Lecture Notes in Mathematics
1553

J.-L. Colliot-Thélène K. Kato P. Vojta

Arithmetic Algebraic Geometry

Trento, 1991

Editor: E. Ballico

Springer-Verlag

J.-L. Colliot-Thélène   K. Kato   P. Vojta

Arithmetic Algebraic Geometry

Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C. I. M. E.) held in Trento, Italy, June 24-July 2, 1991

Editor: E. Ballico

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo
Hong Kong Barcelona
Budapest

Authors

Jean-Louis Colliot-Thélène
Université Paris-Sud
Mathématique, Bât. 425
F-91005 Orsay Cedex, France

Kazuya Kato
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology
Oh-Okayama, Meguro-ku
Tokyo, Japan

Paul Vojta
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720, USA

Editor
Edoardo Ballico
Dipartimento di Matematico
Università di Trento
38050 Povo, Trento, Italy

Mathematics Subject Classification (1991): 14C15, 14C25, 14C35, 19E15, 14G40, 11J99, 11M99, 11G99, 11R23, 14M20

ISBN 3-540-57110-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-57110-8 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
46/3140-543210 - Printed on acid-free paper

Editorial Policy

§ 1. Lecture Notes aim to report new developments - quickly, informally, and at a high level. The texts should be reasonably self-contained and rounded off. Thus they may, and often will, present not only results of the author but also related work by other people. Furthermore, the manuscripts should provide sufficient motivation, examples and applications. This clearly distinguishes Lecture Notes manuscripts from journal articles which normally are very concise. Articles intended for a journal but too long to be accepted by most journals, usually do not have this "lecture notes" character. For similar reasons it is unusual for Ph. D. theses to be accepted for the Lecture Notes series.

§ 2. Manuscripts or plans for Lecture Notes volumes should be submitted (preferably in duplicate) either to one of the series editors or to Springer- Verlag, Heidelberg . These proposals are then refereed. A final decision concerning publication can only be made on the basis of the complete manuscript, but a preliminary decision can often be based on partial information: a fairly detailed outline describing the planned contents of each chapter, and an indication of the estimated length, a bibliography, and one or two sample chapters - or a first draft of the manuscript. The editors will try to make the preliminary decision as definite as they can on the basis of the available information.

§ 3. Final manuscripts should preferably be in English. They should contain at least 100 pages of scientific text and should include

- a table of contents;
- an informative introduction, perhaps with some historical remarks: it should be accessible to a reader not particularly familiar with the topic treated;
- a subject index: as a rule this is genuinely helpful for the reader.

Further remarks and relevant addresses at the back of this book.

Lecture Notes in Mathematics 1553

Subseries: Fondazione C. I. M. E., Firenze
Adviser: Roberto Conti

PREFACE

The CIME Session on "Arithmetic Algebraic Geometry" was held at Villa Madruzzo (Trento, Italy) from June 24 to July 2, 1991.

There were the following lecture series:

- Jean Louis Colliot-Thélène: Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique
- Kazuya Kato: Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-function via B_{dR}
- Christophe Soulé: Arakelov Geometry
- Paul Vojta: Application of arithmetic geometry to Diophantine approximations

Furthermore, the participants gave several seminars, namely:

- Dan Abramovich: Subvarieties of Abelian Varieties and Jacobians
- Luca Barbieri Viale: Birational Invariants Via Cohomology Theories
- Torsten Ekedahl: a) An Infinite Version of Chinese Remainder Theorem
  b) On the Density of Extensions of Generic Ramification Type
- Frans Oort: a) CM Liftings of Abelian Varieties
  b) A Conjecture by Coleman Jacobians over C having Complex Multiplication
  c) Newton Polygons and Abelian Varieties
- Angelo Vistoli: Bivariant Intersection Theory and Alexander Duality
- Christoph Wirsching: Quillen's Metric for G(2,4)

This volume contains enlarged versions of three of the lecture series. For an exposition of Soulé's lectures, see the very recent book by Ch. Soulé, D. Abramovich, J. F. Burnol and J. K. Kramer: "Arakelov Geometry", Cambridge Studies in Advanced Mathematics 33, Cambridge University Press, 1992.

The four main speakers took particular pains to start at a level understandable by motivated (but not specialist) graduate students and then they arrived at the frontier of research (and beyond). They provided further support for their audience in various ways, before, during and after this CIME Session. Just an example: J.L. Colliot-Thélène drew up, as early as 1990, a long list of references (both elementary and very advanced) complete with detailed comments on their content: the list was widely circulated. The authors of the three lecture series published here made the same effort for their written versions.

I owe special thanks to several people (including all the lecturers and participants) for their precious help (both on mathematical and practical matters) in connection with the organization of the conference and the production of this volume.

