PRESSURE MEASUREMENT IN VACUUM SYSTEMS

J. H. Leck

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

par ALEXANDRE GROTHENDIECK

HANKA GROTHENDIECK in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet

Table des matières

INTRODUCTION [1]

I - OBJET DU TRAVAIL

Ce travail constitue une étude systématique du produit tensoriel, convenablement topologisé, de deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (Chap.1), et d'une nouvelle classe remarquable d'espaces localement convexes, <u>les espaces nucléaires</u>, liée à cette notion (Chap.2). Ces recherches avaient pour origine d'éclaircir et de généraliser les propriétés très spéciales que semblaient posséder certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables en vertu du "théorème des noyaux" de L. Schwartz (voir [23] et [24]). Ces mêmes propriétés se retrouvent, sous une forme différente, dans l'espace des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe donnée, espace que j'ai étudié de façon très détaillée dans [10] (oà j'en subordonne encore l'étude, un peu artificiellement, à la théorie de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur la variété). Mais la bonne formulation de la notion générale d' "espace nucléaire" correspondant à ces propriétés, était encore assez cachée (Chap.2, §2, définition 4). Et les nombreuses conséquences que l'on peut en tirer, et dont certaines sont nouvelles, même dans les classiques espaces de L. Schwartz, demandaient une technique assez fine, mise au point au Chap. 1. Il se trouve alors que tous les espaces du type ($\mathcal{M}$) qu'on rencontre usuellement en Analyse sont des espaces nucléaires (d'ailleurs, on prouve que les espaces nucléaires sont forcément du type ($\mathcal{M}$)), et les résultats généraux exposés ici leur sont donc applicables.

Une théorie intimement liée à la notion de produit tensoriel topologique est la <u>théorie de Fredholm</u>, dont une bonne compréhension n'est

---

1. Les numéros placés entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

plus possible sans cette notion [2]. Pour ne pas subordonner cette théorie à tout le mécanisme développé ici, nous avons préféré en donner ailleurs un exposé séparé et se suffisant à lui-même ([11]). Pour certains résultats fins du travail présent, relatifs à des propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm et certaines questions connexes (Chap.2, §1, et Chap.2, §2, n°4) je suis obligé de faire appel à quelques définitions et propositions de [11], mais l'essentiel de la théorie que nous exposons ici ne dépend pas de ces résultats (qui aident cependant pour une meilleure compréhension).

Ce travail est assez peu lié à celui de R. Schatten sur les produits tensoriels d'espaces de Banach [21]. Tandis que je mets l'accent principal sur les espaces localement convexes _généraux_ et _une_ définition précise du produit tensoriel topologique, Schatten étudie _toutes_ les normes raisonnables sur un produit tensoriel de deux _espaces de Banach_, et n'obtient de véritables résultats (d'ailleurs fort beaux) que dans le cas des espaces de Hilbert.

Je donne succinctement au cours du texte quelques applications des résultats obtenus. Dans un article ultérieur, je donnerai une variante "vectorielle-topologique" du "théorème de Künneth" relatif au produit tensoriel de deux "modules à dérivation", avec une ou deux applications à la théorie de l'homologie et la théorie des faisceaux (voir, pour ces notions, le "Séminaire de Topologie Algébrique" de H. Cartan à l'Ecole Normale Supérieure 1948-1949, et 1950-1951). Un autre article donnera, relativement aux espaces de Banach, le développement systématique des

---

2. Cette liaison a été aperçue avant moi par A. F. _Ruston_, Direct Product of Banach spaces and linear fonctional equations, Proceedings of the London Math. Society (3), 1, 1951. Mon travail sur ce sujet avait été conçu indépendamment du sien, et en est assez différent.

idées effleurées au Chap.1, §4, n°6, avec diverses applications.

Je suis heureux de remercier ici M. J. Dieudonné et M. L. Schwartz, pour la stimulation constante que j'ai trouvée auprès d'eux, tant dans mes recherches que dans ma formation générale.

