Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1296

M.-P. Malliavin (Ed.)

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin

Proceedings, Paris 1986

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1296

M.-P. Malliavin (Ed.)

Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin

Proceedings, Paris 1986

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Editeur

Marie-Paule Malliavin
Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
10, rue Saint Louis en l'Ile, 75004 Paris, France

Mathematics Subject Classification (1980): 12H05, 12L10, 13C15, 13H10, 14D05, 14H20, 14M17, 15A33, 16A08, 16A10, 16A18, 16A34, 16A60, 16A64, 22E30, 43A85, 58G07

ISBN 3-540-18690-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-18690-5 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1090 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 1091: Multifunctions and Integrands. Proceedings, 1983. Edited by G. Salinetti. V, 234 pages. 1984.

Vol. 1092: Complete Intersections. Seminar, 1983. Edited by S. Greco and R. Strano. VII, 299 pages. 1984.

Vol. 1093: A. Prestel, Lectures on Formally Real Fields. XI, 125 pages. 1984.

Vol. 1094: Analyse Complexe. Proceedings, 1983. Edité par E. Amar, R. Gay et Nguyen Thanh Van. IX, 184 pages. 1984.

Vol. 1095: Stochastic Analysis and Applications. Proceedings, 1983. Edited by A. Truman and D. Williams. V, 199 pages. 1984.

Vol. 1096: Théorie du Potentiel. Proceedings, 1983. Edité par G. Mokobodzki et D. Pinchon. IX, 601 pages. 1984.

Vol. 1097: R.M. Dudley, H. Kunita, F. Ledrappier, École d'Éte de Probabilités de Saint-Flour XII – 1982. Edité par P.L. Hennequin. X, 396 pages. 1984.

Vol. 1098: Groups – Korea 1983. Proceedings. Edited by A.C. Kim and B.H. Neumann. VII, 183 pages. 1984.

Vol. 1099: C.M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. XIII, 376 pages. 1984.

Vol. 1100: V. Ivrii, Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators Acting in Fiberings over Manifolds with Boundary. V, 237 pages. 1984.

Vol. 1101: V. Cossart, J. Giraud, U. Orbanz, Resolution of Surface Singularities. Seminar. VII, 132 pages. 1984.

Vol. 1102: A. Verona, Stratified Mappings – Structure and Triangulability. IX, 160 pages. 1984.

Vol. 1103: Models and Sets. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part I. Edited by G.H. Müller and M.M. Richter. VIII, 484 pages. 1984.

Vol. 1104: Computation and Proof Theory. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part II. Edited by M.M. Richter, E. Börger, W. Oberschelp, B. Schinzel and W. Thomas. VIII, 475 pages. 1984.

Vol. 1105: Rational Approximation and Interpolation. Proceedings, 1983. Edited by P.R. Graves-Morris, E.B. Saff and R.S. Varga. XII, 528 pages. 1984.

Vol. 1106: C.T. Chong, Techniques of Admissible Recursion Theory. IX, 214 pages. 1984.

Vol. 1107: Nonlinear Analysis and Optimization. Proceedings, 1982. Edited by C. Vinti. V, 224 pages. 1984.

Vol. 1108: Global Analysis – Studies and Applications I. Edited by Yu.G. Borisovich and Yu.E. Gliklikh. V, 301 pages. 1984.

Vol. 1109: Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems. Proceedings, 1983. Edited by S. Albeverio, P. Combe and M. Sirugue-Collin. IX, 227 pages. 1985.

Vol. 1110: R. Jajte, Strong Limit Theorems in Non-Commutative Probability. VI, 152 pages. 1985.

Vol. 1111: Arbeitstagung Bonn 1984. Proceedings. Edited by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter. V, 481 pages. 1985.

Vol. 1112: Products of Conjugacy Classes in Groups. Edited by Z. Arad and M. Herzog. V, 244 pages. 1985.

Vol. 1113: P. Antosik, C. Swartz, Matrix Methods in Analysis. IV, 114 pages. 1985.