Edoardo Ballico

Table of Contents

Cycles algébriques de torsion et K–théorie algébrique
Cours au C.I.M.E., juin 1991

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématique
Université de Paris–Sud
91405 ORSAY Cedex

L'objet de ce cours est de décrire certaines applications qu'a eues la K–théorie algébrique à l'étude des cycles de torsion sur les variétés algébriques, et plus particulièrement à l'obtention de théorèmes de finitude, sous diverses hypothèses arithmétiques sur la nature du corps de base. Ce domaine de recherches fut ouvert par Spencer Bloch en 1974, connut de nouveaux développements à la suite de la percée de Merkur'ev et Suslin en 1982, et a fait l'objet d'un rapport de W. Raskind en 1989 ([R1]).

Une série de travaux récents montre que le sujet est loin d'être épuisé, et il m'a donc semblé bon de faire à nouveau le point.

La première partie de mes exposés au C.I.M.E. fut consacrée aux résultats classiques, qu'on trouvera dans les paragraphes 1 à 5. Après un rappel des résultats de finitude connus sur le groupe de Picard (§ 1), on définit au § 2 les groupes de Chow et on décrit au § 3 le programme de Spencer Bloch pour contrôler la torsion dans ces groupes de Chow. Au § 4, le lecteur trouvera une démonstration simple du théorème de Roitman sur les zéro–cycles de torsion lorsque le corps de base est algébriquement clos, sans réduction au cas des surfaces. Passant au cas d'un corps de base fini, on esquisse au § 5 la démonstration simplifiée (Raskind et l'auteur) du théorème de Kato et Saito sur les extensions non ramifiées de variétés projectives et lisses sur un corps fini et le groupe de Chow en dimension zéro. On explique également le théorème de finitude (Sansuc, Soulé et l'auteur) pour la torsion en codimension deux.

Les paragraphes 6 à 9, qui développent mes deux derniers exposés au C.I.M.E., sont consacrés à des résultats récents (1989–1991) de Raskind et l'auteur [CR3], de Salberger [Sb2], et de S. Saito [S4], résultats qui portent sur la finitude de la torsion du groupe de Chow en codimension deux pour une variété projective et lisse X, définie sur un corps k arithmétique (local ou global), et satisfaisant l'hypothèse que le second groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ s'annule. Les premiers résultats de finitude pour cette torsion avaient été obtenus sous l'hypothèse additionnelle $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. C'est Salberger qui montra comment éliminer cette dernière hypothèse lorsque k est un corps de nombres.

L'approche de Raskind et de l'auteur, au–dessus d'un corps de nombres, est décrite au § 6. J'ai inclus dans ce paragraphe une brève esquisse de la méthode galoisienne, qui avait déjà permis dans le passé d'obtenir des résultats de finitude pour certaines variétés (Bloch [B4], l'auteur [C1], Gros [G], Ōkōchi, et plus récemment Coombes [Cb], sur un corps global ; Raskind et l'auteur [CR1], sur un corps local). L'approche plus récente de S. Saito [S4] fait l'objet du § 7. Je me suis astreint à bien dégager les énoncés valables au–dessus d'un corps quelconque. Cette démarche permet d'obtenir certains résultats de finitude au–dessus d'un corps de type fini sur le corps des rationnels. Au § 8, je décris les résultats que cette même approche permet d'obtenir au–dessus d'un corps local. Enfin, au § 9, je donne quelques indications sur l'approche de Salberger, renvoyant à sa récente prépublication [Sb2] pour plus de détails.

J'ai arrêté là ce rapport sur les cycles de torsion. Parmi les thèmes que je ne traite pas, mais qui méritent l'intérêt du lecteur, je citerai :

– Les conjectures et résultats très précis sur le groupe de Chow des zéro–cycles sur une surface rationnelle définie sur un corps de nombres (travaux de Sansuc et l'auteur [CS], et de Salberger [Sb1]), qu'on voudrait bien voir généraliser, au moins conjecturalement, à de plus vastes classes de variétés. Dans l'immédiat, on aimerait traiter le cas de surfaces satisfaisant

$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, cas où les approches précises de Coombes [Cb] (que je ne traite pas ici) et de Saito [S4] pourraient se révéler utiles.

– Les travaux en cours de Bloch et de ses élèves sur la torsion du groupe de Chow de certaines surfaces X au-dessus d'un corps de nombres avec $H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ (sur un corps local, voir [R2]).

– Les exemples de torsion dans le groupe de Griffiths dus à C. Schoen [Sc].

Plan

Remerciements. L'influence des travaux de Spencer Bloch sur tout ce sujet est manifeste. Pour les discussions que j'ai eues avec eux dans le passé lointain ou proche, je salue S. Bloch, S. Saito, P. Salberger, J.–J. Sansuc, C. Soulé et tout particulièrement W. Raskind.