II - CONTENU, INDICATIONS DIVERSES

De peur de trop allonger cet article, je ne donnerai pas l'énumération, même sommaire, des résultats principaux. Le lecteur pourra consulter la table des matières, et parcourir l'énoncé des définitions et théorèmes de cet article. Suivant un usage commode qui commence à se répandre, les <u>théorèmes</u> groupent les résultats particulièrement importants ou offrant une difficulté particulière, les autres résultats sont inclus dans les propositions, corollaires, lemmes, remarques. Le numérotage des théorèmes, propositions, etc. d'une part, des §§ d'autre part, est repris du début avec le Chap.2. Dans chacun des deux chapitres, le numérotage se poursuit sans tenir compte de la séparation en paragraphes et en numéros.

Nous avons mis en "retrait" certaines parties du texte, de nature en général assez technique, qui pourraient être omises en première lecture (raffinements de propositions qui précédaient, exemples et contre-exemples questions ouvertes avec des indications diverses, etc.).

D'importantes questions ont dû être laissées sans réponse. Je les signale à mesure qu'elles se présentent ; la plus importante (équivalente au problème classique d'approximation des opérateurs compacts d'un espace de Banach dans un autre par des opérateurs de rang fini) fait l'objet du § 5 du Chap.1. Les autres sont résumées à la fin de ce travail.

III - NOTATIONS GÉNÉRALES

Les espaces vectoriels topologiques envisagés sont tous localement convexes, et implicitement supposés séparés sauf au n°1 du §1 Chap.1, sauf mention expresse du contraire. Le corps des scalaires est indifféremment la droite réelle $\mathbf{R}$ ou le corps des complexes $\mathbf{C}$. Certains résultats valent d'ailleurs (sans modification essentielle de la démonstration) pour des espaces vectoriels normés, ou munis d'une famille de semi-normes, sur un corps valué complet quelconque. Par espace quotient d'un espace localement convexe séparé E, nous entendrons un espace quotient par un sous-espace vectoriel fermé de E.

Nous suivons sans référence, les résultats et les notations les plus usuels de [1], [2], [7], et utilisons couramment (avec les références précises) les résultats et les définitions de [9]. Signalons seulement que nous suivons ce dernier travail, et non [7], dans l'emploi du mot réflexif (semi-réflexif dans la terminologie de [7]) et que nous nous écartons de la terminologie de [7], suivie dans [9], pour la définition des espaces $(\mathcal{LF})$ (voir plus bas, IV, 1). Un espace E est réflexif si $E = E''$, i.e. si ses parties bornées et faiblement fermées sont faiblement compactes, et E est complètement réflexif si de plus la topologie de E est la topologie du dual fort de E' fort, i.e. si E est réflexif et quasi-tonnelé (voir plus bas). Nous appelons espace $(\mathcal{M})$ un espace dont les parties bornées sont relativement compactes. De [9], nous empruntons surtout la notion d'espace $(\mathcal{DF})$, d'espace quasi-normable, et d'espace de Schwartz (loc. cité, §1 définition 1, §3 définition 4 et 5). Nous ne redéfinirons pas ici l'espace $(\mathcal{DF})$; rappelons seulement que le dual fort d'un espace du type $(\mathcal{F})$ est du type $(\mathcal{DF})$ et que le dual fort d'un espace du type $(\mathcal{DF})$ est du type $(\mathcal{F})$, enfin que tout espace normable est $(\mathcal{DF})$. L'espace E est dit quasi-normable si pour toute partie équicontinue convexe cerclée A dans E', il en existe une autre $B \supset A$ tel que sur A, la topologie induite par E' fort soit identique à celle induite par l'espace normé E'_B engendré par B (défini plus bas). Un espace qui est à la fois quasi-normable et du type $(\mathcal{M})$ est appelé espace de Schwartz ou espace (S). E est du type (S) si et seulement si pour toute partie équicontinue convexe cerclée $A \subset E'$ il en existe une autre $B \supset A$ tel que l'application identique $E'_A \to E'_B$ soit compacte, i.e. tel que A soit une partie relativement compacte de l'espace normé E'_B.

Espace quasi-complet, quasi-tonnelé - Nous appelerons, avec N. Bourbaki, espace quasi-complet tout espace localement convexe dont les parties bornées et fermées sont complètes ; espace quasi-tonnelé tout espace localement convexe tel que les parties fortement bornées de son dual soient équicontinues. (Rappelons [2] qu'on appelle tonnelé un espace tel que les parties faiblement bornées du dual soient équicontinues). Pour un espace quasi-complet, il revient donc au même de dire qu'il est tonnelé, ou quasi-tonnelé (car les parties fortement ou faiblement bornées du dual sont alors les mêmes - voir p. ex. [2] prop. 4 -).

