Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1415

M. Langevin M. Waldschmidt (Eds.)

Cinquante Ans de Polynômes
Fifty Years of Polynomials

Proceedings, Paris 1988

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1415

M. Langevin M. Waldschmidt (Eds.)

Cinquante Ans de Polynômes
Fifty Years of Polynomials

Proceedings of a Conference
held in honour of Alain Durand
at the Institut Henri Poincaré
Paris, France, May 26–27, 1988

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

Editors
Michel Langevin
Michel Waldschmidt
U. A. 763 du C. N. R. S. Problèmes Diophantiens
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Mathematics Subject Classification (1980): 11C08, 11J81–82–83–85, 12D05–10–99, 12E05–10–12, 26C05–10–15, 26D05, 30C10–15, 30D15, 32E99, 32F99, 65H05–10

ISBN 3-540-52190-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-52190-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper

Alain Durand est né le 16 Avril 1949. Après des études universitaires à l'Université Paris Nord puis à l'Université Paris VII, il obtient son Diplôme d'Etudes Approfondies en 1973 avec les unités "Nombres Transcendants" et "Analyse p–adique". Sa thèse de troisième cycle "Quatre problèmes de Mahler" est soutenue le 26 Juin 1974.

Ses recherches de critères de transcendance et d'indépendance algébrique, ainsi que ses travaux sur la classification des nombres transcendants, l'amènent à entreprendre une étude approfondie et systématique des propriétés arithmétiques des polynômes.

Il commence sa carrière universitaire comme Assistant à l'Université de Limoges le 1er Octobre 1974. Il est titularisé Maître–Assistant un an après. Il n'interrompt ses cours que l'année de son service militaire en 1976–77.

Alain Durand était un enseignant très apprécié des étudiants. Ses cours comme ses exposés de recherche étaient préparés avec beaucoup de soin, dénotant une grande honnêteté intellectuelle et une extrême soif de perfection.

Son décès le 23 Octobre 1986 a profondément attristé tous ceux qui le connaissaient.

Jean–Louis Nicolas, Michel Waldschmidt.

TRAVAUX D'ALAIN DURAND

I-Travaux publiés non reproduits dans ce volume

Un critère de transcendance, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Groupe d'Etude) 1973/74, n°G11, Paris (I.H.P.), 9p.

Quatre problèmes de Mahler sur la fonction ordre d'un nombre transcendant, Bull. Soc. Math. France, 102, 1974, p.365-377 .

Un système de nombres algébriquement indépendants, C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A),280, 1975, p. 309-311.

Fonction θ-ordre et classification de $\mathbb{C}^p$, C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A),280, 1975, p.1085-1088

Note on rational approximations of the exponential function at rational points, Bull. Austral. Math. Soc., 14, 1976, p.449-455.

Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance, Compositio Math., 35, 1977, p.259-267

Approximations algébriques d'un nombre transcendant, C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A), 287, 1978, p.595-597.

Simultaneous diophantine approximations and Hermite's method, Bull. Austral. Math. Soc. 21, 1980, p. 463-470.

A propos d'un théorème de Bernstein sur la dérivée d'un polynôme, C.R.Acad.Sc. Paris, (sér.A), 290, 1980, p.523-525.

II-Travaux reproduits dans ce volume

Quelques aspects de la théorie analytique des polynômes (2 chapitres, 80 p.)

Relation de Szegö sur la dérivée d'un polynôme (Journées de Th. élem. et anal. des Nombres, Orsay, 5/1980).

Approximations algébriques d'un nombre transcendant, (Journées de Th. élem. et anal. des Nombres, Caen, 9/1980).

PREFACE

Ces Actes portent un double titre: " Cinquante Ans de Polynômes " et " Hommage à Alain Durand " . On va expliquer cette double appellation et ce qui fait la réelle unité des travaux réunis dans ce volume.

Alain Durand,en suivant un itinéraire dont nous parlerons plus loin,préparait depuis le début des années 1980 un travail de synthèse sur la "théorie analytique des polynômes". Sa disparition ne nous prive que partiellement de cet ouvrage dont une part importante était déjà prête. Elle est reproduite dans ce volume avec le texte des exposés du Colloque,tous relatifs à des problèmes actuels se posant en termes de polynômes.

