Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1298

J. Aguadé R. Kane (Eds.)

Algebraic Topology Barcelona 1986

Proceedings

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1298

J. Aguadé R. Kane (Eds.)

Algebraic Topology Barcelona 1986

Proceedings of a Symposium held in Barcelona, April 2–8, 1986

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editors

J. Aguadé
Department of Mathematics, Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellatera, Spain

R. Kane
Department of Mathematics, University of Western Ontario
London, Ontario, Canada N6A 5B7

Mathematics Subject Classification (1980): 55-XX

ISBN 3-540-18729-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18729-4 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols.1–1090 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1091: Multifunctions and Integrands. Proceedings, 1983. Edited by G. Salinetti. V, 234 pages. 1984.

Vol. 1092: Complete Intersections. Seminar, 1983. Edited by S. Greco and R. Strano. VII, 299 pages. 1984.

Vol. 1093: A. Prestel, Lectures on Formally Real Fields. XI, 125 pages. 1984.

Vol. 1094: Analyse Complexe. Proceedings, 1983. Edité par E. Amar, R. Gay et Nguyen Thanh Van. IX, 184 pages. 1984.

Vol. 1095: Stochastic Analysis and Applications. Proceedings, 1983. Edited by A. Truman and D. Williams. V, 199 pages. 1984.

Vol. 1096: Théorie du Potentiel. Proceedings, 1983. Edité par G. Mokobodzki et D. Pinchon. IX, 601 pages. 1984.

Vol. 1097: R.M. Dudley, H. Kunita, F. Ledrappier, École d'Éte de Probabilités de Saint-Flour XII – 1982. Edité par P.L. Hennequin. X, 396 pages. 1984.

Vol. 1098: Groups – Korea 1983. Proceedings. Edited by A.C. Kim and B.H. Neumann. VII, 183 pages. 1984.

Vol. 1099: C.M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. XIII, 376 pages. 1984.

Vol. 1100: V. Ivrii, Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators Acting in Fiberings over Manifolds with Boundary. V, 237 pages. 1984.

Vol. 1101: V. Cossart, J. Giraud, U. Orbanz, Resolution of Surface Singularities. Seminar. VII, 132 pages. 1984.

Vol. 1102: A. Verona, Stratified Mappings – Structure and Triangulability. IX, 160 pages. 1984.

Vol. 1103: Models and Sets. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part I. Edited by G.H. Müller and M.M. Richter. VIII, 484 pages. 1984.

Vol. 1104: Computation and Proof Theory. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part II. Edited by M.M. Richter, E. Börger, W. Oberschelp, B. Schinzel and W. Thomas. VIII, 475 pages. 1984.

Vol. 1105: Rational Approximation and Interpolation. Proceedings, 1983. Edited by P.R. Graves-Morris, E.B. Saff and R.S. Varga. XII, 528 pages. 1984.

Vol. 1106: C.T. Chong, Techniques of Admissible Recursion Theory. IX, 214 pages. 1984.

Vol. 1107: Nonlinear Analysis and Optimization. Proceedings, 1982. Edited by C. Vinti. V, 224 pages. 1984.

Vol. 1108: Global Analysis – Studies and Applications I. Edited by Yu.G. Borisovich and Yu.E. Gliklikh. V, 301 pages. 1984.

Vol. 1109: Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems. Proceedings, 1983. Edited by S. Albeverio, P. Combe and M. Sirugue-Collin. IX, 227 pages. 1985.

Vol. 1110: R. Jajte, Strong Limit Theorems in Non-Commutative Probability. VI, 152 pages. 1985.

Vol. 1111: Arbeitstagung Bonn 1984. Proceedings. Edited by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter. V, 481 pages. 1985.

Vol. 1112: Products of Conjugacy Classes in Groups. Edited by Z. Arad and M. Herzog. V, 244 pages. 1985.

Vol. 1113: P. Antosik, C. Swartz, Matrix Methods in Analysis. IV, 114 pages. 1985.

Vol. 1114: Zahlentheoretische Analysis. Seminar. Herausgegeben von E. Hlawka. V, 157 Seiten. 1985.

Vol. 1115: J. Moulin Ollagnier, Ergodic Theory and Statistical Mechanics. VI, 147 pages. 1985.

Vol. 1116: S. Stolz, Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder. XXIII, 134 Seiten. 1985.

