ein Bild sagt mehr als tausend Worte" zum Ausdruck kommt. Es ist daher nicht verwunderlich, daß mit dem Entstehen der elektronischen Datenverarbeitung der Wunsch nach einer Erfassung, Verarbeitung und Analyse von Bildern mit Hilfe von Digitalrechnern auftrat. Ausgehend von den ersten Gehversuchen vor etwa 25 Jahren hat sich die Bildverarbeitung zu einer heute breiten wissenschaftlichen Disziplin entwickelt, die mit mehreren anderen Disziplinen wie Optik, Nachrichten- und Signaltheorie, Mustererkennung und künstliche Intelligenz in enger Wechselwirkung steht.
Durch unzählige Anwendungen - nicht zuletzt als Folge der billig gewordenen Rechnertechnologie - beeinflußt die Bildverarbeitung heute nahezu alle Bereiche unseres täglichen Lebens. Man denke hierbei beispielsweise an die automatisierte Dokumentenerfassung, -verarbeitung und -erstellung, an den Bereich der industriellen Prozeßautomation (bildabhängige Steuerung von Werkzeugmaschinen, Transportstraßen und Robotern; maschinelle Qualitätskontrolle), an die Erzeugung und automatisierte Analyse medizinischer Bilder (Röntgenaufnahmen, Tomographie, Szintigramme, Ultraschallmessungen, Zell- und Chromosomenbildanalyse), an die Biologie (z.B. Beobachtung von Wachstumsprozessen), an die Geophysik (Magnet- und Gravitationsfelder, seismische Signale, Auswertung von Luftbildern), an die Meteorologie (flächendeckende Temperatur-, Feuchtigkeits- und Luftdruckmessungen), an Astronomie, Archäologie und Physik (Analyse von Teilchenspuren, Elektronenmikroskopie, usw.), an die Kriminalistik (Analyse von Fingerabdrücken und Gesichtsprofilen, Dokumentsicherstellung) und an die Navigation.
Den meisten der oben aufgezählten Anwendungen liegt eine Sequenz von Verarbeitungsschritten zugrunde, die etwa durch Bild 1.1 veranschaulicht werden kann. Eine dreidimensionale Szene, die sich aus mehreren komplexen Objekten zusammensetzen kann, wird im allgemeinen durch die physikalischen Prozesse der Strahlenreflexion (z.B. herkömliche Fotographie, Luftbildaufnahmen), der Strahlenabsorption (z.B. Röntgenaufnahmen Durchlichtmikroskopbilder) oder der Strahlenemission (z.B. nuklearmedizinische Bilder) mit Hilfe eines Abbildungssystems (z.B. Objektiv, Kollimator, elektromagnetische Felder)

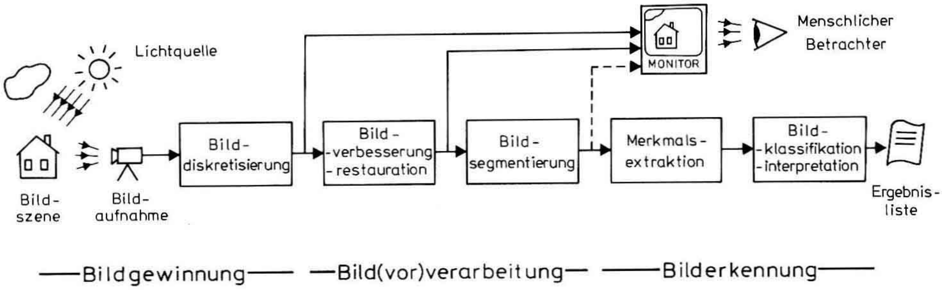

Bild 1.1. Stufen der Bildverarbeitung und Bilderkennung - Übersicht.