Vol. 1114: Zahlentheoretische Analysis. Seminar. Herausgegeben von E. Hlawka. V, 157 Seiten. 1985.

Vol. 1115: J. Moulin Ollagnier, Ergodic Theory and Statistical Mechanics. VI, 147 pages. 1985.

Vol. 1116: S. Stolz, Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder. XXIII, 134 Seiten. 1985.

Vol. 1117: D.J. Aldous, J.A. Ibragimov, J. Jacod, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII – 1983. Édité par P.L. Hennequin. IX, 409 pages. 1985.

Vol. 1118: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Seminaire, 1982/83. Edité par Th. Jeulin et M. Yor. V, 315 pages. 1985.

Vol. 1119: Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Proceedings, 1984. Edited by I. Capuzzo Dolcetta, W.H. Fleming and T. Zolezzi. VI, 202 pages. 1985.

Vol. 1120: K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras. V, 118 pages. 1985.

Vol. 1121: Singularities and Constructive Methods for Their Treatment. Proceedings, 1983. Edited by P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman. IX, 346 pages. 1985.

Vol. 1122: Number Theory. Proceedings, 1984. Edited by K. Alladi. VII, 217 pages. 1985.

Vol. 1123: Séminaire de Probabilités XIX 1983/84. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 504 pages. 1985.

Vol. 1124: Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983. Proceedings. Edited by E. Casas-Alvero, G.E. Welters and S. Xambó-Descamps. XI, 416 pages. 1985.

Vol. 1125: Dynamical Systems and Bifurcations. Proceedings, 1984. Edited by B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens. V, 129 pages. 1985.

Vol. 1126: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1983. Edited by A. Ranicki, N. Levitt and F. Quinn. V, 423 pages. 1985.

Vol. 1127: Numerical Methods in Fluid Dynamics. Seminar. Edited by F. Brezzi, VII, 333 pages. 1985.

Vol. 1128: J. Elschner, Singular Ordinary Differential Operators and Pseudodifferential Equations. 200 pages. 1985.

Vol. 1129: Numerical Analysis, Lancaster 1984. Proceedings. Edited by P.R. Turner. XIV, 179 pages. 1985.

Vol. 1130: Methods in Mathematical Logic. Proceedings, 1983. Edited by C.A. Di Prisco. VII, 407 pages. 1985.

Vol. 1131: K. Sundaresan, S. Swaminathan, Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces. III, 116 pages. 1985.

Vol. 1132: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory. Proceedings, 1983. Edited by H. Araki, C.C. Moore, Ş. Strătilă and C. Voiculescu. VI, 594 pages. 1985.

Vol. 1133: K.C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. VI, 362 pages. 1985.

Vol. 1134: G.P. Galdi, S. Rionero, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. VII, 126 pages. 1985.

Vol. 1135: Number Theory, New York 1983–84. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 283 pages. 1985.

Vol. 1136: Quantum Probability and Applications II. Proceedings, 1984. Edited by L. Accardi and W. von Waldenfels. VI, 534 pages. 1985.

Vol. 1137: Xiao G., Surfaces fibrées en courbes de genre deux. IX, 103 pages. 1985.

Vol. 1138: A. Ocneanu, Actions of Discrete Amenable Groups on von Neumann Algebras. V, 115 pages. 1985.

Vol. 1139: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1983. Edited by H. D. Doebner and J. D. Hennig. VI, 337 pages. 1985.

Vol. 1140: S. Donkin, Rational Representations of Algebraic Groups. VII, 254 pages. 1985.

Vol. 1141: Recursion Theory Week. Proceedings, 1984. Edited by H.-D. Ebbinghaus, G.H. Müller and G.E. Sacks. IX, 418 pages. 1985.

Vol. 1142: Orders and their Applications. Proceedings, 1984. Edited by I. Reiner and K. W. Roggenkamp. X, 306 pages. 1985.