Vol. 1117: D.J. Aldous, J.A. Ibragimov, J. Jacod, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII – 1983. Édité par P.L. Hennequin. IX, 409 pages. 1985.

Vol. 1118: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Seminaire, 1982/83. Edité par Th. Jeulin et M. Yor. V, 315 pages. 1985.

Vol. 1119: Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Proceedings, 1984. Edited by I. Capuzzo Dolcetta, W.H. Fleming and T. Zolezzi. VI, 202 pages. 1985.

Vol. 1120: K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras. V, 118 pages. 1985.

Vol. 1121: Singularities and Constructive Methods for Their Treatment. Proceedings, 1983. Edited by P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman. IX, 346 pages. 1985.

Vol. 1122: Number Theory. Proceedings, 1984. Edited by K. Alladi. VII, 217 pages. 1985.

Vol. 1123: Séminaire de Probabilités XIX 1983/84. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 504 pages. 1985.

Vol. 1124: Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983. Proceedings. Edited by E. Casas-Alvero, G.E. Welters and S. Xambó-Descamps. XI, 416 pages. 1985.

Vol. 1125: Dynamical Systems and Bifurcations. Proceedings, 1984. Edited by B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens. V, 129 pages. 1985.

Vol. 1126: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1983. Edited by A. Ranicki, N. Levitt and F. Quinn. V, 423 pages. 1985.

Vol. 1127: Numerical Methods in Fluid Dynamics. Seminar. Edited by F. Brezzi, VII, 333 pages. 1985.

Vol. 1128: J. Elschner, Singular Ordinary Differential Operators and Pseudodifferential Equations. 200 pages. 1985.

Vol. 1129: Numerical Analysis, Lancaster 1984. Proceedings. Edited by P.R. Turner. XIV, 179 pages. 1985.

Vol. 1130: Methods in Mathematical Logic. Proceedings, 1983. Edited by C.A. Di Prisco. VII, 407 pages. 1985.

Vol. 1131: K. Sundaresan, S. Swaminathan, Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces. III, 116 pages. 1985.

Vol. 1132: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory. Proceedings, 1983. Edited by H. Araki, C.C. Moore, Ş. Strătilă and C. Voiculescu. VI, 594 pages. 1985.

Vol. 1133: K.C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. VI, 362 pages. 1985.

Vol. 1134: G.P. Galdi, S. Rionero, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. VII, 126 pages. 1985.

Vol. 1135: Number Theory, New York 1983–84. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 283 pages. 1985.

Vol. 1136: Quantum Probability and Applications II. Proceedings, 1984. Edited by L. Accardi and W. von Waldenfels. VI, 534 pages. 1985.

Vol. 1137: Xiao G., Surfaces fibrées en courbes de genre deux. IX, 103 pages. 1985.

Vol. 1138: A. Ocneanu, Actions of Discrete Amenable Groups on von Neumann Algebras. V, 115 pages. 1985.

Vol. 1139: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1983. Edited by H. D. Doebner and J. D. Hennig. VI, 337 pages. 1985.

Vol. 1140: S. Donkin, Rational Representations of Algebraic Groups. VII, 254 pages. 1985.