Je remercie la Fondazione Centro Internationale Matematico Estivo de m'avoir donné l'occasion de m'éclaircir un peu plus les idées et de fouler les rues de Trento et de Verone.

Une version préliminaire de ce cours a fait l'objet d'un exposé en Septembre 1989 au Centre Culturel Européen de Delphes, que je souhaite aussi remercier pour son invitation.

Notations.

Etant donné un groupe abélien A et un entier $n > 0$, on note ${}_nA$ le sous-groupe des éléments de A annulés par n, on note A/n le quotient A/nA. On note A_{tors} le sous-groupe de torsion de A, et on pour l premier, on note A_{l-tors} le sous-groupe de torsion l-primaire, i.e. le sous-groupe formé des éléments annulés par une puissance de l.

Etant donné un anneau unitaire R, on note R^* le sous-groupe multiplicatif formé des éléments inversibles de R.

Etant donné un entier n inversible sur un schéma X, on note μ_n le faisceau étale sur X défini par le schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité. Pour j entier positif, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le produit tensoriel j fois de μ_n avec lui-même, on note $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/n$. Pour j négatif, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le faisceau étale $Hom_X(\mu_n^{\otimes -j}, \mathbf{Z}/n)$. Enfin, étant donnés un nombre premier l inversible sur X et $j \in \mathbf{Z}$, on note $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(j)$ la limite inductive des faisceaux $\mu_{l^n}^{\otimes j}$ pour n tendant vers l'infini.

Par $H^i(X, \mathcal{F})$ (sans indice) on notera le i-ième groupe de cohomologie sur le schéma X, pour la topologie de Zariski sur X, à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$. On fera cependant parfois une exception , en notant $H^i(k, M)$ le i-ème groupe de cohomologie galoisienne du groupe de Galois absolu $G = Gal(\overline{k}/k)$ à valeurs dans un G-module continu discret M, ou, si l'on préfère, le i-ème groupe de cohomologie étale à valeurs dans un faisceau étale M sur le spectre Spec(k) du corps k.

§ 1. Groupe de Picard d'une variété

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats très classiques sur l'équivalence linéaire des diviseurs, que nous confronterons dans les paragraphes suivants avec la situation bien plus complexe des cycles de codimension plus grande que 1.

Soit k un corps, X une variété algébrique lisse et irréductible sur le corps k. On désignera par $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles, et par $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de X, c'est-à-dire le groupe abélien libre de générateurs les points de codimension 1 de X :

$$\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{P \in X^{(1)}} \mathbb{Z}.$$

Chaque anneau local de X en un tel point P est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $k(X)$, ce qui permet de définir un homomorphisme

$$v_P : k(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

On définit alors alors le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de la variété X comme le conoyau de l'application *diviseur*

$$\mathrm{div} = \bigoplus_{P \in X^{(1)}} v_P : k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X),$$

c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :

$$k(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0.$$

Le groupe de Picard admet plusieurs représentations. De la description ci-dessus, et de l'identification, sur une variété lisse (donc localement factorielle), des diviseurs de Weil (combinaisons linéaires à coefficients entiers de sous-variétés de codimension 1) aux diviseurs de Cartier (définis localement pour la topologie de Zariski comme diviseurs d'une fonction) on déduit facilement l'identification :

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1_{Zar}(X, \mathcal{O}_X^*) = H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m),$$

où la cohomologie est la cohomologie de Zariski.

Par ailleurs, une version du théorème 90 de Hilbert due à Grothendieck montre que sur tout schéma, il y a une identification :

$$H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1_{et}(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1_{fppf}(X, \mathbb{G}_m),$$

avec le groupe de cohomologie étale (ou encore avec le groupe de cohomologie $fppf$) à valeurs dans le faisceau défini par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$.

Lorsque X est une courbe projective et lisse C, les points de codimension 1 sur C s'identifient aux points de dimension 0, et l'on dispose d'une application degré :

$$\deg = \bigoplus_{P \in C^{(1)}} \mathbb{Z}P \longrightarrow \mathbb{Z}$$

définie par linéarité à partir de l'application qui associe au point fermé P de C le degré $[k(P) : k]$ de P relativement à k, et une formule classique dit que cette application est triviale sur les diviseurs de fonctions, i.e. induit une application degré de $\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Les énoncés suivants rassemblent les propriétés les plus importantes du groupe de Picard.

