Lecture Notes in Mathematics

Jean-Louis Colliot-Thélène
Peter Swinnerton-Dyer
Paul Vojta

Arithmetic Geometry

2009

Cetraro, Italy 2007

Editors: Pietro Corvaja
Carlo Gasbarri

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

Jean-Louis Colliot-Thélène
Peter Swinnerton-Dyer
Paul Vojta

Arithmetic Geometry

Lectures given at the C.I.M.E. Summer School
held in Cetraro, Italy, September 10–15, 2007

Editors:
Pietro Corvaja
Carlo Gasbarri

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

Authors
Prof. Jean-Louis Colliot-Thélène
Université Paris-Sud XI
CNRS
Labo. Mathématiques
Orsay 91405 CX
Bâtiment 425
France
jlct@math.u-psud.fr

Prof. Peter Swinnerton-Dyer
University of Cambridge
Dept. of Pure Math. & Math. Statistics
Wilberforce Road
CB30WB Cambridge
United Kingdom
H.P.F.Swinnerton-Dyer@dpmms.cam.ac.uk

Prof. Paul Vojta
University of California, Berkeley
Department of Mathematics
970, Evans Hall
Berkeley, CA 94720-3840
USA
vojta@math.berkeley.edu

Editors
Prof. Pietro Corvaja
Università di Udine
Dipto. di Matematica e Informatica
Via delle Scienze 206
33100 Udine
Italy
pietro.corvaja@uniud.it

Prof. Carlo Gasbarri
Université de Strasbourg
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg
France
gasbarri@math.unistra.fr

ISBN: 978-3-642-15944-2 e-ISBN: 978-3-642-15945-9
DOI: 10.1007/978-3-642-15945-9
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Lecture Notes in Mathematics ISSN print edition: 0075-8434
ISSN electronic edition: 1617-9692

Library of Congress Control Number: 2010938613

Mathematics Subject Classification (2010): 11G35, 11G25, 11D45, 14G05, 14G10, 14G40, 14M22

Cover design: SPi Publisher Services

Printed on acid-free paper

springer.com

Lecture Notes in Mathematics 2009

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI
CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
INTERNATIONAL MATHEMATICAL SUMMER CENTER

C.I.M.E. means Centro Internazionale Matematico Estivo, that is, International Mathematical Summer Center. Conceived in the early fifties, it was born in 1954 and made welcome by the world mathematical community where it remains in good health and spirit. Many mathematicians from all over the world have been involved in a way or another in C.I.M.E.'s activities during the past years.

So they already know what the C.I.M.E. is all about. For the benefit of future potential users and co-operators the main purposes and the functioning of the Centre may be summarized as follows: every year, during the summer, Sessions (three or four as a rule) on different themes from pure and applied mathematics are offered by application to mathematicians from all countries. Each session is generally based on three or four main courses (24–30 hours over a period of 6–8 working days) held from specialists of international renown, plus a certain number of seminars.

A C.I.M.E. Session, therefore, is neither a Symposium, nor just a School, but maybe a blend of both. The aim is that of bringing to the attention of younger researchers the origins, later developments, and perspectives of some branch of live mathematics.

The topics of the courses are generally of international resonance and the participation of the courses cover the expertise of different countries and continents. Such combination, gave an excellent opportunity to young participants to be acquainted with the most advanced research in the topics of the courses and the possibility of an interchange with the world famous specialists. The full immersion atmosphere of the courses and the daily exchange among participants are a first building brick in the edifice of international collaboration in mathematical research.

C.I.M.E. Director
Pietro ZECCA
Dipartimento di Energetica "S. Stecco"
Università di Firenze
Via S. Marta, 3
50139 Florence
Italy
e-mail: zecca@unifi.it

C.I.M.E. Secretary
Elvira MASCOLO
Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Università di Firenze
viale G.B. Morgagni 67/A
50134 Florence
Italy
e-mail: mascolo@math.unifi.it

For more information see CIME's homepage: http://www.cime.unifi.it

CIME activity is carried out with the collaboration and financial support of:
– INdAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica)

Preface

Arithmetic Geometry can be defined as the part of Algebraic Geometry connected with the study of algebraic varieties over arbitrary rings, in particular over non-algebraically closed fields. It lies at the intersection between classical algebraic geometry and number theory.

In recent years, significant progress has been achieved in this field, in several directions. More importantly, new links between arithmetic geometry and other branches of mathematics have been developed, and new powerful tools from geometry, complex analysis, differential equations and representation theory have been imported into number theory, thus putting arithmetic geometry at the crossroads of most of contemporary mathematics.