<u>Quels polynômes</u> ? Les polynômes en question dans ce Lecture Notes sont,le plus souvent, des polynômes d'une variable complexe. Il s'agit donc d'objets mathématiques peu mystérieux,du moins tant qu'on n'est pas à la recherche de résultats particuliers.
La difficulté est là: les grands théorèmes généraux sont connus et la liste en est courte et complète, les résultats particuliers sont techniques et partiels; de plus,la preuve de ces derniers est assez souvent détournée et astucieuse même si elle n'utilise que des arguments classiques. Dans ce domaine,la littérature est celle qu'on peut attendre dans ce genre de situation: une foule de résultats à la fois fins, élémentaires (parfois), partiels (souvent), dont les auteurs s'ignorent entre eux assez fréquemment. La nécessité d'une synthèse s'impose donc périodiquement,d'autant qu'un même résultat peut revêtir des aspects variés comme on le verra plus loin.

<u>Les synthèses</u> Deux ouvrages majeurs de références ont déjà été publiés. Le premier, "la théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques)" de J.Dieudonné a 50 ans. Le second, "Geometry of polynomials" de M.Marden est de 1966 mais est une actualisation d'un ouvrage de 1949 intitulé "The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable" (il prend ainsi en compte un important "survey" de W.Specht de 1958). La nécessité d'une synthèse récente est donc claire. Celle d'Alain Durand ne suit pas les plans de ses devanciers; il se place dans le point de vue de l'Analyse des années 1980 et reconstruit dans cette optique l'architecture de la théorie,montrant les différentes articulations entre les résultats,lesquels se trouvent souvent ainsi ou améliorés,ou généralisés,ou réduits à des corollaires immédiats.

Les auteurs précédents distinguaient deux types de théorie suivant la nature des arguments utilisés dans les preuves, l'une "analytique" et l'autre "géométrique". L'imbrication profonde de ces deux types de résultats fait d'ailleurs que J.Dieudonné (resp. M.Marden) n'a retenu que l'expression "théorie analytique" (resp."geometry") dans son titre. Alain Durand n'utilise lui que des arguments analytiques (parfois assez sophistiqués) et laisse ainsi de côté certaines formes de résultats; mais ces derniers sont toutefois évoqués dans un autre exposé de ce volume.

Terminons cet alinéa par un exemple facile illustrant cette nécessité d'une synthèse et l'aspect varié que peuvent revêtir des résultats très classiques:
Soit $P(z)=a_o z^d+\ldots+a_d=a_o(z-x_1)\ldots(z-x_d)$ un polynôme à coefficients complexes. L'inégalité :
$M(P)=|a_o|\sup(1,|x_1|)\ldots\sup(1,|x_d|) \leqq L_2(P)=(|a_o|^2+\ldots+|a_d|^2)^{1/2}$
entre coefficients et racines est apparue -au moins implicitement- au début de ce siècle dans un travail de Landau. Il s'agit en fait d'un corollaire de l'inégalité de Hölder,en effet,le membre de gauche (la mesure de Mahler de P) est la moyenne géométrique $L_o(P)$ des valeurs prises par $|P(z)|$ sur le cercle-unité (appliquer la formule de Jensen) tandis que celui de droite représente la moyenne quadratique de la même fonction (appliquer le théorème de Parseval). Malgré la simplicité de ces arguments,on peut faire mieux et plus simple en établissant l'inégalité:
$M(P)^2+(|a_o a_d|/M(P))^2 \leqq (L_2(P))^2$.
Il suffit de faire la démonstration pour un polynôme unitaire.Soit $Q(z)$ le polynôme produit des $(z-x_i)$ lorsque $|x_i|\leqq 1$ et des $(1-\overline{x}_i z)$ lorsque $|x_i|>1$.Le coefficient directeur (resp. constant) de $Q(z)$ est de module $M(P)$ (resp. $|a_d|/M(P)$) et il suffit de minorer $(L_2(Q))^2=(L_2(P))^2$ (puisque $|P(z)|=|Q(z)|$ quand $|z|=1$) par la somme des carrés des termes directeur et constant de Q pour conclure. En résumé,cette inégalité,bien que non évidente,peut être qualifiée de facile; elle a pourtant donné lieu à une série de travaux (dus à Specht,Vicente Gonçalves,Ky Fan,Mignotte ainsi qu'indirectement à d'autres auteurs) avec d'autres démonstrations plus ou moins éloignées de celles qu'on vient d'évoquer.