Vol. 1143: A. Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions. XIII, 203 pages. 1985.

Vol. 1144: Knot Theory and Manifolds. Proceedings, 1983. Edited by D. Rolfsen. V, 163 pages. 1985.

continued on page 329

PREVIOUS VOLUMES OF THE "SEMINAIRE PAUL DUBREIL" WERE PUBLISHED IN THE LECTURE NOTES , VOLUMES 586 (1976), 641 (1977), 740 (1978), 795 (1979), 867 (1980), 924 (1981), 1029 (1982), 1146 (1983-84) and 1220 (1985).

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

Liste des auteurs .

K.Adjamagbo p. 1 - Y.André p. 28 - M. van den Bergh p. 228 -
M.Brion p. 177 - A.Debiard p. 42 - A.van den Essen p. 125 -
J.van Geel p. 193 - C.R.Hajarnavis p. 235 - J.Herzog p. 214 -
G.Krause p. 261 - B.Roux p. 276 , J.T.Stafford p. 247 -
S.P.Smith p. 158 - M.Zayed p. 312 .

TABLE DES TITRES

K.ADJAMAGBO - Synthèse de la Théorie du déterminant sur un anneau finement filtré 1

Y.ANDRÉ - Quatre descriptions des groupes de Galois différentiels 28

A.DEBIARD - Système différentiel hypergéométrique et parties radiales des opérateurs invariants des espaces symétriques de type BC_p 42

A.Van den ESSEN - Modules with regular singularities over filtered rings and algebraic micro-localization 125

S.P.SMITH - Curves, differential operators and finite dimensional algebras 158

*

M.BRION - Sur l'image de l'application moment 177

J.van GEEL - Maximal orders over curves 193

J.HERZOG - Linear Cohen-Macaulay modules on integral quadrics ... 214

*

M.van den BERGH - Regular rings of dimension three 228

C.R.HAJARNAVIS - Homological and Cohen-Macaulay properties in non-commutative noetherian rings 235

J.T.STAFFORD - Global dimension of semi-prime noetherian rings .. 247

*

G.KRAUSE - Chaînes d'idéaux annulateurs d'un anneau noetherien .. 261

B.ROUX - Anneaux de valuation discrète complets scindés, non commutatifs, en caractéristique zéro 276

M.ZAYED - Ultra produits et modules sans facteurs directs de type fini 312

SYNTHESE DE LA THEORIE DU DETERMINANT SUR UN ANNEAU FINEMENT FILTRE

Kossivi ADJAMAGBO
Université de Paris VI,
U.E.R. 47, U.A. 761

0. INTRODUCTION

Nous présentons ici une synthèse de nos résultats concernant "le déterminant sur un anneau finement filtré", dans le prolongement de ceux de Jean Dieudonné concernant "les déterminants sur un corps non commutatif" [12].

Dans cette synthèse, nous nous sommes efforcés de trouver le point de vue le plus "simple et concis" pour présenter les notions et résultats dont nous sommes tributaires, dans l'espoir que cet effort favorisera la compréhension mutuelle et même la collaboration entre les spécialistes des diverses disciplines mathématiques au carrefour desquelles nous nous situons, à savoir l'algèbre non commutative, la géométrie algébrique, la K-théorie algébrique et les équations aux dérivées partielles.

Pour les preuves des résultats originaux présentés ici, nous renvoyons les lecteurs interessés à [5] ou [6].

Cette présentation a fait l'objet de deux exposés au Séminaire d'Algèbre de l'Université de Paris VI, en octobre 1984 puis en 1985, ainsi que d'un autre au Colloque de Mathématiques de l'Université Catholique de Nijmegen (Pays-Bas) en avril 1986.

Qu'il nous soit donc permis de remercier ici Madame le Professeur M.P. Malliavin pour l'intérêt qu'elle a porté à notre travail et pour l'occasion qu'elle nous a donnée d'exposer et de publier les résultats obtenus, Monsieur le Professeur A. Van Den Essen pour la fructueuse collaboration née de mon invitation à Nijmegen sur son initiative, ainsi que Monsieur le Professeur J. Vaillant pour ses constants encouragements qui nous ont permis de développer la présente théorie.