Proposition 1.1. — *Supposons la variété lisse X absolument irréductible et complète (par exemple projective). Soit $k \subset F$ une inclusion de corps, et soit $X_F = X \times_k F$. Alors l'application naturelle* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_F)$ *est injective.*

Lorsque F/k est une extension galoisienne (qu'on peut supposer finie), la démonstration repose sur le théorème 90 de Hilbert : $H^1(\mathrm{Gal}(F/k), F^*) = 0$. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, puis $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On peut en fait montrer qu'on a une suite exacte fonctorielle :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow Br(k),$$

où $Br(k) = H^2(G, \overline{k}^*)$. L'image de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow Br(k)$ est annulée par tout entier $[E : k]$ pour E/k extension finie sur laquelle X acquiert un point rationnel. En particulier, la flèche $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G$ est un isomorphisme dès que X a un point k–rationnel. □

THÉORÈME 1.2. — *Supposons la variété lisse X absolument irréductible et complète (par exemple projective). Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, puis $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Il existe une variété abélienne J/k (la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ de X) et un groupe abélien de type fini, le groupe de Néron–Severi $NS(\overline{X})$ de $\overline{X}$, tels que l'on ait une suite exacte*

$$0 \longrightarrow J(\overline{k}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow NS(\overline{X}) \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

Cette suite exacte est G–équivariante. Lorsque X est une courbe, $NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ et l'application $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \longrightarrow NS(\overline{X}) = \mathbb{Z}$ est induite par l'application degré. □

PROPOSITION 1.3. — *Soit X une variété irréductible et lisse sur un corps k. Pour tout entier n inversible dans k, on dispose d'une application injective :*

$$\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2_{et}(X, \mu_n). \tag{1.2}$$

Pour obtenir cette injection, il suffit de prendre la suite exacte de cohomologie étale associée à la suite de Kummer

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 1 \\ & & & & x & \longmapsto & x^n\,. & & \end{array}$$

On notera qu'un bout de la suite exacte en question s'écrit :

$$k[X]^*/k[X]^{*n} \longrightarrow H^1_{et}(X, \mu_n) \longrightarrow {}_n\,\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

□

PROPOSITION 1.4. — *Soit X une k–variété lisse irréductible et U un ouvert non vide de X. On dispose d'une suite exacte :*

$$k[X]^* \longrightarrow k[U]^* \longrightarrow \mathrm{Div}_{X\setminus U}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Ici $k[X]^*$, resp. $k[U]^*$, désigne le groupe des fonctions inversibles sur X, resp. sur U, et $\mathrm{Div}_{X\setminus U}(X)$ le groupe des diviseurs de X à support en dehors de U, qui est un groupe libre de type fini.

La démonstration de cette proposition de localisation est élémentaire. □

Ces énoncés sont à la base des divers théorèmes de finitude pour le groupe de Picard.

PROPOSITION 1.5. — *Pour toute variété irréductible propre et lisse X sur un corps k et tout entier $n > 0$, le groupe des points de n–torsion, ${}_n\operatorname{Pic}(X)$ est fini. Ceci vaut encore pour tout ouvert U d'une telle variété.*

(D'après Hironaka, en caractéristique zéro, toute k–variété lisse est un ouvert d'une k–variété propre et lisse).

Démonstration : En utilisant la suite de localisation (1.4) et le fait que $\operatorname{Div}_{X\setminus U}(X)$ est un groupe de type fini, on voit que l'énoncé pour U résulte de l'énoncé pour X. D'après la proposition 1.1, ${}_n\operatorname{Pic}(X)$ s'injecte dans ${}_n\operatorname{Pic}(\overline{X})$. La finitude de ce dernier groupe résulte alors du théorème de structure 1.2, du fait que le groupe de Néron–Severi est de type fini, et du fait que sur un corps algébriquement clos, les points de n–torsion d'une variété abélienne forment un groupe fini. □

Remarque 1.5.1. : Lorsque n est inversible dans k, en utilisant la suite (1.3), on obtient pour toute k–variété X et n inversible dans k, une surjection

$$H^1_{et}(X, \mu_n)/H^1_{et}(\operatorname{Spec}(k), \mu_n) \twoheadrightarrow {}_n\operatorname{Pic}(X).$$

Pour X absolument intègre, le groupe de gauche s'identifie à un sous–groupe de $H^1_{et}(\overline{X}, \mu_n)$. Or, de façon tout à fait générale, les groupes $H^i_{et}(\overline{X}, \mu_n)$ sont finis (en caractéristique, 0, SGA 4 XIX Springer LNM **305**; en général, Deligne, Théorèmes de finitude, in [SGA4 1/2]).