Nous aurons enfin constamment besoin des diverses notations spéciales qui vont suivre, et auxquelles nous ne référerons plus.

1. Notations E_A, E_V, $\hat{E}_V$. - Soit E un espace localement convexe séparé, A une partie bornée convexe cerclée de E, on désigne par E_A l'espace normé obtenu en munissant l'espace vectoriel engendré par A de la norme $\|x\|_A = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda A} |\lambda|$. Si A est fermé dans E, la boule unité de E_A est identique à A. Si A est complet dans E, il est facile de voir que E_A est complet ([2], page 9, lemme) donc un espace de Banach. En particulier si A est une partie équicontinue convexe cerclée et faiblement fermée de dual F' d'un espace localement convexe F, F'_A est un espace de Banach. Soit maintenant V un voisinage convexe cerclé de l'origine dans E; on note E_V l'espace normé obtenu en munissant le quotient E/N de E par le sous espace N des x tels que $\lambda x \in V$ pour tout scalaire λ, de la norme déduite de la semi-norme $\|x\|_V = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda V} |\lambda|$ sur E. (Cette notation ne risque pas d'entraîner des confusions avec la notation précédente E_A. Car si A est à la fois borné et un voisinage de l'origine, les deux définitions données coïncident). Le dual de E_V s'identifie manifestement à E'_{V^o} (où

V^o est le polaire de V dans E'). E_V n'est pas complet en général, même si E l'est ; son complété sera noté $\widehat{E_V}$.

2. Applications linéaires bornées. - Soient E et F deux espaces localement convexes. Une application linéaire de E dans F est dite bornée (resp. compacte, faiblement compacte) si elle applique un voisinage convenable V de l'origine dans une partie A de F qui est bornée (resp. compacte, faiblement compacte). Supposant V et A convexes cerclés (ce qui est loisible), cette application définit alors une application linéaire continue de l'espace normé E_V (ou même de $\widehat{E_V}$ si A est complet) dans l'espace normé F_A. - Un ensemble M d'applications linéaires de E dans F est dit équiborné si les $u \in M$ sont bornées, et si le voisinage V et le borné A ci-dessus peuvent être pris indépendants des $u \in M$.

3. Dual topologique, bidual. - Soit E un espace localement convexe; on désigne son dual par E', et quand E' est considéré comme espace localement convexe, il sera supposé muni, sauf indication du contraire, de sa topologie forte, i.e. la topologie de la convergence bornée (i.e. la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E). Si on veut le préciser encore dans la notation on notera le dual fort par E'_b. E'_s et E'_τ désignent respectivement E' muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$ et de la topologie de Mackey $\tau(E',E)$. Plus généralement, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble quelconque de parties bornées de E, $E'_{\mathfrak{S}}$ désignera E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

On notera E_s, E_τ l'espace E muni respectivement de $\sigma(E,E')$, ou de $\tau(E,E')$.

Le dual de E'_b , ou bidual de E, noté E", sera toujours, sauf indication expresse du contraire, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Cette topologie induit toujours sur E (supposé séparé) la topologie donnée de E (contrairement à ce qui se passe en général pour la topologie de dual fort de E'_b sur E", envisagée surtout dans [7]).

4. <u>Espaces d'applications linéaires</u>. - Soient E et F deux espaces localement convexes. L(E,F) désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E, on désigne par $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace L(E,F) muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Quand $\mathfrak{S}$ est respectivement l'ensemble des parties réduites à un point, l'ensemble des parties précompactes ou l'ensemble de <u>toutes</u> les parties bornées de E, on prendra les notations $L_s(E,F)$, $L_c(E,F)$ et $L_b(E,F)$. Enfin pour l'espace L(E',F) (et son sous-espace $L(E'_s,F_s) = L(E'_\tau,F))$, il y a lieu souvent d'introduire la topologie de la convergence uniforme sur les parties <u>équicontinues</u> de E'. Muni de cette topologie, nous désignerons cet espace par $L_e(E',F)$ (resp. par $L_e(E'_\tau,F)$).