<u>Les utilisateurs et l'itinéraire d'Alain Durand</u> Il est commode de distinguer deux époques dans l'histoire de cette théorie:
-la première couvre le XIX^{è} et le début du XX^{è} siècle; au cours de celle-ci,les polynômes ont fait l'objet d'études systématiques à l'aide des concepts apportés par la théorie des fonctions d'une variable complexe
-la seconde couvre grosso modo les cinquante dernières années;au cours de cette période ,les recherches systématiques se sont poursuivies mais ont été de plus en plus consacrées à des situations spécifiques. Ces dernières correspondent souvent à des questions formulées dans d'autres domaines de sorte qu'on a vu évoluer la situation ainsi: les utilisateurs des résultats de la théorie (analytique ou géométrique) des polynômes sont devenus les auteurs.

Les domaines de recherche où sont utilisés des "lemmes polynomiaux" sont des plus variés: théorie des nombres (et,en particulier,théorie des nombres transcendants), analyse,théorie du potentiel,mécanique statistique,thermodynamique,informatique... Alain Durand a suivi la démarche qu'on vient de décrire. Il est venu à l'étude systématique des polynômes après avoir utilisé de nombreux "lemmes polynomiaux" dans l'étude des "mesures de transcendance". Plus généralement,la théorie des nombres transcendants fait appel à des constructions de fonctions polynomiales non triviales qu'on minore par des arguments arithmétiques et qu'on majore par des arguments analytiques. A la fin des années 1970, des travaux sur ces derniers (les lemmes de Schwarz en plusieurs variables) ont utilisé des résultats de D.Masser et J.C.Moreau basés sur une inégalité de Bernstein. Ces travaux,qui ont permis à M.Waldschmidt d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème de Baker (cf. Astérique 69/70), ont aussi amené,avec J.C.Moreau,Alain Durand et d'autres membres de l'équipe des Problèmes Diophantiens à étudier et améliorer divers raffinements de cette inégalité.

Le contenu de ces Actes Après avoir parlé du travail d'Alain Durand,on dit quelques mots des exposés de ce Colloque. Les problèmes évoqués dans ce volume se rattachent -en termes de polynômes- presque tous à la Théorie des Nombres,ce qui est naturel puisque cette théorie est,pour les auteurs,la motivation première comme on l'a expliqué ci-dessus. Si les exposés de P.Bundschuh et M.Waldschmidt sont relatifs à des problèmes de la théorie des nombres transcendants qu'avait abordés Alain Durand, d'autres exposés sont moins directement reliés à cette théorie; citons ceux de F.Gramain (fonctions entières arithmétiques), R.Louboutin (problème de Lehmer), M.Mignotte (lemme de Siegel), P.Philippon (polynômes d'interpolation) pour les plus proches et ceux de B.Saffari (comparaison de normes pour les polynômes à coefficients ± 1), A.Schinzel(critère d'irréductibilité), C.Smyth (problème de Tarry-Escott,en collaboration avec E.Rees) pour les voisins un peu plus éloignés; une mention particulière doit être faite pour les exposés "hors théorie des nombres" de M.Langevin (géométrie des polynômes), J.P.Borel (construction d'un multiple à coefficients positifs d'un polynôme), et J.L.Nicolas (avec A.Schinzel) (étude de polynômes particuliers apparaissant en théorie du signal) et notamment pour ces deux cerniers qui illustrent pleinement la variété et la précision des techniques à mettre en oeuvre pour la résolution de problèmes concrets s'exprimant en termes de polynômes.