PROPOSITION 1.6. — *Si k est un corps fini, et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k, le groupe $\operatorname{Pic}(X)$ est un groupe de type fini. En particulier son sous-groupe de torsion $\operatorname{Pic}(X)_{tors} \subset \operatorname{Pic}(X)$ est fini.*

Démonstration : Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1, qui donne une injection $\operatorname{Pic}(X) \subset \operatorname{Pic}(\overline{X})^G$ (où $G = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ (cette inclusion est en fait ici un isomorphisme), du théorème 1.2 (suite exacte G–équivariante (1.1) et engendrement fini de $NS(\overline{X})$) et de la finitude de $J(\overline{k})^G = J(k)$ qui est le groupe des points k–rationnels d'une k–variété algébrique sur le corps fini k. □

PROPOSITION 1.7. — *Soient k un corps p-adique (extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$) et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k. Alors le groupe $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ est fini.*

Démonstration : Utilisant les énoncés 1.1 et 1.2 comme ci–dessus, on est ramené à voir que le groupe $J(k)_{tors}$ est fini. Mais comme J est une k–variété abélienne et k un corps p–adique, le groupe des points k–rationnels $J(k)$ est un groupe analytique p–adique commutatif compact. Il contient donc un sous–groupe ouvert U d'indice fini isomorphe à un produit R^q, où R est le groupe (additif) des entiers de k et q est la dimension de J. La torsion de $J(k)$ s'injecte donc dans le quotient fini $J(k)/U$. □

Remarque 1.7.1. : De cette proposition, on peut déduire la finitude de $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ lorsque X est une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps k de type fini sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels (i.e. engendré, comme corps, par un nombre fini déléments). Choisissons en effet un nombre premier p. Comme le corps p–adique $\mathbb{Q}_p$ est de degré de transcendance infini sur $\mathbb{Q}$, on peut trouver une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ et des plongements de corps $\mathbb{Q} \subset k \subset L$. D'après la proposition 1.1, on a une inclusion $\operatorname{Pic}(X) \subset \operatorname{Pic}(X_L)$, et donc aussi $\operatorname{Pic}(X)_{tors} \subset \operatorname{Pic}(X_L)_{tors}$. La finitude de $\operatorname{Pic}(X)_{tors}$ résulte alors de celle de $\operatorname{Pic}(X_L)_{tors}$ (proposition ci–dessus).

PROPOSITION 1.8. — *Soient k un corps p-adique (extension finie d'un corps $\mathbb{Q}_p$) et X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur k. Alors pour tout entier $n > 0$, le quotient* $\mathrm{Pic}(X)/n$ *est fini.*

Démonstration : Du théorème 1.2 on déduit que le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$ s'insère dans une suite exacte :

$$J(k)/n \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n \longrightarrow T/n$$

avec T un groupe abélien de type fini. La structure de $J(k)$ rappelée dans la démonstration précédente implique immédiatement la finitude de $J(k)/n$ et donc celle de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$. On sait que le groupe de Brauer $Br(k)$ d'un corps local est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La finitude de $\mathrm{Pic}(X)/n$ résulte alors de celle de $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G/n$ et de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G \longrightarrow {}_mBr(k),$$

où $m > 0$ est le degré d'une extension de k sur laquelle X acquiert un point rationnel. □

Remarque 1.8.1. : On peut donner une autre démonstration, plus générale. Soit k comme ci-dessus et X une k-variété quelconque. D'après (1.2) on a une injection

$$\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2_{et}(X, \mu_n).$$

Mais la finitude des groupes de cohomologie $H^i_{et}(\overline{X}, \mu_n)$ pour tout i rappelée plus haut, la suite spectrale de Hoschschild-Serre

$$H^p(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), H^q_{et}(\overline{X}, \mu_n)) \Longrightarrow H^*_{et}(X, \mu_n)$$

et la finitude des groupes de cohomologie galoisienne de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ à valeurs dans des modules finis (Serre, Cohomologie Galoisienne, Springer LNM **5**) assurent la finitude de tous les groupes $H^m_{et}(X, \mu_n)$ pour X une variété sur un corps p-adique k.

THÉORÈME 1.9. — *Soit k un corps de type fini sur le corps premier, et soit X une k-variété intègre propre et lisse, puis U un ouvert de X. Alors les groupes* $\mathrm{Pic}(X)$ *et* $\mathrm{Pic}(U)$ *sont des groupes de type fini. En particulier leurs sous-groupes de torsion sont des groupes finis, et pour tout entier $n > 0$, le quotient* $\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X)$ *est fini.*

"Démonstration" : La suite de localisation (1.4) permet de se ramener au cas de X, et d'après la proposition 1.1, il suffit de savoir que pour une k-variété abélienne J, le groupe $J(k)$ est de type fini. Lorsque k est un corps de nombres, c'est là précisément l'énoncé du théorème de Mordell-Weil. Le cas plus général d'un corps k de type fini sur le corps premier est traité par exemple par Lang dans son livre *Diophantine Geometry*. □