Le plan que nous allons suivre est le suivant :

1. Le concept du déterminant.
2. L'idéal caractéristique d'un module de t.f. sur un anneau f.f.
3. Sur les matrices inversibles à coéfficients dans un anneau f.f.
4. Sur la K-théorie des anneaux f.f .
5. Sur les opérateurs différentiels matriciels localement injectifs.
6. Sur les opérateurs différentiels matriciels localement bijectifs.

1. LE CONCEPT DU DETERMINANT

1.1. Notation

Par anneau nous entendrons unifère dont l'unité est notée 1.
Si A est un anneau, nous noterons :

$A_\star = A \setminus \{0\}$,

$A^\star$ = {éléments inversibles de A},

$M_{m,n}(A)$ = {matrices à m lignes et à n colonnes à coéfficients dans A},

$M_n(A) = M_{n,n}(A)$,

$M_n^\star(A) = (M_n(A))^\star$,

$E_n(A)$ = {matrices élémentaires $\in M_n^\star(A)$},

$M(A) = \bigcup_{n > o} M_n(A)$,

$M^\star(A) = \bigcup_{n > o} M_n^\star(A)$,

Si $a \in M_{m,n}(A)$ nous noterons a_{ij} le coefficient de la ligne i et de la colonne j de a.

Si K est un corps, nous noterons :

K' l'abélianisé du groupe $K^\star$, c'est-à-dire $K^\star / [K^\star, K^\star]$,

Π_K l'application canonique de $K^\star$ dans K',

$\bar{K}$ le monoïde $K' \cup \{0\}$ dont 0 est un élément absorbant .

1.2. Le déterminant de Dieudonné

Si K est un corps, d'après J. Dieudonné [12], il existe une application unique de M(K) dans $\bar{K}$, notée dét_K, telle que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}_\star$, $\forall (a,b) \in M_n(K)^2$,

$$\text{dét}_K\, a.b = \text{dét}_K\, a.\text{dét}_K b$$

(ii) $\forall a \in M(K)$, $\text{dét}_K = 0 \iff a \notin M^\star(K)$

(iii) $\forall n \in N_\star$, $\forall a \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0$ pour $1 \leqslant j < i \leqslant n$,

$$\text{dét}_K\, a = \prod_{i=1}^{n} \Pi_K\, a_{ii}.$$

Si $n \in \mathbb{N}_\star$, $\text{dét}_K | M_n(K)$ peut être définie de la manière suivante (algorithme de Gauss, cf. [4]) :

(i) Si $a \in M_n(K) \setminus M_n^{\star}(K)$, alors $\text{dét}_K a = 0$,

(ii) Si $a \in M_n^{\star}(K)$, $\exists\ r \in \mathbb{N}_{\star}$, $(a^{(1)},\ldots,a^{(r)}) \in E_n(A)^r$ tel que $b = a^{(1)}\ldots a^{(r)}.a$ vérifie : $b_{11} \in K^{\star}$, $b_{ii} = 1$ pour $1 < i \leqslant n$, $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On a alors

$$\text{dét}_K\ a = \Pi_K\ b_{11}.$$

1.3. Graduations

Soient G un groupe et Δ un monoïde commutatifs. On appelle "graduation sur G de type Δ" toute application Γ de Δ dans l'ensemble des sous-groupes de G telle que $G = \bigoplus_{n \in \Delta} \Gamma(n)$.

On appelle alors le couple (G,Γ) un "groupe gradué de type Δ", le monoïde Δ "l'ensemble des degrés" de la graduation Γ ou du groupe gradué (G,Γ)

Si $n \in \Delta$, on appelle alors $\Gamma(n)$ "la composante homogène de G de degré n relativement à Γ", et tout élément a de $\Gamma(n)$ un "élément homogène de G relativement à Γ". Nous dirons alors que n est "le degré de a relativement à Γ" et nous noterons $\deg_\Gamma a = n$.