Some links between arithmetic geometry and classical algebraic geometry come from the classification of algebraic varieties, an old subject initiated by the Italian school in the case of surfaces and developed at a rapid pace in recent time.

As discovered by Osgood and Vojta about 20 years ago, there is a formal analogy between complex analysis and both diophantine approximation and arithmetic geometry. Such analogy has revealed itself as a fertile source of ideas and problems in both complex analysis and arithmetic geometry, and it has recently led to new achievements.

The algebraic theory of differential equations is also connected to arithmetic geometry, especially with algebraic geometry in positive characteristic; many authors, starting with the founders of transcendental number theory, stressed the role of differential equations in transcendence. Recently, the theory of algebraic foliations showed new relations between these topics and diophantine approximation.

The C.I.M.E. Summer School *Arithmetic Geometry*, held in Cetraro (Cosenza, Italy), September 10–15, aimed at presenting some of the most interesting new developments of arithmetic geometry. It consisted of four courses, given by some of the most eminent contributors to the field.

Here is an overview of the three courses which have been written up.

Section 1 Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences, by Jean-Louis Colliot-Thélène.

This survey addresses the general question: Over a given type of field, is there a natural class of varieties which automatically have a rational point? Fields under consideration here include: finite fields, p-adic fields, function fields in one or two variables over an algebraically closed field, C_i-fields. Classical answers are given by the Chevalley-Warning theorem and by Tsen's theorem. More general answers were provided by a theorem of Graber, Harris and Starr and by a theorem of Esnault. The latter results apply to *rationally connected varieties*.

Colliot-Thélène discusses these varieties from various angles: weak approximation (see also Swinnerton-Dyer's contribution), R-equivalence on the set of rational points, Chow group of zero-cycles.

Loosely speaking, R-equivalence on the set of rational points of a variety defined over a given field is generated by the elementary relation: to be connected by a rational curve defined over the given field. Rationally connected varieties are varieties for which R-equivalence becomes trivial when one extends the ground field to an arbitrary algebraically closed field. Rationally connected varieties play an important rôle in the classification of algebraic varieties.

Ongoing work on "rationally simply connected" varieties over function fields in two variables is also mentioned. A common thread in this report is the study of the special fibre of a scheme over a discrete valuation ring: if the generic fibre has a simple geometry, what does it imply for the special fibre?

Many examples are presented in the course showing that, despite important recent advancements, still many questions remain open, keeping the subject strongly alive.

Section 2 Topics in diophantine equations, by Sir Peter Swinnerton-Dyer.

The notes by Swinnerton-Dyer address the main problem in the theory of diophantine equations: to decide whether a given algebraic equation has solutions in integer or rational numbers.

An obvious necessary condition for the existence of rational solutions to a diophantine equation is its solubility over the reals, and more generally over p-adic completions of $\mathbb{Q}$. Since an effective procedure to decide about solubility over local fields is known, such condition is very useful in many cases. Hence it is natural to ask for which class of diophantine equations the converse also holds:

1. If the equation is soluble over every local completion of the rational number field, is it soluble over the rationals?

This is called the Hasse principle. It is known that its does not hold for an arbitrary equation. An obstruction for its validity was discovered by Manin in the seventies and is nowadays called the Brauer-Manin obstruction. The notes briefly describe this obstruction, and then address the second natural question:

2. Is the Brauer-Manin obstruction the only obstruction to the Hasse principle?

In the case when a given equation is known to be soluble, one may be interested in the distribution of its solutions, i.e., of rational points on the algebraic variety V defined by that equation. When such points are Zariski-dense, one would like to "measure" their density. There are at least two very distinct notions of density. First: for every positive integer H, we let $N(H)$ be the number of rational points of height less than H. We ask:

3. Can one estimate the growth of $N(H)$, for $H \to \infty$, in terms of the geometry of V?

Secondly: embed $V(\mathbb{Q})$ in the product $\prod_p V(\mathbb{Q}_p)$ and consider the corresponding product topology.

4. (Weak approximation) Is the image of $V(\mathbb{Q})$ dense in every finite product as above?

These problems and questions are related with many other aspects of arithmetic and geometry, and the author illustrates these links in the first chapters of his text, which can be viewed as an introduction to most of twentieth century Arithmetic Geometry.

In the second part of the notes, answers are given to the above mentioned questions in many concrete nontrivial cases, especially for surfaces. The methods employed have been pioneered by Swinnerton-Dyer himself and his collaborators in the last ten years; here a panoramic view of these methodologies is given. Also, several new examples are presented for the first time, in particular for the most important case of elliptic and rational surfaces.