Remarque 1.9.1. : La démonstration complète du théorème ci-dessus représente l'un des grands succès de la géométrie diophantienne des années 30-50, et l'esquisse ci-dessus est loin d'en donner une juste représentation. En fait, il y a un théorème de Mordell-Weil *faible*, qui dit que pour un entier $n > 0$ et k de type fini sur le corps premier, le quotient $J(k)/n$ est un groupe fini. Ensuite on développe la théorie de la hauteur sur les variétés abéliennes pour déduire du théorème de Mordell-Weil faible le théorème *fort* que $J(k)$ est de type fini. Ceci du moins est le plan lorsque k est un corps de nombres. D'autres arguments sont nécessaires pour traiter le cas d'un corps de type fini sur le corps premier, et aussi pour établir le théorème de Néron-Severi affirmant que le groupe de Néron-Severi est de type fini. Au vu de l'analogie bien connue entre les arguments de Mordell-Weil et ceux de Néron-Severi, on peut se demander, déjà sur un corps de nombres, si une bonne théorie des hauteurs permettrait d'établir que $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini, directement à partir de la finitude de $\mathrm{Pic}(X)/n$, sans dévissage du groupe $\mathrm{Pic}(X)$.

Remarque 1.9.2. : Le principe de la démonstration du théorème de Mordell–Weil faible est le suivant, au moins sur un corps de nombres. On utilise l'injection

$$J(k)/nJ(k) \hookrightarrow H^1_{et}(k, {}_nJ)$$

et l'on montre en s'appuyant sur la propreté de J/k, que l'image de cette injection consiste de classes non ramifiées en dehors des places de mauvaise réduction de J et des places divisant n. On montre par ailleurs que ces classes non ramifiées forment un groupe fini.

Une autre façon de voir les choses, au moins pour n inversible dans le corps de type fini k, est d'insérer la flèche (1.2) dans un diagramme commutatif, où les flèches horizontales sont des injections,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(\mathbf{X})/n\,\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & H^2_{et}(\mathbf{X}, \mu_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & H^2_{et}(X, \mu_n), \end{array}$$

où $\mathbf{X}$ est un modèle régulier de la k–variété lisse X, modèle qui est de type fini au–dessus soit d'un corps fini si $car(k) > 0$, soit, si $car(k) = 0$, d'un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ où n est inversible. La régularité de $\mathbf{X}$ assure la surjectivité de la flèche verticale de gauche, et la simple hypothèse que $\mathbf{X}$ est de type fini au–dessus de S assure la finitude des groupes $H^i_{et}(\mathbf{X}, \mu_n)$ (voir [M2], II, 7.1, qui s'appuie d'une part sur le théorème de finitude de Deligne in [SGA41/2], d'autre part sur le calcul de la cohomologie étale des anneaux d'entiers de corps de nombres). Il convient de constater que la démonstration ci–dessus vaut sans hypothèse de propreté pour X/k.

L'avantage de cette démonstration est, comme l'a noté S. Saito ([S4]), qu'elle s'étend en partie dans l'étude des cycles de codimension supérieure (§ 7 ci–après, théorème 7.5).

§ 2. Groupes de Chow

(Référence : Fulton [F] Chapitre I)

La définition donnée au paragraphe précédent du groupe de Picard admet une généralisation naturelle aux cycles de (co)dimension quelconque.

Suivant Fulton, voici les définitions et propriétés de base. La théorie *homologique*, avec ses définitions valables pour des schémas éventuellement singuliers, est plus naturelle que l'ancienne théorie de l'équivalence rationnelle.

Soit k un corps et X une k–variété algébrique, i.e. un schéma de type fini et séparé sur k. Rappelons la bijection naturelle entre les points (au sens des schémas) du schéma X et les sous–schémas fermés intègres de X, associant à un point P son adhérence schématique $V(P)$, dont le point générique n'est autre que P. La dimension de P est alors par définition celle de $V(P)$. C'est aussi le degré de transcendance sur k du corps résiduel $k(P)$ de l'anneau local de X en P. Il sera commode de remplacer l'ancien langage des sous–variétés fermées par celui des points schématiques.

On définit le groupe des cycles de dimension i sur X comme le groupe libre $Z_i(X)$ sur les points de X de dimension i.

Tout k–morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ de tels schémas induit une application $f_* : Z_i(X) \longrightarrow Z_i(Y)$. Cette application est définie par linéarité à partir de l'application qui à un point P de X de dimension i associe le cycle 0 si le point $f(P)$ est de dimension plus petite que i, et associe le cycle $[k(P) : k(f(P))]P \in Z_i(Y)$ si $f(P)$ a même dimension que P, l'indice $[k(P) : k(f(P))]$ étant alors le degré de l'extension finie $k(P)/k(f(P))$ de corps résiduels.