Signalons que $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>est complet si et seulement si</u> $E'_{\mathfrak{S}}$ <u>et</u> F <u>sont complets</u>, <u>pourvu que la topologie de</u> E <u>soit</u> $\tau(E,E')$ (nous supposons en plus $\bigcup\mathfrak{S} = E$, et F séparé comme toujours). Pour la nécessité, on note que $E'_{\mathfrak{S}}$ et F sont isomorphes à des sous-espaces vectoriels fermés de $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (car pour un élément non nul donné y dans F resp. x' dans E', l'application $x' \to x' \otimes y$ resp. $y \to x' \otimes y$ de $E'_{\mathfrak{S}}$ resp. F dans $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel fermé, comme on vérifie immédiatement). Pour la suffisance, comme l'espace de toutes les applications de E dans l'espace complet F est complet pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il suffit de montrer que $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ en est un sous-espace fermé, i.e. que toute application u de E dans F qui est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence d'applications linéaires continues, est linéaire et continue. Elle est linéaire de toutes façons, et pour vérifier qu'elle est continue, il suffit de vérifier la continuité faible, i.e. que pour tout $y' \in F'$, la forme $y' \circ u$ sur E est continue. Or il est immédiat que cette dernière est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence de formes linéaires $y' \circ u_i$ continues, donc continue puisque $E'_{\mathfrak{S}}$ est complet.

5. *Espaces d'applications bilinéaires.* - Soient E, F, G, trois espaces localement convexes. On a défini dans [2] la notion d'application bilinéaire *séparément continue* de $E \times F$ dans G. Plus généralement, un *ensemble* M d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G sera dit *séparément équicontinu* si pour tout $x \in E$, l'ensemble des applications $y \to u(x,y)$ de F dans G, où u parcourt M, est une partie équicontinue de $L(F,G)$, et si pour tout $y \in F$ l'ensemble des applications $x \to u(x,y)$ de E dans G, où u parcourt M, est une partie équicontinue de $L(E,G)$. Nous désignons par $\mathcal{L}(E,F;G)$ l'espace des applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G, par $B(E,F;G)$ le sous-espace formé des applications bilinéaires *continues*. Si G est le corps des scalaires, on note simplement $\mathcal{L}(E,F)$ et $B(E,F)$.- Soit $\mathfrak{S}_1$ resp. $\mathfrak{S}_2$ un ensemble de parties bornées de E resp. F, on peut considérer sur $\mathcal{L}(E,F;G)$ (et sur son sous-espace $B(E,F;G)$) la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathfrak{S}_1$ et $B \in \mathfrak{S}_2$, appelée encore topologie de la $\mathfrak{S}_1$ - $\mathfrak{S}_2$ - convergence (voir [2]). Elle est toujours localement convexe sur $B(E,F;G)$, et elle l'est encore sur $\mathcal{L}(E,F;G)$ si par exemple les $A \in \mathfrak{S}_1$, ont une enveloppe convexe cerclée fermée *complète*, plus généralement si les parties faiblement bornées du dual de E sont bornées pour la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. Si $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont chacun l'ensemble des parties précompactes de E, F, resp. l'ensemble de *toutes* les parties bornées de E, F, cette topologie prend le nom de *topologie de la convergence bicompacte*, resp. *bibornée*, et l'espace $\mathcal{L}(E,F,G)$ ainsi topologisé est noté $\mathcal{L}_c(E,F;G)$, resp. $\mathcal{L}_b(E,F;G)$. Dans le cas d'un espace $\mathcal{L}(E',F';G)$ (E' et F' étant donc les duals forts de E et F), il y a lieu souvent d'introduire la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux parties *équicontinues* de E' et F' respectivement ; cette topologie est appelée *topologie de la convergence bi-équicontinue* (elle est toujours

localement convexe), et muni de cette topologie, notre espace sera noté $\mathcal{L}_e(E',F';G)$. Notations analogues pour topologiser le sous-espace $B(E,F;G)$ de $\mathcal{L}(E,F;G)$ et le sous-espace $\mathcal{L}(E'_s, F'_s; G)$ de $\mathcal{L}(E',F';G)$. Quand G est le corps des scalaires, on écrit plus simplement $\mathcal{L}_b(E,F)$, $B_b(E,F)$, $\mathcal{L}_e(E',F')$, $B_e(E',F')$ etc.