in ein zweidimensionales (Strahlungsab-)Bild umgesetzt und anschließend mit Hilfe eines Sensors meist in ein elektrisches Signal gewandelt (z.B. Videokamera, Bildabtaster). Für die Verarbeitung von Bildern im Digitalrechner müssen diese zunächst noch in kontinuierlichen Koordinaten definierten Signale orts- und amplitudenquantisiert, d.h. in eine Zahlenmatrixdarstellung überführt werden. Durch die Physik der Bildgewinnung und Bildaufnahme, sowie bei der Diskretisierung entstehen in der Regel Fehler, die sich mit den Methoden der Signalverarbeitung analysieren lassen und die, darauf basierend, mit Bildverbesserungs- und Bildrestaurationsverfahren in Digitalrechnern wenigstens teilweise wieder rückgängig gemacht werden können. Bild 1.2a,b zeigt, wie beispielsweise die exponentielle Strahlungsschwächung bei Röntgenaufnahmen mit Hilfe einer einfachen Punkt-zu-Punkt-Abbildung über eine logarithmische Kennlinie kompensiert werden kann und damit zu besser befundbaren Bildern führt. Bild 1.2c,d zeigt anhand eines Knochenszintigramms, daß mit Filterverfahren, wie sie im Eindimensionalen in der Nachrichten- und Signaltheorie schon lange bekannt sind, starke zufällige Intensitätsfluktuationen (sogenanntes Rauschen) unterdrückt und dabei gleichzeitig Details im Bild erhalten werden können. In einer nachfolgenden Verarbeitungsstufe wird häufig versucht, mit Segmentierungsverfahren das Bild in "bedeutungsvolle" Unterbereiche zu unterteilen. Dies geschieht oft mit Hilfe sogenannter Gradientenverfahren die z.B. lokale Helligkeitsunterschiede im Bild detektieren. Bild 1.2e,f zeigt anhand einer Chromosomenmikroskopaufnahme ein Beispiel hierfür.

Verfahren der Bildverbesserung/Restauration sowie der Bildsegmentierung werden oft eingesetzt um, wie in Bild 1.1 angedeutet, Bilder für einen menschlichen Betrachter an einem Bildwiedergabegerät besser interpretierbar zu machen. Häufig werden solche Verfahren jedoch auch als Vorverarbeitung für eine folgende maschinelle Bilderkennung realisiert. Beispielsweise können für segmentierte Bildbereiche Merkmale berechnet werden, die dann einer weiteren Stufe zur Objektklassifikation (z.B. "Organ enthält einen/keinen Tumor") oder - je nach Komplexität der zu analysierenden Szenen - zur Bildinterpretation (z.B. "Bild zeigt Straßenszene mit 5 Passanten vor 3 Geschäftshäusern, 7 parkende