Si $a = \sum_{n \in \Delta} a_n \in G$, avec $a_n \in \Gamma(n)$ pour tout $n \in \Delta$, nous appellerons alors a_n "la composante homogène de a de degré n relativement à Γ".

Si A est un anneau et Γ une graduation sur A de type Δ, nous dirons que F est "compatible avec la structure d'anneau de A" si pour tous m et n de Δ, $\Gamma(m).\Gamma(n) \subset \Gamma(m+n)$, "." désignant la multiplication de l'anneau A et "+" la loi du monoïde Δ.

On appelle alors le couple (A,Γ) un "anneau gradué de type Δ".

Si I est alors un idéal de A, on dit que I est un "idéal gradué relativement à Γ" ou un "idéal gradué de (A,F)", si toute composante homogène relativement à F de tout élément de I appartient à I.

De même, si M est alors un A-module à gauche (resp. droite) et si Γ_M est une graduation sur M de type Δ, on dit que Γ_M est "compatible avec Γ" si pour tous m et n de Δ, $\Gamma(m).\Gamma_M(n) \subset \Gamma_M(m+n)$, "." désignant ici la multiplication des éléments de A par ceux du A-module M.

On appelle alors le couple (M,Γ_M) un A-module à gauche (resp. droite) gradué de type Δ "compatible avec Γ".

Si (G,Γ) est un groupe gradué de type Δ, nous appellerons "support de Γ" et nous noterons $\operatorname{supp}\Gamma$ l'ensemble des éléments n de Δ tels que $\Gamma(n) \neq \{0\}$.

Si (G',Γ') est un autre groupe gradué et si $\delta \in \Delta$, on appelle "homomorphisme gradué de (G,Γ) dans (G',Γ') de degré δ" tout homomorphisme u de G dans G' tel que $u(\Gamma(n)) \subset \Gamma(n+\delta)$ pour tout $n \in \Delta$.

Si A est un anneau commutatif, Γ une graduation sur A, S un ensemble d'éléments homogènes de A relativement à Γ, et $S^{-1}A$ le localisé de A par rapport à S, nous noterons Γ_S la filtration sur $S^{-1}A$ telle que pour tout entier n,

$$\Gamma_S(n) = \{a/b \mid a \in \Gamma(p),\ b \in \Gamma(q) \cap S,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2, p-q=n\}.$$

On appelle l'anneau gradué $(S^{-1}A,\Gamma_S)$ "le localisé de l'anneau gradué (A,Γ) par rapport à S".

1.4. Filtration

Soit G un groupe commutatif.

On appelle "filtration sur G" toute application croissante de $\mathbb{Z}$ dans l'ensemble des sous-groupes de G telle $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F(n)$.

On appelle alors le couple (G,F) un "groupe filtré".

Nous noterons alors $gr_F G$ le groupe $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F(n+1)/F(n)$, $gr\, F$: l'application $n \mapsto F(n+1)/F(n)$ de $\mathbb{Z}$ dans $gr_F G$, et nous appelerons le groupe gradué de type $\mathbb{Z}$ $(gr_F G, grF)$ "le groupe gradué associé à (G,F)".

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

Nous noterons également :

gr_n^F , pour $n \in \mathbb{Z}$, l'application canonique de $F(n)$ dans $F(n)/F(n-1)$

$gr_F a$, pour $a \in G$, l'élément $\sum_{n \mid a \in F(n)} gr_n^F a$ de $gr_F G$,

gr_F l'application $a \mapsto gr_F a$ de G dans $gr_F G$,

$deg_F a$, pour $a \in G$, l'élément $\inf\{n \mid a \in F(n)\}$ de $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty,+\infty\}$,

deg_F l'application $a \mapsto dég_F a$ de G dans $\bar{\mathbb{Z}}$,

$dist_F$ l'application $(a,b) \mapsto 2^{dég_F(a-b)}$ de G^2 dans $\mathbb{R}^+$

Nous appelerons gr_F l'application canonique de G dans $gr_F G$ et $dég_F a$ le degré de l'élément a de G relativement à F.