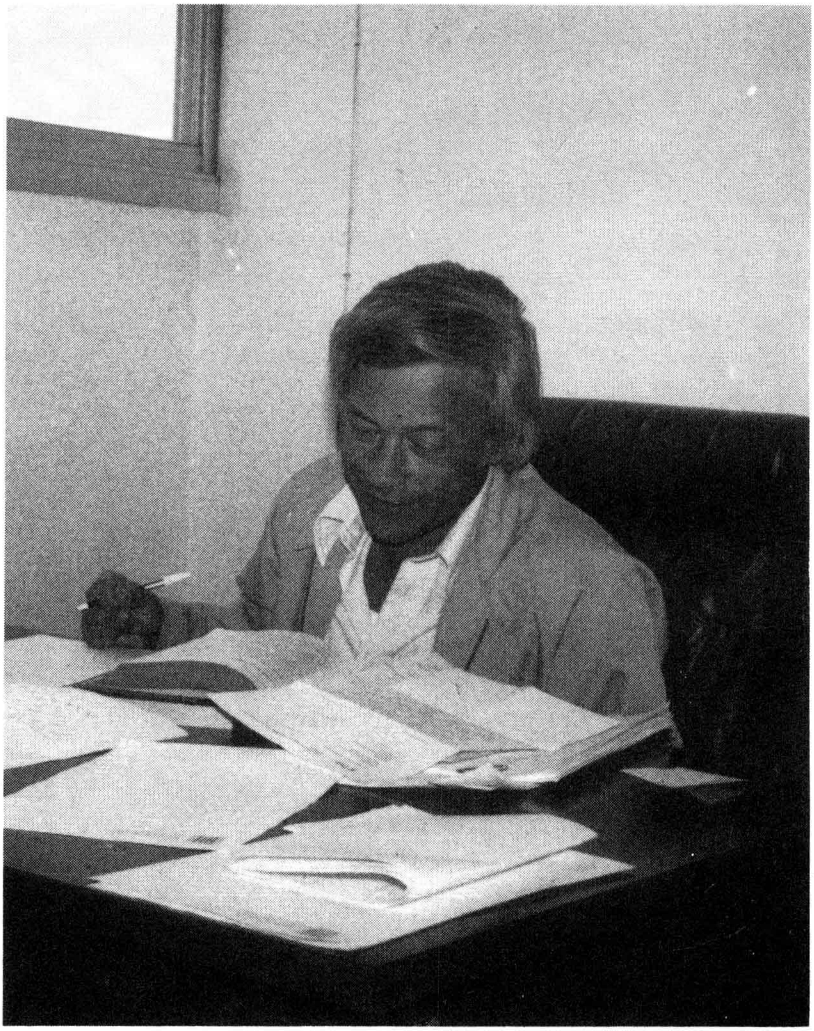
Vol. 1141: Recursion Theory Week. Proceedings, 1984. Edited by H.-D. Ebbinghaus, G.H. Müller and G.E. Sacks. IX, 418 pages. 1985.

Vol. 1142: Orders and their Applications. Proceedings, 1984. Edited by I. Reiner and K. W. Roggenkamp. X, 306 pages. 1985.

Vol. 1143: A. Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions. XIII, 203 pages. 1985.

Vol. 1144: Knot Theory and Manifolds. Proceedings, 1983. Edited by D. Rolfsen. V, 163 pages. 1985.

continued on page 261



Alexander Zabrodsky

The second Barcelona Conference on Algebraic Topology was held April 2-8 1986 at the Institut d'Estudis Catalans, Barcelona. The organizing commitee was formed by J. Aguadé, M. Castellet, J. Hubbuck, I. James and R. Kane. Titles of the talks delivered at the conference as well as a list of participants are given below. These Proceedings contain transcripts of some of the conference talks as well as related papers. All papers were refereed.

Alex Zabrodsky was one of the invited speakers at the conference. It was one of the last conferences he attended. For he died in an automobile accident in New York State in November 1986. A true memorial volume dedicated to Alex will appear in the Israel Journal of Mathematics (of which he was an editor). However we felt it would be inexcusable if these Proceedings did not also record the great sorrow felt by Alex's colleagues at his death. We miss him greatly. We have dedicated the Proceedings to his memory.