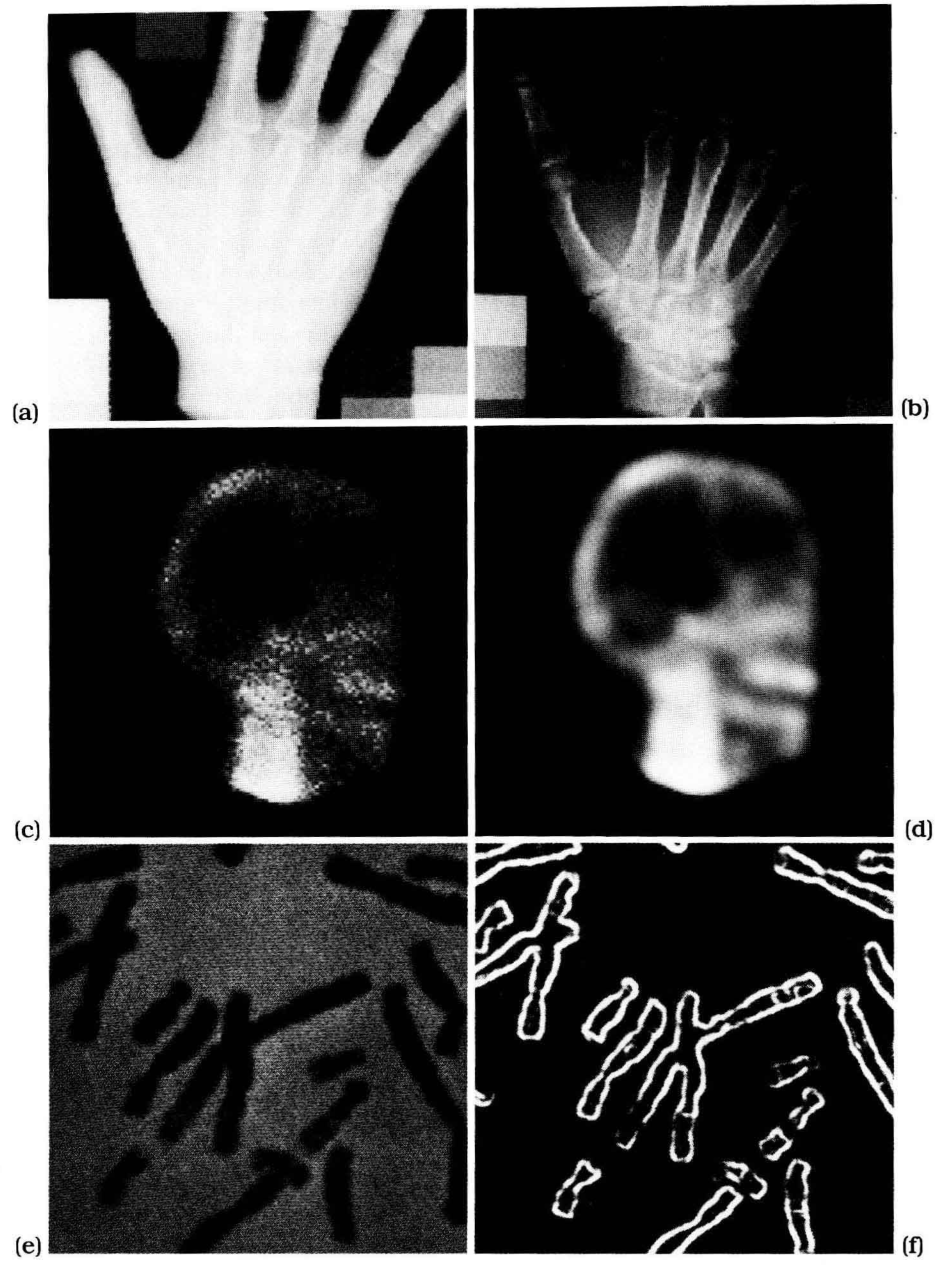

Bild 1.2. Bildverarbeitungsbeispiele: (a), (b) Intensitätstransformation von Röntgenbildern; (c), (d) Ortsfrequenzfilterung von nuklearmedizinischen Bilddaten; (e), (f) Gradientenoperation angewendet auf Mikroskopbildern.

und 2 fahrende PKWs") zugeführt werden. Die Ergebnisse sind listenartige Datenstrukturen mit Objekt- und Szenenbeschreibungen.
Neben der Verarbeitung monochromatischer und statischer Bildsignale spielt auch die Analyse von Farbbildern (z.B. multispektrale Satellitenaufnahmen: jeder Bildpunkt ist durch einen Farbvektor repräsentiert) oder die Analyse von dynamischen Szenen mit Hilfe von Bildfolgen in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle. Im Rahmen der vorliegenden Darstellung werden primär die signaltheoretischen Aspekte bei der Diskretisierung, Darstellung und Verarbeitung monochromatischer Bilder (im weiteren Sinne auch Zählratenfelder, seismische Erregungsmuster, usw.) behandelt. Zur weitergehenden Vertiefung sei der Leser auf die vorwiegend englischsprachige Literatur auf diesem Gebiet /1.1-1.11/, sowie auf die Literatur zur Bildanalyse /1.12-1.24/ verwiesen. Weiterhin sei die Literatur zu den wichtigen und eng verwandten Gebieten der Bildcodierung /1.25-1.28/, der Computergraphik /1.29-1.32/ und der Bildverarbeitungssystemarchitekturen /1.33-1.37/ erwähnt. Reichhaltige Informationsquellen sind darüber hinaus die einschlägigen Fachzeitschriften /1.38-1.43/ und Kongreßberichte /1.44-1.52/.

2 Grundlagen zweidimensionaler Signale und Systeme

Da mit der Systemtheorie kontinuierlicher zweidimensionaler Signale wichtige Zusammenhänge bei der Umwandlung kontinuierlicher Strahlenverteilungen in orts-, zeit- und amplitudendiskrete Signale sowie Artefakte bei der Bilddarstellung erklärt und quantitativ analysiert werden können, faßt Abschnitt 2.1 ihre wichtigsten Grundlagen zusammen. (Detailiertere Einführungen möge der Leser der Literatur (z.B. /2.1-2.3/ entnehmen.) Abschnitt 2.2 beschreibt die signaltheoretischen Zusammenhänge bei der Bildabtastung und Bilddarstellung im idealen Fall und unter verschiedenen physikalischen Randbedingungen. Anschließend wird in Abschnitt 2.3 die diskrete Fouriertransformation, ihre wichtigsten Gesetze und ihre Bedeutung für die anschauliche Charakterisierung von diskreten Bildsignalen und Bild"übertragungs"systemen behandelt. Darüber hinaus werden kurz weitere wichtige diskrete Transformationen vorgestellt und Realisierungsmöglichkeiten linearer Systeme aufgezeigt.