Etant donnés une k–variété intègre Y de dimension d et $f \in k(Y)^*$ un élément de son corps des fonctions rationnelles, on peut définir le diviseur $\mathrm{div}(f)$ de f comme un élément de $Z_{d-1}(Y)$. Lorsque Y est normale, ses anneaux locaux réguliers aux points P de codimension 1 sont des anneaux de valuation discrète, définissant une valuation $v_P : k(Y)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$. On définit alors, suivant Weil, $\mathrm{div}(f) = \sum_{P \in Y^{(1)}} v_p(f) P$. Pour Y intègre quelconque, il est encore possible de définir $\mathrm{div}(f) \in Z_{d-1}(Y)$, soit en ayant recours à des longueurs d'anneaux artiniens, soit en utilisant la normalisée $r : Y_n \longrightarrow Y$ de Y, et en définissant $\mathrm{div}_Y(f) = r_* \, \mathrm{div}_{Y_n}(f)$.

Une formule très utile dit que pour $p : X \longrightarrow Y$ un k–morphisme propre surjectif de variétés intègres (irréductibles et réduites) de même dimension, donc tel que l'extension de corps $k(X)/k(Y)$ est finie, et $f \in k(X)^*$, on a $p_*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(N_{k(X)/k(Y)}(f))$, où N désigne la norme.

Etant donnés une k–variété algébrique X et un entier $i \geq 0$, on définit alors le groupe de Chow $CH_i(X)$ de dimension i comme le quotient de $Z_i(X)$ par le sous–groupe engendré par les $p_*(\mathrm{div}(f))$, pour tous les $p : Z \longrightarrow X$ k-morphismes propres $p : Z \longrightarrow X$ d'une k-variété intègre Z de dimension $(i+1)$ et pour toutes les fonctions rationnelles f non nulles sur un tel Z. Dans cette définition, on peut se limiter aux k–morphismes birationnels sur leur image. On peut de plus se limiter soit aux Z normales, soit aux sous–variétés fermées, mais non nécessairement normales, $Z \subset X$.

Lorsque la k–variété X est équidimensionnelle de dimension d, on considère aussi les groupes de Chow $CH^i(X) = CH_{d-i}(X)$.

Propriétés de base des groupes de Chow

1) *Fonctorialité covariante par k–morphismes propres.* Tout k–morphisme propre de k–variétés intègres $f : X \longrightarrow Y$ induit un homomorphisme $f_* : CH_i(X) \longrightarrow CH_i(Y)$. Ceci se voit en utilisant la formule ci–dessus.

2) *Fonctorialité contravariante par morphismes plats.* Si $f : X \longrightarrow Y$ est un k–morphisme plat de dimension relative n, on définit de façon naturelle des morphismes $f^* : CH_i(Y) \longrightarrow CH_{i+n}(X)$, soit, pour X et Y équidimensionnels, $f^* : CH^j(Y) \longrightarrow CH^j(X)$.

3) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini et plat de degré d, le composé

$$CH_i(Y) \xrightarrow{f^*} CH_i(X) \xrightarrow{f_*} CH_i(Y)$$

est la multiplication par d.

4) *Suite de localisation.* Si $i : Y \subset X$ est l'inclusion d'une sous-variété fermée, et $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion de l'ouvert complémentaire de X et $i \geq 0$ un entier, on a la suite exacte :

$$CH_i(Y) \xrightarrow{i_*} CH_i(X) \xrightarrow{j^*} CH_i(U) \longrightarrow 0.$$

5) *0-cycles.* Soit X une k-variété propre. Le morphisme structural $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ induit un homomorphisme $CH_0(X) \longrightarrow CH_0(\mathrm{Spec}(k)) = \mathbf{Z}$, appelé l'application degré, qui associe à (la classe d') un 0-cycle $\sum n_P P$ l'entier $\sum n_P P[k(P) : k]$. On note $A_0(X)$ le noyau de cet homomorphisme.

Le groupe $A_0(X)$ est un invariant k-birationnel des k-variétés intègres propres et lisses, comme on le voit ([F], 16.1.11) en utilisant des correspondances et le lemme de déplacement (valable pour les 0-cycles sur une variété lisse quelconque).

Sur un corps k algébriquement clos, pour toute k-variété projective et irréductible, le groupe $A_0(X)$ est un groupe divisible (ceci se voit par réduction au cas des courbes lisses projectives).

Pour X projective lisse et géométriquement intègre sur un corps k, de variété d'Albanese $\underline{\mathrm{Alb}}_X$ (c'est la duale de la variété de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$), on dispose d'une application canonique

$$\mathrm{alb} : A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$$

dans le groupe des points k-rationnels de X. Cette application a un conoyau de torsion, et est surjective lorsque k est algébriquement clos, comme on voit en se restreignant à l'application $A_0(C) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ induite sur une k-courbe projective et lisse $C \subset X$ convenable.

Pour terminer ce paragraphe, citons deux difficultés fondamentales rencontrées dans l'étude des groupes de Chow en codimension plus grande que 1. Soit X une variété projective et lisse, géométriquement intègre sur un corps k.