6. Relations entre formes bilinéaires et applications linéaires. - Rappelons que si E et F sont deux ELC, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des formes bilinéaires séparément continues u sur $E \times F$ est canoniquement isomorphe à l'espace $L(E,F'_s)$ des applications linéaires faiblement continues v de E dans F, à v correspondant la forme bilinéaire $(x,y) \rightarrow \langle y,vx \rangle$, et à u l'application linéaire faisant correspondre à tout x dans E la forme $y \rightarrow u(x,y)$ sur F. Nous noterons $x \rightarrow u.x$ cette application linéaire de E dans F', et $y \rightarrow {}^t u.y$ l'application linéaire de F dans E' définie de façon analogue, et qui n'est autre que la transposée de l'application précédente. La forme bilinéaire u est continue si et seulement si l'application $x \rightarrow u.x$ transforme un voisinage convenable de 0 dans E en une partie équicontinue de F'. Notons aussi que dans l'isomorphisme naturel $\mathcal{L}(E,F) \approx L(E,F'_s)$, à la topologie de la $\mathfrak{S}_1$- $\mathfrak{S}_2$-convergence sur le premier espace correspond la topologie sur le deuxième induite par l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_1}(E,F'_{\mathfrak{S}_2})$ de toutes les applications de E dans $F'_{\mathfrak{S}_2}$, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. En particulier, l'espace $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$ (voir n°5 précédent) est isomorphe canoniquement, comme espace vectoriel topologique, à l'espace $L_e(E'_\tau, F)$ (voir n°4 précédent). Par suite (même référence) $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$ <u>est complet si et seulement si E et F le sont</u>.

IV - COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES INDUCTIVES

1. Généralités. - Les espaces étudiés dans [7] sous le nom d'espaces $(\mathcal{LF})$ sont des cas particuliers d'une catégorie plus fréquente d'espaces,

dont nous résumons ici les principales propriétés connues (et qui d'ailleurs vont toutes nous servir dans la suite). Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille d'espaces localement convexes, et pour tout indice i soit u_i une application linéaire de E_i dans E. Il nous sera commode de supposer que E est engendré par la réunion des $u_i(E_i)$, bien que ce ne soit pas essentiel pour la suite. On appelle topologie <u>limite inductive</u> des topologies des E_i par les applications u_i, la plus fine des topologies localement convexes sur E qui rende continues les applications u_i des E_i dans E. Muni de cette topologie, E s'appelle limite inductive des E_i (par les applications u_i). Un système fondamental de voisinage de l'origine dans E est formé des ensembles <u>convexes cerclés</u> V tels que $\overset{-1}{u_i}(V)$ soit un voisinage de l'origine dans E_i pour tout i.- Les E_i peuvent être des sous-espaces vectoriels de E et les u_i les applications identiques. Le plus souvent, la famille des E_i est alors filtrante croissante (E est donc réunion des E_i) et si $E_i \subset E_j$, E_j induit sur E_i une topologie moins fine que la topologie donnée de E_i ; mais tout cela n'a rien d'obligatoire (et on peut d'ailleurs facilement se ramener toujours à ce cas). Si cependant les conditions précédentes sont vérifiées, et si de plus, pour $E_i \subset E_j$, E_i est fermé dans E_j et la topologie de E_i est <u>identique</u> à celle induite par E_j, on dit que E est limite <u>inductive stricte</u> des E_i, et on retrouve les espaces considérés dans [7].

Les faits suivants sont encore triviaux : une application linéaire u de la limite inductive E dans un espace localement convexe F est <u>continue</u> si et seulement si pour tout i, $u \circ u_i$ est une application continue de E_i dans F. Si les E_i sont <u>tonnelés</u> (resp. <u>quasi tonnelés</u>, <u>bornologiques</u>) alors leur limite inductive E l'est aussi.- En revanche, même si E est une limite inductive séparée d'une <u>suite</u> croissante d'espaces de Banach ou d'espaces du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$, E peut ne pas être complet, et une partie bornée de E peut ne pas être image d'une partie bornée d'un