En conclusion, les éditeurs désireraient remercier tous ceux qui ont favorisé la tenue de ce Colloque et ont ainsi permis de rendre à Alain Durand cet hommage:

-les membres du Comité d'Organisation et d'abord son Président:Monsieur J.Dieudonné

-l'Institut Henri Poincaré où s'est tenu ce Colloque et Madame H.Nocton tout particulièrement

-les Universités de Limoges, Metz et Saint-Etienne

-la direction M.P.B. du C.N.R.S. pour son aide exceptionnelle en faveur de ce Colloque.

Michel Langevin

TABLE DES MATIERES

L'exposé de R.Louboutin: "Le problème de Lehmer, où en est-on?" fera l'objet d'une publication ultérieure

A. DURAND

QUELQUES ASPECTS
DE LA
THEORIE ANALYTIQUE
DES
POLYNOMES

I

U.E.R. DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
123 RUE ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX

AVIS AU LECTEUR

Si c'eût été pour rechercher la faveur du monde, je me fusse mieux paré et me présenterais en une marche étudiée.

Montaigne

Il est une situation pour un auteur qui peut entrainer, selon le moment, un sentiment de contrainte ou de liberté : c'est celle de faire suivre le titre d'une publication d'un numéro d'ordre. La contrainte résulte de l'engagement que l'auteur prend ainsi de continuer dans une voie dont il ignore bien souvent l'exact tracé, mais qu'il devine suffisamment sinueuse pour que, tôt ou tard, lui vienne l'envie d'arpenter des axes beaucoup mieux balisés. Cette contrainte est somme toute bien faible en comparaison de l'immense confort intellectuel que procure une telle situation qui permet, ipso facto, de mettre en exergue le postulat qu'un sujet non abordé est en fait un sujet non *encore* abordé. Outre qu'il est alors possible à l'auteur de réparer des omissions involontaires et de mieux tenir compte de l'évolution du sujet traité et des réactions suscitées par son travail (à supposer qu'il y en ait, ce qui ne fait aucun doute à ses yeux), cela permet également de rendre caduque toute critique essentiellement négative dont le but principal est de prouver le caractère non exhaustif du travail en question, si tant est que l'auteur ait formulé ce dessein.

Ainsi donc, cher lecteur, c'est par touches successives que je vais tenter d'appréhender un sujet aux multiples facettes et de rendre compte à la manière des impressionnistes de certains *aspects* qu'il peut revêtir ; je ne caresse cependant pas l'espoir de dépeindre ainsi son entière réalité et ne puis en cela que reconnaître la subjectivité de mon regard.
Je serais aidé dans cette tâche par Mme Guerletin qui s'est chargée de tout ce qui concerne l'édition de ce premier volume ; je tiens à l'en remercier ici.

A. DURAND.

1- ESTIMATION DES μ-NORMES

§1 PRELIMINAIRES

Si μ est un réel strictement positif, on définit la μ-*norme* d'un polynôme P à coefficients complexes par

$$||P||_\mu := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^\mu d\theta\right)^{1/\mu}.$$

A proprement parler, l'application $P \longmapsto ||P||_\mu$ est une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[z]$ que dans le cas où $\mu \geqslant 1$. On définit également la *norme* et la *mesure* de P respectivement par

$$||P|| := \max_{|z|=1} |P(z)|$$

et

$$M(P) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|d\theta\right),$$

(avec la convention $M(P)=0$ si $P=0$).

Comme cas particulier de résultats classiques en Analyse complexe (voir par exemple G.H. Hardy et al. [1952] p. 136-146), notons que pour tout polynôme P non nul, l'application $\mu \longmapsto \mu \log||P||_\mu$ est convexe sur $]0,+\infty[$ et que l'application $\mu \longmapsto ||P||_\mu$ est une fonction croissante (au sens large) de μ vérifiant

$$\lim_{\mu\to 0} ||P||_\mu = M(P)$$

et

$$\lim_{\mu\to+\infty} ||P||_\mu = ||P|| .$$

Dans certains cas, pour unifier la notation, on écrira donc $||P||_0$ et $||P||_\infty$ au lieu de $M(P)$ et $||P||$ (1). Nous utiliserons en outre les deux notations suivantes, à savoir

- $H(P)$ pour désigner la *hauteur* d'un polynôme P, i.e.

$$H(P) = \max_{0\leqslant j\leqslant p} |a_j| \qquad \text{si } P(z) = \sum_{j=0}^{p} a_j z^j .$$

- *C -polynôme* pour désigner un polynôme non constant dont toutes les racines sont sur le cercle $|z| = 1$.