Section 3 Diophantine approximation and Nevanlinna theory, by Paul Vojta.

In the eighties, P. Vojta discovered striking analogies between Nevanlinna theory in complex analysis, diophantine approximation, some results on entire curves and the distribution of integral and rational points on algebraic varieties.

Suppose that X is a projective variety defined over a field K of characteristic zero. If K is a number field we are interested in the structure of the set $X(K)$ of its rational points. If $K = \mathbb{C}$ we are interested in the image of analytic maps $f : \mathbb{C} \to X$.

We may ask the following questions in the two cases:

(1_{ar}) Is the set $X(K)$ Zariski dense?
(1_{an}) May we find maps $f : \mathbb{C} \to X$ with Zariski dense image?
(2_{ar}) Is there a finite extension L/K such that $X(L)$ is Zariski dense?
(2_{an}) Is there a finite covering $h : Y \to \mathbb{C}$ with a map $f : Y \to X$ with Zariski dense image?
(3_{ar}) May we control the size of the rational points in $X(K)$ outside of a proper Zariski closed set?
(3_{an}) Is it possible to control the order of growth of a map $f : \mathbb{C} \to X$ with Zariski dense image, in terms of the geometry of X?

Analogous question can be asked for open subsets $Y \subset X$ of algebraic varieties, namely:

(4_{ar}) Let $\mathcal{O}_K$ be the ring of integers of K. Is the set $Y(\mathcal{O}_K)$ Zariski dense?
(4_{an}) Does there exist a map $f : \mathbb{C} \to Y$ with Zariski dense image?

Many other similar questions may be asked.

The notes by P. Vojta begin by formalizing the language needed to attack these questions: In the arithmetic context, the theory of height and Weil functions is described, while in the analytic context, the appropriate Nevanlinna theory is used.

Vojta shows how, using an appropriate dictionary, the two theories have striking similarities. Also he shows how his "dictionary" can be used as a source of problems in both theories. In particular, the analogies between Roth's theorem in diophantine approximation and Nevanlinna's Second Main Theorem, between Schmidt's subspace theorem in diophantine approximation and Cartan's Theorem in Nevanlinna theory are presented, and this leads to the natural analogy between Griffiths' conjecture in complex analysis and his own conjecture on rational points.

After showing the classical results on the distribution of rational and integral points in their historical perspective, he presents some of the recent developments obtained from Schmidt's subspace theorem (and from Cartan theorem in the Nevanlinna setting), to give nontrivial answers to questions (4_{ar}) and (4_{an}) in certain cases. In the last part of the course, he explains the relations of these theories with different versions of the famous *abc* conjecture of Masser and Oesterlé, and gives some ideas on recent developments obtained by McQuillan and Yamanoi on the so-called $1+\varepsilon$ conjecture, in the function field case. Finally, he formulates some new conjectures in arithmetic, which are strongly inspired by the work of McQuillan on the *abc* conjecture over function fields.

Pietro Corvaja
Carlo Gasbarri

Contents

Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences ... 1
Jean-Louis Colliot-Thélène
1 Introduction ... 1
2 Notations, rappels et préliminaires ... 2
3 Schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète ... 4
3.1 A-schémas de type (R), croisements normaux, croisements normaux stricts ... 4
3.2 Quand la fibre spéciale a une composante de multiplicité 1 ... 5
3.3 Quand la fibre spéciale contient une sous-variété géométriquement intègre ... 6
3.4 Quand la fibre spéciale a une composante géométriquement intègre de multiplicité 1 ... 7
3.5 Un exemple : quadriques ... 9
4 Groupe de Brauer des schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète ... 10
5 Corps C_i ... 12
6 R-équivalence et équivalence rationnelle sur les zéro-cycles ... 14
7 Autour du théorème de Tsen : variétés rationnellement connexes ... 14
8 Autour du théorème de Chevalley-Warning : variétés dont le groupe de Chow géométrique est trivial ... 21
9 Approximation faible pour les variétés rationnellement connexes ... 22
10 R-équivalence sur les variétés rationnellement connexes ... 23
11 Équivalence rationnelle sur les zéro-cycles des variétés rationnellement connexes ... 27
12 Vers les variétés supérieurement rationnellement connexes ... 29
12.1 Deux exemples ... 29
12.2 Fibres spéciales avec une composante géométriquement intègre de multiplicité 1 ... 30
12.3 Variétés rationnellement simplement connexes ... 32
12.4 Existence d'un point rationnel sur un corps de fonctions de deux variables ... 34