E_i (voir [17] pour le cas où les E_i sont des Banachs, et [9] §2, ou le Chap.2 §4 prop.14 de ce travail dans le cas où les E_i sont du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$). C'est là la difficulté principale pour les espaces limites inductives [3]. Cependant, si E est la limite inductive stricte d'une suite d'espaces localement convexes E_i, E est complet si les E_i le sont, E induit sur chaque E_i la topologie donnée de E_i, et toute partie bornée de E est contenue dans un des espaces E_i (les démonstrations données dans [7] subsistent en effet sans modification). A part ce cas bien particulier hélas, je ne connais que deux faits positifs de quelque généralité, relatifs aux parties bornées de la limite inductive d'une suite d'espaces $(\mathcal{F})$, savoir : le "théorème A" ci-dessous et ses corollaires, et le résultat donné dans [9], Th.9, relatif aux limites inductives de suites d'espaces $(\mathcal{DF})$.

Contrairement à la terminologie de [7] et [9], nous appelons ici espace $(\mathcal{LF})$ tout espace localement convexe qui est limite inductive d'une suite d'espaces E_i du type $(\mathcal{F})$. On peut alors manifestement supposer que les E_i forment une suite croissante de sous espaces vectoriels de E,E_{i+1} induisant sur E_i une topologie moins fine que la topologie donnée de E_i. Une telle suite sera encore appelée une suite de définition de la limite inductive E. Notons qu'un espace quotient d'un espace $(\mathcal{LF})$ est un espace $(\mathcal{LF})$.

2. Sommes directes topologiques. - Soit (E_i) une famille d'espaces localement convexes, $E = \sum_i E_i$ leur somme directe. Les E_i s'identifient à

---

3. Pour les espaces définis comme "limites projectives" (i.e. dont la topologie est définie comme la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires données u_i de E dans des espaces localement convexes E_i donnés), les difficultés sont pratiquement exactement inverses.

des sous-espaces vectoriels de E, et on peut considérer sur E la topologie limite inductive correspondante. Muni de cette topologie, E prend le nom de somme directe topologique des espaces E_i. Il est immédiat ici que E induit sur chaque E_i la topologie donnée de E_i, et on prouve aussi facilement que toute partie bornée de E est contenue dans la somme directe d'un nombre fini des E_i. Il en résulte aussitôt que le dual fort de la somme directe topologique $E = \sum_i E_i$ s'identifie au produit vectoriel-topologique des duals forts E'_i. Enfin, pour que E soit complet, il faut et il suffit que les E_i le soient. La nécessité est évidente, car les E_i s'identifient à des sous-espaces vectoriels fermés de E. Pour la suffisance, il suffit de montrer que toute forme linéaire f sur le dual $E' = \prod_i E'_i$, dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, est dans E (voir [12]). La topologie faible de E' est manifestement le produit des topologies faibles des E'_i, et les parties équicontinues de E' sont celles contenues dans un ensemble de la forme $\prod_i A_i$, où, pour tout i, A_i est une partie équicontinue de E'_i. On prouve d'abord facilement par l'absurde que f s'annule sur tous les espaces facteurs sauf un nombre fini au plus, d'où suit aussitôt que la restriction de f à $\sum_i E'_i$ provient d'un élément de E. Puis on achève en remarquant que tout élément de $E' = \prod_i E'_i$ est contenu dans l'adhérence faible d'une partie équicontinue, contenue dans la somme directe des E'_i.

Soit maintenant E une limite inductive générale d'une famille (E_i) d'espaces localement convexes par des applications linéaires u_i. Il existe alors une application linéaire continue naturelle $u((x_i)) = \sum_i x_i$ de la somme directe topologique $E_0 = \sum_i E_i$ sur E, et si E est séparé il résulte aussitôt des définitions que u est un homomorphisme topologique de E_0 sur E, de sorte que la limite inductive E est isomorphe à un espace quotient de la somme directe topologique $E_0 = \sum_i E_i$. Cela permet de ramener fréquemment les propriétés des limites inductives générales aux propriétés des sommes directes et des quotients. C'est ainsi qu'on prouve par exemple que si E est la limite inductive d'une <u>suite</u> d'espaces E_i qui sont des <u>espaces de Schwartz</u> (resp. des espaces <u>quasi-normables</u> - voir [9], § 3, définitions 4 et 5) alors E l'est aussi.