On dit que F est "séparé" si $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F(n) = \{0\}$.

Si F est séparée, $dist_F$ est alors une distance sur G, et nous dirons alors que F est complète si l'espace métrique $(G,dist_F)$ est complet.

Si A est un anneau, on dit qu'une filtration F sur A est "compatible avec la structure d'anneau de A" si, pour m et n de $\mathbb{Z}$, $F(m).F(n) \subset F(m+n)$ et $1 \in F(0)$, "." désignant la multiplication de l'anneau A.

On appelle alors le couple (A,F) un "anneau filtré". L'application $(gr_F(a),gr_F(b)) \mapsto gr_F(a.b)$ de $gr_F(A)^2$ dans $gr_F(A)$ induit alors sur le groupe $gr_F A$ une structure d'anneau avec laquelle est compatible la graduation $gr\, F$.

On appelle alors le couple formé par un tel anneau $gr_F A$ et la graduation $gr\, F$ "l'anneau gradué associé à (A,F)".

Nous dirons alors que F est "commutative" (resp. "intègre") si l'anneau $gr_F A$ l'est, et "fine" si F est séparée, commutative et intègre, auquel cas nous appellerons (A,F) un "anneau finement filtré".

Si (A,F) est un anneau filtré, M un A-module à gauche (resp. droite) et F_M une filtration sur M, on dit que F_M est "compatible avec F" si, pour tous m et n de $\mathbb{Z}$, $F(m).F_M(n) \subset F_M(m+n)$, "." désignant ici la multiplication des éléments de A par ceux du A-module M.

On appelle alors le couple (M,F_M) un "A-module à gauche (resp. droite) filtré compatible avec F".

L'application $(gr_F(a), gr_{F_M}(b)) \mapsto gr_{F_M}(a.b)$ de $gr_F(A) \times gr_{F_M}(M)$ dans $gr_{F_M}(M)$ induit alors sur le groupe $gr_{F_M} M$ une structure de $gr_F A$-module à gauche (resp. droite) rendant la filtration $gr\, F_M$ compatible avec la filtration $gr\, F$.

On appelle alors le couple $(gr_{F_M} M, gr\, F_M)$ "le $gr_F A$-module à gauche (resp. droite) gradué associé à (M,F_M).

1.5. Microlocalisation algébrique

Soient (A,F) un anneau finement filtré et S une partie multiplicative de $A_\star$.

D'après T.A. Springer [19] et A. Van den Essen [21], il existe un anneau finement filtré complet $(R,\emptyset)$ unique à un isomorphisme près, et un homomorphisme injectif i de (A,F) dans $(R,\emptyset)$ tels que :

1) $i(S) \subset R^\star$
2) pour tout $s \in S$, $\deg_\emptyset i(s)^{-1} \leqslant -\deg_F s$,
3) pour tout anneau finement filtré complet (B,Γ) et pour tout homomorphisme h de (A,F) dans (B,Γ) tel que $h(S) \subset B^\star$ et $\deg_\Gamma h(s)^{-1} \leqslant -\deg_F s$ pour tout $s \in S$, il existe un unique homomorphisme $h_\emptyset$ de $(R,\emptyset)$ dans (B,Γ) rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (A,F) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & (B,\Gamma) \\ (R,\emptyset) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Nous appellerons un tel anneau filtré $(R,\emptyset)$ le microlocalisé de (A,F) par rapport à S et nous le noterons $(E_S(A), F_S)$, tandis que l'injection i sera notée i_S.