J. Aguadé

R. Kane

LIST OF PARTICIPANTS

J.F. Adams (Cambridge)
J. Aguadé (Barcelona)
A. Assadi (Madison)
M. Audin (Orsay)
A. Baker (Manchester)
A.J. Berrick (Singapore)
C. Broto (Barcelona)
C. Casacuberta (Barcelona)
M. Castellet (Barcelona)
F. Clarke (Swansea)
L. Contreras (Madrid)
M.C. Crabb (Aberdeen)
A. Dold (Heidelberg)
E. Dror-Farjoun (Jerusalem)
J.I. Extremiana (Zaragoza)
W. Gerdes (Heidelberg)
N.D. Gilbert (Bangor)
H. Glover (Columbus)
F. Gómez (Málaga)
K.A. Hardie (Cape Town)
H.N. Henn (Heidelberg)
J. Harper (Rochester)
L.J. Hernández (Zaragoza)
J. Hubbuck (Aberdeen)
S. Illman (Helsinki)
K. Jänich (Regensburg)
I.M. James (Oxford)
J.F. Jardine (London, Ont.)
J. Jones (Warwick)
R. Kane (London, Ont.)
A. Kono (Kyoto)
J. Lannes (Palaiseau)
I. Llerena (Barcelona)
L. Lomonaco (Napoli)
J. Mayorquin (St. John's)
C.A. McGibbon (Detroit)
B. Metz (Wuppertal)
H. Miller (Boston)
M. Mimura (Okayama)
G. Mislin (Zürich)
S. Mitchell (Seattle)
J. Møller (Kobenhavn)
A.G. Naoum (Baghdad)
J.L. Navarro (Zaragoza)
J. Neisendorfer (Rochester)
K. Ôguchi (Tokyo)
E. Ossa (Wuppertal)
P.S. Pacheco (Los Angeles)
M. Pfenniger (Zürich)
S. Priddy (Evanston)
M. Raussen (Aalborg)
M.T. Rivas (Zaragoza)
G. Romero-Melendez (Heidelberg)
L. Rubin (Norman, Okl.)
L. Saumell (Barcelona)
H. Scheerer (Berlin)
R. Schön (Heidelberg)
L. Schwartz (Orsay)
F. Sigrist (Neuchâtel)
L. Smith (Göttingen)
S. Stolz (Mainz)
U. Suter (Neuchâtel)
E. Vallejo (Heidelberg)
A. Vidal (Barcelona)
C. Wilkerson (Detroit)
Z. Wojtkoviak (Barcelona)
C. Wolf (Heidelberg)
R.M.W. Wood (Manchester)
U. Würgler (Bern)
A. Zabrodsky (Jerusalem)
S. Zarati (Tunis)

TITLES OF TALKS
(in chronological order)

Main Talks

S. Priddy	"On stable splittings of spaces associated with Chevalley groups"
L. Smith	"Chern classes and invariant theory of finite groups"
R. Wood	"Splitting the suspension of products of CP^{∞}"
G. Mislin	"The homotopy classification of self-maps of infinite quaternionic projective space"
A. Zabrodsky	"Some applications of the Sullivan conjecture"
J. Lannes	"On the structure of the U-injectives"
J. Jones	"Products in cyclic cohomology and the Chern character"
M. Audin	"V.I. Arnold's cobordism groups of Lagrange immersions"
J. Neisendorfer	"Fibrewise localisation"
C. Wilkerson	"Homotopy uniqueness of classifying spaces"
J. Harper	"Cogroups which are not suspensions"
A. Kono	"The mod 2 cohomology ring of quotients of compact Lie groups by maximal tori"
S. Mitchell	"A stable decomposition of the loops on SU(n)"
J.F. Adams	"Exposition of recent work of M.J. Hopkins"
S. Stolz	"Involutions of spheres and Mahowald's root invariant"

Short communications

A. Dold	"Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers"
E. Dror	"Equivariant function complexes"
H. Scheerer	"Tame homotopy theory"
C. McGibbon	"Classifying speces of the same n-type for all n"
L. Rubin	"Current trends in dimension theory"
U. Würgler	"Reduced power operations in Morava K-theory"

L. Schwartz	"About cohomology of iterated loop spaces and a conjecture of Serre"
J.M. Moller	"Section spaces"
M. Mimura	"Examples of A_n-spaces"
A. Assadi	"Some applications of modular representation theory to homotopy theory"
M.C. Crabb	"Remarks on the stable splitting theorems of Snaith and Miller"
Z. Wojtkowiak	"On maps from $B\pi$ into X"
P.S. Pacheco	"K_{-i}-obstructions to factoring an open manifold"
K. Hardie	"The homotopy category of homotopy factorisations"
N.D. Gilbert	"On the cat^n-group of n-cubes of spaces"
A.J. Berrick	"McLain groups and Eilenberg-MacLane spaces"
M. Raussen	"Deformations, circle actions on rational homotopy types, and symmetries on manifolds"
L.J. Hernández	"On the proper homotopy classification problem"
A. Naoum	"On semi-free circle actions on homotopy spheres"
S. Illman	"Reduction of the transformation groups in equivariant CW complexes and equivariant homotopy type: Applications to poinwise skeletal approximations of G-maps"
H. Glover	"Cycle assignment and graph embedding"
A. Baker	"Towards E_*BSU"
S. Zarati	"Unstable algebras over the Steenrod algebra"

TABLE OF CONTENTS

CLASSES CARACTERISTIQUES LAGRANGIENNES

Michèle Audin
Université de Paris-Sud
Mathématique, Bât 425
F-91405 Orsay-Cedex, France

La première classe caractéristique lagrangienne a été inventée par [Maslov] pour sa théorie des solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. C'est Arnold qui a expliqué pourquoi cet "indice de Maslov" est une classe caractéristique au sens classique du terme : elle provient d'un espace classifiant.