3. <u>Exemples</u>. - En plus des exemples de limites inductives strictes envisagés dans [7], notons les exemples suivants.

a) Si E est un espace <u>bornologique</u>, il est limite inductive d'une famille d'espaces normables (et réciproquement, puisque un espace normable est bornologique). En effet, pour toute partie bornée convexe cerclée A de E, on peut considérer l'application identique de l'espace normé E_A dans E, et dire que E est bornologique signifie précisément, en vertu des définitions, que E est limite inductive des E_A.

b) En particulier, le dual fort d'un espace ($\mathcal{F}$) <u>distingué</u> ([7] p.78) est limite inductive d'une <u>suite</u> d'espaces de Banach (et réciproquement) car on sait qu'un espace du type ($\mathcal{F}$) est distingué si et seulement si son dual fort est bornologique ([9], §1, th.7).

c) L'espace L des applications linéaires <u>bornées</u> (voir III, 2) d'un espace E dans un espace F, où E et F sont du type ($\mathcal{F}$), peut être considéré comme un espace ($\mathcal{LF}$), en prenant un système fondamental (V_i) de voisinages convexes cerclés de 0 dans E, en désignant pour tout i par L_i l'espace $L_b(E_{V_i},F)$, et en considérant L comme limite inductive des L_i. De même l'espace des applications linéaires <u>compactes</u> de E dans F peut être considéré comme un espace ($\mathcal{LF}$). Ces deux espaces ($\mathcal{LF}$) ne sont en général pas complets (Chap.2, § 4, prop.14, 2°).

d) Soient E et F deux espaces du type ($\mathcal{F}$), considérons l'espace $L_b(E,F)$. Sous des conditions fréquentes, que nous ne détaillerons pas, le dual de cet espace est du type ($\mathcal{LF}$). Nous en verrons par exemple des cas particuliers au Chap.2, § 4, n°1, lemme 9 et corollaire du th.14.

Nous en déduirons, au Chap.2, §4, n°4, que les duals des espaces ($\mathcal{O}_M$) et ($\mathcal{O}'_C$) de L. Schwartz [22] sont des espaces du type ($\mathcal{LF}$) (d'ailleurs complets).

4. Propriétés spéciales des espaces ($\mathcal{LF}$). - (voir définition des espaces ($\mathcal{LF}$) fin du n°1). Les propriétés en vue découlent du théorème général suivant, qui a été inspiré par le th.1 de [7] :

THÉORÈME A. - Soit E un espace localement convexe séparé, F un espace du type ($\mathcal{F}$), (F_i) une suite d'espaces du type ($\mathcal{F}$), soit u une application linéaire continue de F dans E, et pour tout i soit u_i une application linéaire continue de F_i dans E. Supposons $u(F) \subset \bigcup_i u_i(F_i)$. Alors il existe un indice i tel que $u(F) \subset u_i(F_i)$, et si alors u_i est biunivoque, il existe une application linéaire continue v de F dans F_i telle que l'on ait $u = u_i \circ v$.

Démonstration.- Pour tout i, soit H_i le sous-espace de $F \times F_i$ formé des couples (x,y) tels que $ux = u_i y$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace produit $F \times F_i$, donc un espace du type ($\mathcal{F}$). Soit p_i l'opérateur de projection de l'espace $F \times F_i$ sur le facteur F. $p_i(H_i)$ est l'ensemble des $x \in F$ tels que $u(x) \in u_i(F_i)$. L'hypothèse signifie que $F = \bigcup_i p_i(H_i)$; il en résulte que l'un au moins des espaces $p_i(H_i)$ est non maigre, donc, d'après un célèbre théorème de Banach ([1], page 38, th.3) que p_i applique H_i sur F, c'est-à-dire $u(F) \subset u_i(F_i)$. Supposons u_i biunivoque, alors pour tout $x \in F$, il existe un seul $y \in F_i$ tel que $u_i y = ux$, i.e. tel que $(x,y) \in H_i$. Cet y dépend évidemment linéairement de x, soit $y = vx$, et l'application $x \to vx$ de F dans F_i est continue d'après le théorème du "graphe fermé", car son graphe H_i est fermé. Le théorème A est démontré.

COROLLAIRE 1. - Soit E un espace localement convexe, (F_i) une suite d'espaces du type ($\mathcal{F}$), u_i une application linéaire continue de F_i dans E. Soit A une partie bornée convexe cerclée et complète de E, contenue