Les parties $i_S(s)^{-1}\, i_S(A) = \{i_S(s)^{-1}.i_S(a) \mid s \in S,\ a \in A\}$ et $i_S(A).i_S(S)^{-1} = \{i_S(s).i_S(s)^{-1} \mid s \in S,\ a \in A\}$ sont denses dans l'espace métrique $(E_S(A), dist_{F_S})$.

On en déduit l'existence d'un isomorphisme j_S de l'anneau gradué $(gr_{F_S} E_S(A), gr\, F_S)$ sur l'anneau gradué $(H_S^{-1}\, gr_F A, (gr\, F)_{H_S})$, avec $H_S = gr_F(S)$.

Si S est une partie de Ore à gauche (resp. à droite) de A, c'est-à-dire si pour tout $(s,a) \in S \times A_\star$, il existe $(s',a') \in S \times A_\star$ tel que $a's = s'a$ (resp. $sa' = as'$), alors $i_S(S)^{-1}i_S(A)$ (resp. $i_S(A).i_S(S)^{-1}$), muni des lois du corps $E_S(A)$, n'est rien d'autre que le localisé à gauche (resp. à droite) de A par rapport à S.

Si $S = A_\star$, l'anneau $E_S(A)$ est alors un corps et nous appellerons alors l'anneau filtré $(E_S(A),F_S)$ le microlocalisé total de l'anneau filtré (A,F).

Si M est un A-module, on peut donc définir sa dimension sur A comme égal à $\dim_A M = \dim_K K \underset{A}{\otimes} M$, où K désigne le corps $E_{A_\star}(A)$.

1.6. Définition du déterminant sur un anneau finement filtré

Soient (A,F) un anneau finement filtré, $(K,\emptyset)$ son microlocalisé total, H le monoïde multiplicatif des éléments homogènes de l'anneau gradué $gr_\emptyset K$, $H_\star = H\setminus\{0\}$, $\overline{gr}_\emptyset$ l'application de $\bar{K}$ dans H telle que $\overline{gr}_\emptyset(0) = 0$ et que $\overline{gr}_\emptyset|K'$ soit l'application qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K^\star \arrow[r, "gr_\emptyset|K^\star"] \arrow[d, "\Pi_K"'] & H_\star \\ K' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Nous entendrons par "déterminant sur l'anneau filtré (A,F)" ou "déterminant sur l'anneau A associé à la filtration F" et nous noterons dét_F, l'application

$$j_{A_\star} \circ \overline{gr}_\emptyset \circ \text{dét}_K \circ I_{A_\star}$$

où $I_{A_\star}$ désigne l'injection de $M(A)$ dans $M(K)$ induite par $i_{A_\star}$.

Nous dirons que dét_F est régulier s'il est à valeurs dans $gr_F A$, donc dans $gr_F(A)$.

1.7. Remarques

Si A est un domaine de Ore à gauche (resp. à droite), c'est-à-dire si $A_\star$ est une partie de Ore à gauche (resp. à droite) de A, "le déterminant dét_{gr_F} sur A associé à l'application gr_F" défini dans [1] et [2] coïncide avec "le déterminant dét_F sur A associé à la filtration F", en vertu du lemme de prolongement [2] , 1.13.

Pour la même raison, si A est commutatif et si F est la filtration triviale de A, c'est-à-dire la filtration F telle que $F(n) = A$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $F(n) = \{0\}$ si $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, le déterminant dét_F coïncide avec le déterminant "classique" $\text{dét}_A : M(A) \to A$.

1.8. Théorème de régularité

Si (A,F) est un anneau finement filtré et si l'anneau $gr_F A$ est l'intersection d'une famille d'anneaux de valuation qui sont des localisés de $gr_F A$, alors dét_F est régulier.

1.9. Corollaire

Si (A,F) est un anneau finement filtré, dét_F est régulier dans chacun des deux cas suivants :

1) $gr_F A$ est un anneau de Krull [8]. C'est en particulier le cas si $gr_F A$ est factoriel [1], théorème 3,ou si $gr_F A$ est noethérien et intégralement clos, donc si $gr_F A$ est régulier [18].