---

(1) Le mot de "mesure" (et la notation $M(P)$) pour désigner la moyenne géométrique d'un polynôme a été semble-t-il introduit par K. Mahler dans les années soixante et est à présent d'un usage courant en Théorie des nombres.

Les résultats qui seront obtenus dans les paragraphes suivants peuvent être, pour certains d'entre eux, énoncés en termes de polynômes trigonométriques, puisqu'un polynôme trigonométrique f de degré p peut s'écrire sous la forme

$$f(\theta) = e^{-ip\theta}P(e^{i\theta}), \qquad \theta \in \mathbb{C}$$

où $P(z) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^k$ vérifie $|a_0| + |a_{2p}| \neq 0$. Il est à noter que lorsque f est réel, c'est-à-dire lorsque $f(\theta)$ est réel pour θ réel, on peut alors également écrire

$$f(\theta) = \mathrm{Re}\big(Q(e^{i\theta})\big), \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

où $Q \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré p.

§2 POLYNÔMES $\widehat{P}$, $\breve{P}$, P^* ET $P^{\#}$

Dans tout ce qui suit, on considère un polynôme P de degré $p \geq 1$

$$P(z) = \sum_{j=0}^{p} a_j z^j = a_p \cdot \prod_{j=1}^{p} (z-\alpha_j).$$

2.1 POLYNOMES $\widehat{P}$ et $\breve{P}$.

On définit $\widehat{P}$ par

$$\widehat{P}(z) = a_p \prod_{j,|\alpha_j|\leq 1} (z-\alpha_j) \cdot \prod_{j,|\alpha_j|>1} (1-\bar{\alpha}_j z).$$

Le polynôme $\widehat{P}$ est donc de degré p et a toutes ses racines dans le disque $|z| \leq 1$. En outre

$$|P(z)| \geq |\widehat{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| \leq 1$$

et

$$|P(z)| \leq |\widehat{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| \geq 1,$$

la seconde inégalité étant stricte pour $|z| > 1$ si P n'a pas toutes ses racines dans le disque $|z| \leq 1$ (dans le cas contraire, $P = \widehat{P}$).

On définit de même $\breve{P}$ par

$$\breve{P}(z) = a_p \prod_{j,|\alpha_j|\geq 1} (z-\alpha_j) \cdot \prod_{j,|\alpha_j|<1} (1-\bar{\alpha}_j z).$$

Le polynôme $\breve{P}$ est de degré au plus égal à p (et de degré p si $P(0) \neq 0$), ne s'annulant pas dans le disque $|z| < 1$. En outre

$$|P(z)| \geq |\breve{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| \geq 1$$

et

$$|P(z)| \leq |\breve{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| \leq 1,$$

la seconde inégalité étant stricte pour $|z| < 1$ si P s'annule dans le disque $|z| < 1$ (dans le cas contraire, $P = \breve{P}$).

<u>Remarque 2.1.</u> - Notons que si P n'est pas un C-polynôme, on a

$$|\widehat{P}(z)| < |\breve{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| < 1$$

et

$$|\widehat{P}(z)| > |\breve{P}(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| > 1.$$

Il en résulte donc que pour tout nombre complexe ε, $|\varepsilon|=1$ et tout entier $j\geq 0$, le polynôme

$$\breve{P}(z)+\varepsilon\, z^j \widehat{P}(z)$$

est un C-polynôme de degré $p+j$.

2.2 POLYNOME P^*.

On définit P^* par

$$P^*(z) = \sum_{j=0}^{p} \bar{a}_j z^{p-j} = \bar{a}_p \cdot \prod_{j=1}^{p} (1-\bar{\alpha}_j z).$$

Le polynôme P^* est de degré au plus égal à p (et de degré p si $P(0)\neq 0$). Si $P(0)\neq 0$, alors $(P^*)^*=P$.