2.1 Systemtheorie zweidimensionaler kontinuierlicher Signale

2.1.1 Die zweidimensionale kontinuierliche Fouriertransformation

Es sei $f(x,y)$ eine kontinuierliche Funktion der beiden reellen Variablen x, y. Die zweidimensionale Fouriertransformation von $f(x,y)$ ist dann definiert als

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp[-j(ux+vy)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2-1}$$

mit $j = \sqrt{-1}$. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Fouriertransformierten $F(u,v)$ ist die absolute Summierbarkeit der Funktion $f(x,y)$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \tag{2-2}$$

Ist Gl.(2-2) nicht erfüllt, kann in vielen Fällen mit Hilfe eines Konvergenzfaktors eine Konvergenz des Integrals in Gl.(2-1) erzwungen werden /2.1/. Hierzu wird

$f(x,y)$ beispielsweise durch $f(x,y)\exp(-\alpha x-\beta y)$ mit α,β reellen positiven Konstanten in Gl.(2-1) substituiert, die Integration durchgeführt und anschließend der Grenzwert für $\alpha,\beta\to 0$ gebildet. Entsprechend zu Gl.(2-1) läßt sich $f(x,y)$ aus der kontinuierlichen, absolut integrierbaren Funktion $F(u,v)$ mittels der zweidimensionalen inversen Fouriertransformation berechnen:

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\exp[j(ux+vy)]\,du\,dv \tag{2-3}$$

$f(x,y)$ und $F(u,v)$ werden auch als Fouriertransformationspaar bezeichnet, für das man die Kurzbezeichnung

$$f(x,y) \;\circ\!\!=\!\!\bullet\; F(u,v) \tag{2-4}$$

eingeführt hat (der Doppelstrich deutet auf die Transformation nach zwei Variablen hin). Faßt man die beiden Variablen x,y als Ortskoordinaten und damit $f(x,y)$ als kontinuierliche Ortsfunktion auf, so bezeichnet man $F(u,v)$ als kontinuierliches Ortsfrequenzspektrum der beiden Ortsfrequenzvariablen u und v. Obwohl die obigen Gleichungen sowohl für reell- als auch für komplexwertige $f(x,y)$ gelten, werden im folgenden meist reellwertige Funktionen $f(x,y)$ wie z.B. Intensitätsfunktionen betrachtet; die korrespondierenden Ortsfrequenzspektren sind dagegen im allgemeinen komplexwertige Funktionen, d.h.

$$F(u,v)=\Re e\{F(u,v)\}+j\Im m\{F(u,v)\} \tag{2-5}$$

$F(u,v)$ wird auch oft als Produkt eines Amplituden- und Phasenterms geschrieben:

$$F(u,v)=|F(u,v)|\exp[j\varphi(u,v)] \tag{2-6}$$

wobei man

$$|F(u,v)|=[\Re e\{F(u,v)\}^2+\Im m\{F(u,v)\}^2]^{1/2} \tag{2-7}$$

als Betrags- oder auch als Amplitudenspektrum und

$$\varphi(u,v)=\arctan[\Im m\{F(u,v)\}/\Re e\{F(u,v)\}] \tag{2-8}$$

als Phasenspektrum bezeichnet. Das Quadrat des Amplitudenspektrums

$$|F(u,v)|^2=\Re e\{F(u,v)\}^2+\Im m\{F(u,v)\}^2=F(u,v)F^*(u,v) \tag{2-9}$$

ist das Leistungsspektrum von $f(x,y)$. Ein für viele Bildverarbeitungsprobleme wichtiger Spezialfall ist die Fouriertransformation rotationssymmetrischer Signale. Die resultierenden Ortsfrequenzspektren sind dann ebenfalls rotationssymmetrisch:

$$f(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2}) \;\circ\!\!=\!\!\bullet\; F(u,v)=2\pi\bar{F}(\sqrt{u^2+v^2}) \tag{2-10}$$

Die Fouriertransformation in Gl.(2-1) nach zwei Variablen kann in diesem Fall mit einer Transformation nach einer Variablen, der sogenannten Hankeltransformation, vereinfacht berechnet werden. Die Hankeltransformation ist mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $w = \sqrt{u^2+v^2}$ definiert als

$$\bar{F}(w) = \int_0^\infty r f(r) J_o(wr)\, \mathrm{d}r \tag{2-11}$$

wobei J_o die Besselfunktion nullter Ordnung ist. $f(r)$ bzw. $F(w)$ mit $r \geq 0$ und $w \geq 0$ lassen sich jeweils als Halbprofil der rotationssymmetrischen Funktionen $f(x,y)$ bzw. $F(u,v)$ in der Orts- bzw. Ortsfrequenzebene auffassen. Die Hankelrücktransformation ist identisch zur Vorwärtstransformation, d.h.

$$f(r) = \int_0^\infty w \bar{F}(w) J_o(rw)\, \mathrm{d}w \tag{2-12}$$

$f(r), \bar{F}(w)$ wird als Hankeltransformationspaar bezeichnet, für das auch die Kurzschreibweise

$$f(r) \overset{H}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \bar{F}(w) \tag{2-13}$$

verwendet wird. Im Anhang ist ein Programmbeispiel zur numerischen Berechnung der Hankeltransformation und eine Tabelle mit einigen gebräuchlichen Hankeltransformationspaaren angegeben.