2) $F(-1) = \{0\}$, l'anneau $F(0)$ est intégralement clos et $gr_F A$ est une $F(0)$-algèbre libre.

1.10. Exemples

1) Soient A_o un anneau commutatif et intègre, G un A_o-algèbre de Lie qui est une A_o-module libre, $U(G)$ son algèbre enveloppante et F_G sa filtration canonique.

D'après le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt [9], l'anneau gradué $gr_{F_G} U(G)$ est isomorphe à l'anneau gradué des polynômes à $\dim_{A_o} G$ indéterminées et à coéfficients dans A_o.

Nous en déduisons que $(U(G),F_G)$ est un anneau finement filtré, que $U(G)$ est un domaine de Ore et que dét_{F_G} est régulier si A_o est intégralement clos.

Si A_o est un anneau commutatif intègre, R la A_o-algèbre à gauche des applications de A_o dans A_o, $d = (d_1,\dots,d_n)$ une suite finie de n dérivations de A_o dans A_o commutant entre elles et transcendantes dans la A_o-algèbre R, on peut prendre pour G le A_o-sous-module de R engendré par les éléments de d, muni du crochet de Lie $(a,b) \mapsto [a,b] = a \circ b - b \circ a$. L'algèbre $U(G)$ est alors appelée la A_o-algèbre des opérateurs différentiels sur A_o engendrés par d et est notée $A_o[d]$ ou $A_o[d_1,\dots,d_n]$. Nous appellerons alors F_G la filtration principale sur $A_o[d]$ que nous noterons F_d, $\deg_{F_d}$ le degré principal sur $A_o[d]$ que nous noterons $\deg_d$, gr_{F_d} le symbole principal sur $A_o[d]$ que nous noterons gr_d, et $\det_{F_d}$ le déterminant principal sur $A_o[d]$ que nous noterons $\det_d$.

Si A_o est l'anneau des polynômes à n indéterminées sur un anneau commutatif intègre R et d_i la dérivation par rapport à la i-ème indéterminée, $A_o[d]$ n'est rien d'autre que l'algèbre de Weyl $W_n(R)$ d'indice n sur l'anneau R [7].

2) Soient X une variété analytique complexe de dimension finie n, T^*X le fibré cotangent, Π la projection canonique de T^*X sur X, p un point de T^*X tel que $p \neq (\Pi(p)0)$, (E_p,F_p) l'anneau filtré des germes d'opérateurs microdifférentiels au point p [7], et O_{2n-1} l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^{2n-1}$.

D'après M. Sato, M. Kashiwara et T. Kawaï ,[16] ou [7] l'anneau gradué $(gr_{F_p} E_p, gr(F_p))$ est isomorphe au localisé de l'anneau gradué des polynômes à une indéterminée à coéfficients dans O_{2n-1} par rapport à l'ensemble des puissances de cette indéterminée.

L'anneau filtré (E_p,F_p) est donc un anneau finement filtré, et d'après le théorème précédent, $\det_{F_p}$ est régulier.

Pour tout $a \in M(E_p)$, $\det_{F_p} a$ peut donc être considéré comme un germe de fonctions analytiques en p et homogènes en les variables des fibres de T^*X, si on identifie l'ensemble des éléments homogènes de $gr_{F_p} E_p$ à l'ensemble des germes de fonctions analytiques en p et homogènes en les variables des fibres, ce qui fournit une preuve purement algébrique de la proposition de [17].

1.11 <u>Conjecture</u>

Pour tout anneau finement filtré (A,F), $\det_F$ est régulier.

1.12. Calcul pratique

Pour le calcul pratique, à la main ou par ordinateur, du déterminant principal d'une matrice carrée d'opérateurs différentiels, on pourra lire dans [4] la théorie de la calculabilité, au sens de Turing [11], du déterminant principal sur un anneau filtré d'opérateurs différentiels.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com