Cette classe, et ses généralisations possibles, ont suscité une abondante littérature, principalement du fait de géomètres, donc beaucoup de descriptions à la Chern-Weil ou à la Chern-Simons.

Dans une première partie, je vais essayer de faire le point sur la question, dans l'esprit (et la lettre) d'[Arnold$_1$]. Je ne prétends là à aucune originalité, ni à une quelconque exhaustivité des références.

Dans la deuxième partie, je montrerai comment on peut théoriquement calculer les classes de cohomologie d'une variété V qui sont des classes caractéristiques pour les immersions lagrangiennes de V, et je finirai le calcul si V est une sphère ou un tore.

Dans la troisième partie, j'expliquerai quels "nombres caractéristiques" d'immersions lagrangiennes on peut effectivement réaliser.

0. Définitions et rappels

Le cadre est celui de la géométrie symplectique. Pour faire le point sur les diverses classes en circulation, je vais devoir me placer dans des situations plus générales que celle que j'étudierai dans la partie 2. Voici donc quelques définitions.

0.1. Symplectique

On appelle

Espace vectoriel symplectique un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire alternée non-dégénérée. Le seul invariant du type d'isomorphisme d'un tel espace est sa dimension, qui est paire.

Le modèle le plus agréable à utiliser dans notre contexte est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, avec la forme ω définie par

$$\omega(X,Y) = \mathrm{Im}\langle X,Y\rangle$$

(partie imaginaire de la forme hermitienne standard).

Fibré vectoriel symplectique un fibré vectoriel $E \to X$, dont chaque fibre E_x est munie d'une forme ω_x qui en fait un espace vectoriel symplectique, la correspondance $x \mapsto \omega_x$ étant C^∞ (la base X sera toujours une variété).

Variété symplectique une variété Y munie d'une 2-forme différentielle ω qui fasse de $TY \to Y$ un fibré symplectique (c'est-à-dire, si dim Y=2n, que ω^n est une forme volume). Pour des raisons qui nous concernent assez peu ici, on demande en plus que ω soit fermée ($d\omega=0$).

L'exemple fondamental est celui où Y est le fibré cotangent d'une variété X

$$Y = T^*X \longrightarrow X,$$

il y a alors une 1-forme λ (pour "Liouville") sur Y, qui dans des coordonnées locales (x_i sur X, ξ_i les coordonnées cotangentes) s'écrit :

$$\lambda = \Sigma\, \xi_i dx_i$$

et $\omega=-d\lambda$ est une forme symplectique sur Y.

Si $X=\mathbb{R}^n$, l'identification

$$T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x,\xi) \mapsto x+i\xi$$

identifie aussi $\omega=-d\lambda$ et $\omega=\mathrm{Im}\langle,\rangle$: c'est la forme $\Sigma\, dx_i \wedge d\xi_i$.

0.2. Lagrangien

un sous-espace réel L de $\mathbb{C}^n$ est dit lagrangien s'il est totalement isotrope ($\omega_{|L}=0$) maximal (dim L=n). Si $\perp$ désigne l'orthogonalité pour le produit scalaire euclidien $X.Y=\mathrm{Re}\langle X,Y\rangle$, il est clair que

0.2.1. L est lagrangien si et seulement si $L = (iL)^\perp$

un sous-fibré $L \to X$ d'un fibré symplectique est un <u>sous-fibré lagrangien</u> si toutes les fibres $L_x \subset E_x$ sont lagrangiennes.

une <u>immersion</u> $f : L \to Y$ dans une variété symplectique est dite <u>lagrangienne</u> si TL est un sous-fibré lagrangien de f^*TY, c'est-à-dire si $f^*\omega=0$ et $\dim L=\frac{1}{2}\dim Y$. Par exemple, les fibres et la section nulle du fibré cotangent T^*X sont lagrangiennes.

1. Maslov, Arnold, Borel, Fuks, et les autres...

1.1. <u>Les remarques de base</u>

1.1.1. Le groupe $Sp(2n,\mathbb{R})$ des isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$ qui préservent la forme ω se rétracte sur son sous-groupe $U(n)$ (c'est sa composante compacte). En particulier, si $E \to X$ est un fibré vectoriel symplectique, il existe "une" structure de fibré vectoriel hermitien sur E, dont ω est la partie imaginaire (il y en a beaucoup, mais elles sont toutes homotopes). Une telle structure sera toujours sous-entendue dans la suite.