Pour $|z|=1$, il vient

$$P^*(z)=z^p\,\overline{P(z)}\ ,$$

d'où

$$|P^*(z)|=|P(z)|\ .$$

Notons d'autre part que

$$z\,P^{*\prime}(z) = p P^*(z) - P'^*(z),$$

ce qui implique en particulier

$$|P^{*\prime}(z)| = |p\,P(z) - zP'(z)| \qquad \text{pour } |z|=1.$$

On dira que P est *réciproque* s'il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que $P^*=aP$ (d'où $|a|=1$), autrement dit si pour toute racine α d'ordre r de P, $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ est également racine d'ordre r de P. Un C-polynôme est donc réciproque.

Théorème 2.1. - *Soit P un polynôme ne s'annulant pas dans le disque $|z|<1$. Alors pour tout $(\varepsilon,j)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}$ avec $|\varepsilon|=1$, le polynôme*

$$P(z)+\varepsilon\, z^j P^*(z)$$

est soit nul, soit un C-polynôme.

Preuve : On a par hypothèse $P=\breve{P}$, d'où $P^*=a\widehat{P}$ avec $|a|=1$. Si P n'est pas un C-polynôme, le résultat est obtenu compte-tenu de la remarque 2.1. Si P est un C-polynôme, alors $P^*=aP$ avec $|a|=1$ et donc $P(z)+\varepsilon\, z^j P^*(z) = P(z)\,(1+\varepsilon\, a z^j)$, d'où le résultat. ∎

Référence : G. Polya et G. Szegö [1976] (I, p. 108).

2.3 <u>POLYNOME $P^{\#}$</u>.

On définit le polynôme $P^{\#}$ par

$$P^{\#}(z) = b_o + 2 \sum_{j=1}^{p} b_j z^j$$

où
$$b_j = \sum_{k=0}^{p-j} \bar{a}_k a_{k+j} \qquad (j = 0, 1, \dots, p).$$

Le polynôme $P^{\#}$ est de degré au plus égal à p (et de degré p si $P(0) \neq 0$) et vérifie

$$P^{\#}(0) = ||P||_2^2 ,$$

$$\mathrm{Re}(P(z)) = |P(z)|^2 \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Par conséquent, $P^{\#}$ est élément de l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{Q \in \mathbb{C}[z] \; : \; \mathrm{Re}(Q(z)) \geq 0 \text{ pour } |z|=1 \text{ et } Q(0) > 0\} .$$

Si $Q \in \mathcal{H}$, on obtient $\mathrm{Re}(Q(z)) > 0$ pour $|z| < 1$, donc en particulier $Q(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$. Autrement dit

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$$

où
$$\mathcal{B} = \{Q \in \mathbb{C}[z] \; : \; Q(z) \neq 0 \text{ pour } |z|<1 \text{ et } Q(0) > 0\} .$$

<u>Théorème 2.2</u>. - *L'application* $Q \longmapsto Q^{\#}$ *est une bijection de* $\mathcal{B}$ *sur* $\mathcal{H}$.

On en déduit en particulier

<u>Théorème 2.3</u>. - *Soit* P *un polynôme de degré* $p \geq 1$ *tel que* $\mathrm{Re}(P(z)) \geq 0$ *pour* $|z| = 1$. *Il existe alors un unique polynôme* $Q \in \mathcal{B}$ *(de degré* p*) tel que*

$$\mathrm{Re}(P(z)) = |Q(z)|^2 \qquad \textit{pour} \quad |z| = 1.$$

<u>Preuve du théorème 2.2</u>. : Pour prouver l'injectivité de l'application $Q \longmapsto Q^{\#}$, il suffit de remarquer que si $P^{\#} = Q^{\#}$ avec $P \in \mathcal{B}$ et $Q \in \mathcal{B}$, alors la fonction $z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est unitaire et ne s'annule pas dans le disque $|z| < 1$, donc est constante, et cette constante est égale à 1 puisque $\frac{P(0)}{Q(0)}$ est un réel positif.

Soit $P \in \mathcal{H}$. Le polynôme $H(z) = \frac{1}{2} (z^p P(z) + P^*(z))$ (où p est le degré de P) vérifie

$$H(z) = z^p |H(z)| \qquad \text{pour} \quad |z| = 1.$$