Première difficulté. Si F est un corps contenant k, et j un entier, $j \geq 2$, l'application naturelle $CH^j(X) \longrightarrow CH^j(X_F)$ n'est pas nécessairement injective, à la différence de ce qui se passe pour $j = 1$ (§ 1, Prop. 1.1). Le noyau de cette application est de torsion, mais il peut être non nul lorsque le corps k n'est pas algébriquement clos. Par ailleurs, lorsque F/k est une extension galoisienne de groupe G, même en supposant que X possède un point k-rationnel, l'application $CH^j(X) \longrightarrow CH^j(X_F)^G$ n'est pas nécessairement surjective (on peut simplement dire que le conoyau de cette application est de torsion).

On ne peut donc utiliser ici les arguments développés au § 1.

Deuxième difficulté. Comme il fut établi pour la première fois par Mumford, une démonstration toute différente étant donnée par S. Bloch [B2], p. 1.19 (voir aussi [BS]), même dégagé de sa partie *discrète*, i.e. de son image dans par exemple la cohomologie entière de X lorsque $k = \mathbf{C}$, pour $j \geq 2$, le groupe $CH^j(X)$ est en général loin d'être représentable par une variété algébrique. Ainsi pour k algébriquement clos non dénombrable et X une surface l'application naturelle alb : $A_0(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}}_X(k)$ mentionnée plus haut peut avoir un énorme noyau (qu'on ne peut couvrir par les cycles supportés sur une courbe de X). On se reportera à la thèse de Jannsen (*Mixed Motives and Algebraic K-Theory*, Springer LNM **1400**, §§ 9 et 10) pour une discussion complémentaire.

§3. K–théorie, cohomologie étale, et torsion dans les groupes de Chow (le programme de Bloch).

3.1. Corps et anneaux de valuation discrète

Etant donné un corps F, on définit le groupe K_2F comme le quotient de $F^* \otimes F^*$ par le sous–groupe engendré par les éléments $a \otimes b$ avec $a + b = 1$. Lorsque F est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète, de valuation $v : F^* \longrightarrow \mathbf{Z}$, de corps résiduel κ, on dispose du symbole modéré

$$\begin{array}{rccc} T: & K_2F & \longrightarrow & \kappa^* = K_1\kappa, \\ & \{a,b\} & \longmapsto & (-1)^{v(a)v(b)} cl(a^{v(b)}/b^{v(a)}), \end{array}$$

où $cl(c)$ désigne la classe dans k^* d'une unité $c \in A^*$. C'est l'analogue de la flèche $K_1F = F^* \longrightarrow K_0\kappa = \mathbf{Z}$ définie par la valuation v.

On supposera le lecteur familier avec les aspects élémentaires de la cohomologie galoisienne. Etant donné un corps k, de clôture séparable k_s et $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, pour un G–module continu discret on notera $H^i_{et}(k, M)$ et parfois simplement $H^i(k, M)$ le groupe de cohomologie galoisienne $H^i(G, M)$. Pour n inversible dans k, on note μ_n le groupe des racines n–ièmes de l'unité dans k_s^*, et pour j entier > 0, on note $\mu_n^{\otimes j}$ le G–module $\mu_n \otimes \cdots \otimes \mu_n$ (j fois). On convient que $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbf{Z}/n$ avec G–action triviale.

La théorie de Kummer, c'est-à-dire la suite de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & k_s^* & \longrightarrow & k_s^* & \longrightarrow & 1, \\ & & & & x & \longmapsto & x^n & & \end{array}$$

et le théorème 90 de Hilbert $H^1(k, k_s^*) = 0$ donnent l'isomorphisme

$$k^*/k^{*n} \simeq H^1(k, \mu_n).$$

On en déduit une application par cup–produit :

$$(k^* \otimes_{\mathbf{Z}} k^*)/n \longrightarrow k^*/k^{*n} \otimes_{\mathbf{Z}} k^*/k^{*n} \simeq H^1(k, \mu_n) \otimes_{\mathbf{Z}} H^1(k, \mu_n) \longrightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Un calcul purement algébrique, à base de normes (voir [S]) montre que cet homomorphisme annule les éléments de la forme $x \otimes y$, avec $x + y = 1$. Ainsi elle définit un homomorphisme

$$K_2k/nK_2k \longrightarrow H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Le théorème de Merkur'ev–Suslin ([MS], [S]) assure que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme. Si k est le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète comme plus haut, de corps résiduel κ, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_2k & \longrightarrow & H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa^* & \longrightarrow & H^1(\kappa, \mu_n), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est le symbole modéré et la flèche verticale de droite le résidu en cohomologie galoisienne, analogue en degré supérieur de la flèche évidente $H^1(k, \mu_n) \longrightarrow H^0(\kappa, \mathbf{Z}/n)$ i.e. $k^*/k^{*n} \longrightarrow \mathbf{Z}/n$ induite par la valuation.