1.1.2. Si E contient un sous-fibré lagrangien, on a un isomorphisme

$$L\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \longrightarrow E$$

d'après 0.2.1. On voit ainsi que, s'il existe beaucoup de fibrés vectoriels symplectiques (tous les fibrés vectoriels hermitiens), il y en a assez peu parmi eux qui possèdent des sous-fibrés lagrangiens !

1.1.3. Toujours d'après 0.2.1, le groupe $U(n)$ opère transitivement sur la grassmannienne Λ_n des lagrangiens de $\mathbb{C}^n$ avec sous-groupe d'isotropie $O(n)$: toute base orthonormée d'un lagrangien est une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^n$ et réciproquement. La grassmannienne $\Lambda_n \cong U(n)/O(n)$, avec son fibré vectoriel tautologique, est l'espace classifiant pour les fibrés vectoriels réels de rang n dont le complexifié est trivialisé.

1.1.4. Dans Λ_n, le sous-espace des lagrangiens transverses à un lagrangien fixé L s'identifie à l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de L : la correspondance est

$$(\varphi : L \to L) \mapsto (\text{graphe de } \varphi\circ i : iL=L^{\perp} \to L)$$

En particulier, cet espace est contractile.

1.1.5. Si L_0 et L_1 sont deux sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique $E \to X$ de rang $2n$, ils définissent une "différence" :

$$d(L_0,L_1) : X \longrightarrow \Lambda_m \text{ (m assez grand)}$$

dont voici deux descriptions :

a) $L_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong E \cong L_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donc $L_0 - L_1$ est classifié dans U/O, et, plus géométriquement :

b) Soit M_0 un fibré vectoriel réel tel que $L_0 \oplus M_0$ soit trivial de rang m, alors $L_1 \oplus M_0$ est un sous-fibré lagrangien du fibré symplectique trivial $E \oplus (M_0 \otimes \mathbb{C})$. Pour chaque x de X, la fibre en x de ce sous-fibré diffère de $\mathbb{R}^m = (L_0 \oplus M_0)_x$ par un élément de $U(m)$, bien défini modulo $O(m)$; on obtient ainsi une application

$$d(L_0,L_1) : X \longrightarrow \Lambda_m.$$

Cette application permet de rappeler en arrière les éléments de $H^*(\Lambda_m)$ pour définir des <u>classes caractéristiques lagrangiennes</u> qui, d'après 1.1.4, sont des obstructions à la transversalité des deux sous-fibrés L_0 et L_1, en particulier des obstructions à la transversalité de deux feuilletages lagrangiens d'une variété symplectique, ce qui explique qu'elles intéressent les géomètres : je renvoie à [Morvan], [Morvan-Niglio], [Vaisman], entre autres, pour des descriptions de classes de cohomologie de de Rham ainsi obtenues.

1.1.6. Un autre cas particulier important est celui fourni par une immersion lagrangienne $f : L \to T^*X$, où l'on dispose

a) d'un fibré symplectique $f^*(T(T^*X)) \longrightarrow L$

b) de deux sous-fibrés lagrangiens :

le fibré tangent aux fibres de $T^*X \longrightarrow X$, rappelé sur L

le fibré tangent TL.

La construction de 1.1.5 fournit dans ce cas des classes caractéristiques pour l'immersion f, reliées à la transversalité de f aux fibres de $T^*X \to X$, donc aux singularités de la projection $L \to T^*X \to X$.

Les classes caractéristiques lagrangiennes provenant, par définition, de la cohomologie de $U(m)/O(m)$, il nous reste à calculer cette dernière. Commençons par la dimension 1, à cause de l'importance de la classe de Maslov.

1.2. Classe de Maslov

Elle est définie comme indice de Morse le long d'un chemin par [Maslov], je n'ai évidemment pas la place de citer toute la littérature qui lui est consacrée, cependant, pour évoquer le parfum de certaines applications (approximation semi-classique à la mécanique quantique) je renvoie à la très belle utilisation dans la quantification de l'énergie (spectre de l'équation de Schrödinger) expliquée par Maslov, Arnold et [Duistermaat].