2.1.2 Wichtige Eigenschaften der zweidimensionalen Fouriertransformation

Vertauschungssatz

Faßt man das Ortsfrequenzspektrum $F(u,v)$ der Ortsfunktion $f(x,y)$ als neue Ortsfunktion $F(x,y)$ auf, so hat deren Fouriertransformierte die an den Koordinatenachsen gespiegelte Form $f(-u,-v)$ des ursprünglichen Signals, multipliziert mit $4\pi^2$. In Kurzschreibweise gilt demgemäß:

$$\begin{aligned} f(x,y) &\circ\!\!=\!\!\bullet\; F(u,v) \\ F(x,y) &\circ\!\!=\!\!\bullet\; 4\pi^2 f(-u,-v) \end{aligned} \tag{2-14}$$

Separierbarkeit der Fouriertransformation

Die zweidimensionale Fouriertransformation ist eine separierbare Operation, d.h., sie kann mit Hilfe einer eindimensionalen Fouriertransformation zunächst nach der Variablen x (bzw. y) und anschließend durch eine weitere eindimensionale Fouriertransformation der so erhaltenen Zwischengröße $F_x(u,y)$ (bzw. $F_y(x,v)$) nach der Variablen y (bzw. x) berechnet werden. Das gleiche trifft auch auf die Rücktransformation zu. In Kurzschreibweise gilt:

$$f(x,y) \underset{x}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F_x(u,y) \underset{y}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(u,v) \tag{2-15}$$

$$f(x,y) \underset{y}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F_y(x,v) \underset{x}{\circ\!\!-\!\!\bullet} F(u,v) \tag{2-16}$$

Die Fouriertransformation separierbarer Signale

Nach den Variablen x, y multiplikativ separierbare Signale haben ein nach den Variablen u, v separierbares Spektrum und umgekehrt:

$$f(x,y) = f_x(x)\, f_y(y) \circ\!\!-\!\!\bullet F(u,v) = F_u(u)F_v(v) \tag{2-17}$$
$$\text{mit } f_x(x) \circ\!\!-\!\!\bullet F_u(u) \text{ und } f_y(y) \circ\!\!-\!\!\bullet F_v(v)$$

Entsprechendes gilt für additiv separierbare Signale.

Symmetrieeigenschaften

Einige nützliche allgemeine Symmetriebeziehungen sind

$$f(-x,-y) \circ\!\!-\!\!\bullet F(-u,-v) \tag{2-18}$$

$$f^*(-x,-y) \circ\!\!-\!\!\bullet F^*(u,v) \tag{2-19}$$

Der Stern bezeichnet hierbei konjugiert komplexe Größen. Für die Ortsfrequenzspektren reeller Ortsfunktionen gilt insbesondere

$$F^*(u,v) = F(-u,-v) \tag{2-20}$$

Überlagerungssatz

Da die Fouriertransformation eine lineare Operation ist, ist die Fouriertransformierte von Summen von Ortsfunktionen gleich der Summe ihrer Fouriertransformierten. Es gilt:

$$\sum_{(i)} c_i f_i(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{(i)} c_i F_i(u,v) \tag{2-21}$$
$$\text{mit } f_i(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet F_i(u,v),\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3,\ldots$$

Ähnlichkeitssatz

Eine Dehnung der Ortsfunktion $f(x,y)$ in der Ortsebene führt zu einer Skalierung und Stauchung von $F(u,v)$ in der Ortsfrequenzebene und umgekehrt:

$$f(ax,bx) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \tag{2-22}$$
$$\text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Rotationssatz

Eine Drehung der Funktion $f(x,y)$ im Ortsbereich um einen Winkel α bewirkt eine Drehung von $F(u,v)$ in der Ortsfrequenzebene um den gleichen Winkel im gleichen Richtungssinn und umgekehrt:

$$f_\alpha(x',y') \circ\!\!-\!\!\bullet F_\alpha(u',v') \tag{2-23}$$