Le § 1.1 était écrit dans l'esprit d'[Arnold_1], voici donc la définition de la classe de Maslov qu'on y trouve : on a une fibration

$$SU(n)/SO(n) \subset U(n)/O(n) \xrightarrow{D} S^1$$

où D est induite par le carré du déterminant dans U(n). On en déduit immédiatement que $H^1(\Lambda_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, engendré par l'image m du générateur de $H^1(S^1;\mathbb{Z})$ par D^*.

Arnold a montré aussi, dans l'optique "transversalité/singularités" évoquée plus haut, que, pour une immersion lagrangienne générique

$$f : L \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$$

la classe induite par m est duale au cycle des points singuliers de la projection

$$L \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

C'est la source de généralisations de la définition de m en dimensions plus grandes que je signalerai au §1.3.

Une autre façon possible de généraliser la classe de Maslov a été proposée par [Viterbo]. Il s'agit de construire une classe analogue pour des immersions lagrangiennes dans une variété symplectique qui n'est pas forcément un cotangent (il y a des applications intéressantes). Soit donc $E \to X$ un fibré symplectique quelconque. On considère le fibré en grassmanniennes $\Lambda_n \subset \Lambda E \to X$. On cherche s'il existe une classe $\tilde{m} \in H^1(\Lambda E;\mathbb{Z})$ dont la restriction à chaque fibre soit m. Remarquons que, si $\mathcal{U}$ est un ouvert trivialisant E (et ΛE), alors

$$\Lambda E_{|\mathcal{U}} = \Lambda_n \times \mathcal{U} \xrightarrow{D} S^1$$

définit localement une extension de m à E. L'application D ($=\text{dét}^2$) se définit globalement, c'est-à-dire "traverse" les changements de cartes complexes de E, exactement quand le fibré en droites complexes $\text{dét}(E)^{\otimes 2}$ est trivialisable, c'est-à-dire quand $2c_1(E)=0 \in H^2(X;\mathbb{Z})$ (les choix de trivialisations et de $\tilde{m}$ sont paramétrés par $H^1(X;\mathbb{Z})$). Il est clair aussi que cette condition ($2c_1(E)=0$) est une, mais seulement une des obstructions à ce que E soit complexifié d'un fibré vectoriel réel.

Le lecteur aura vu apparaître dans cette remarque la transgression de la fibration

$$U(n)/O(n) \longrightarrow BO(n) \xrightarrow{\otimes\mathbb{C}} BU(n)$$

ce qui est une transition avec

1.3. Classes de Borel-Fuks

Quand j'entends parler de cohomologie d'un espace homogène, j'ouvre mon [Borel], et plus précisément je considère la fibration

$$\Lambda = U/O \longrightarrow BO \xrightarrow{\otimes\mathbb{C}} BU$$

Voici donc la cohomologie de Λ :

Il existe des classes $\beta_{2k} \in H^{4k+1}(\Lambda;\mathbb{Z})$ telles que

a) $\beta_0 = m$.

b) la transgression de β_{2k} est $2c_{2k+1} \in H^{4k+2}(BU;\mathbb{Z})$, ce qui définit β_{2k} à un élément d'ordre 2 près.

c) la réduction modulo 2 de β_{2k} est $w_{2k}w_{2k+1}$ (w_i désigne la i-ème classe de Stiefel-Whitney).

d) si A est un anneau contenant $\frac{1}{2}$, $H^*(\Lambda;A)$ est l'algèbre extérieure sur les (images des) β_{2k}, qui sont primitives pour le coproduit naturel (c'est vrai aussi dans $H^*(\Lambda;\mathbb{Z})$ mod. torsion, d'après [Fuks]).

e) $H^*(BO;\mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\Lambda;\mathbb{Z}/2)$ est surjective, et son noyau est formé des carrés.

f) les classes $\beta_0,\dots,\beta_{2k}$ sont déjà dans $H^*(\Lambda_{2k+1};\mathbb{Z})$ et suffisent à engendrer $H^*(\Lambda_{2k+1};A)$.

[Fuks] a décrit la cohomologie de U(n)/O(n) à l'aide de classes duales à des cycles de Schubert, bien reliées aux questions de transversalité et de singularités. Une façon plus abstraite de définir des classes caractéristiques en petites dimensions à l'aide de singularités a été proposée par [Vassiliev] (voir aussi [M.A.$_1$]).