12.5 Approximation faible en toutes les places d'un corps de fonctions d'une variable 35
12.6 *R*-équivalence et équivalence rationnelle 36
13 Surjectivité arithmétique et surjectivité géométrique 37
13.1 Morphismes définis sur un corps de nombres et applications induites sur les points locaux 38
13.2 Quelques autres questions 40
Bibliographie 41

Topics in Diophantine Equations 45
Sir Peter Swinnerton-Dyer
1 Introduction 45
2 The Hasse Principle and the Brauer-Manin Obstruction 47
3 Zeta-Functions and L-Series 52
4 Curves 55
5 Varieties of Higher Dimension and the Hardy-Littlewood Method 58
6 Manin's Conjecture 60
7 Schinzel's Hypothesis and Salberger's Device 65
8 The Legendre-Jacobi Function 69
9 Pencils of Conics 75
10 2-Descent on Elliptic Curves 80
11 Pencils of Curves of Genus 1 86
12 Some Examples 93
12.1 Diagonal Quartic Surfaces 93
12.2 Some Kummer Surfaces 98
12.3 Diagonal Cubic Surfaces 98
13 The Case of One Rational 2-Division Point 101
14 Del Pezzo Surfaces of Degree 4 105
References 108

Diophantine Approximation and Nevanlinna Theory 111
Paul Vojta
1 Introduction 111
2 Notation and Basic Results: Number Theory 113
3 Heights 115
4 Roth's Theorem 117
5 Basics of Nevanlinna Theory 120
6 Roth's Theorem and Nevanlinna Theory 123
7 The Dictionary (Non-Geometric Case) 127
8 Cartan's Theorem and Schmidt's Subspace Theorem 130
9 Varieties and Weil Functions 134
10 Height Functions on Varieties in Number Theory 140
11 Proximity and Counting Functions on Varieties in Number Theory 145
12 Height, Proximity, and Counting Functions in Nevanlinna Theory 147
13 Integral Points 151

14 Units and the Borel Lemma 154
15 Conjectures in Nevanlinna Theory and Number Theory 155
16 Function Fields 160
17 The Exceptional Set 163
18 Comparison of Problem Types 165
19 Embeddings 166
20 Schmidt's Subspace Theorem Implies Siegel's Theorem 169
21 The Corvaja-Zannier Method in Higher Dimensions 170
22 Work of Evertse and Ferretti 177
23 Truncated Counting Functions and the abc Conjecture 185
24 On Discriminants 190
25 A Diophantine Conjecture for Algebraic Points 198
26 The $1+\varepsilon$ Conjecture and the abc Conjecture 200
27 Nevanlinna Theory of Finite Ramified Coverings 201
28 The $1+\varepsilon$ Conjecture in the Split Function Field Case 204
29 Derivatives in Nevanlinna Theory 206
30 Derivatives in Number Theory 212
31 Another Conjecture Implies abc 215
32 An abc Implication in the Other Direction 217
References 220

Index 225

Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences

Jean-Louis Colliot-Thélène

1 Introduction

Voici une série de résultats classiques.

Toute forme quadratique en au moins trois variables sur le corps fini $\mathbb{F}_p$ (p premier) possède un zéro non trivial (Euler). Toute forme de degré d en $n > d$ variables sur $\mathbb{F}_p$ possède un zéro non trivial (Chevalley-Warning).

Toute forme quadratique en au moins trois variables sur le corps $\mathbb{C}(t)$ des fonctions rationnelles en une variable possède un zéro non trivial (Max Noether). Toute forme de degré d en $n+1 > d$ variables sur une extension finie de $\mathbb{C}(t)$ possède un zéro non trivial (Tsen). Ceci vaut encore sur le corps $\mathbb{C}((t))$ des séries formelles en une variable (Lang).

Sur un corps fini, sur un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$, sur le corps $\mathbb{C}((t))$, tout espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe a un point rationnel.

Toute forme de degré d en $n > d$ variables sur le corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ possède un zéro non trivial sur une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ (Lang).

Toute forme de degré d en $n > d^2$ variables sur un corps de fonctions de deux variables sur $\mathbb{C}$ possède un zéro non trivial (Lang).

Toute forme quadratique en $n > 2^2$ variables sur un corps p-adique possède un zéro non trivial (Hensel, Hasse).

Toute forme cubique en $n > 3^2$ variables sur un corps p-adique possède un zéro non trivial (Demjanov, Lewis).

Pour d donné, pour presque tout premier p, toute forme possède un zéro non trivial (Ax-Kochen).

Sur un corps p-adique, tout espace homogène principal d'un groupe semi-simple simplement connexe possède un point rationnel (Kneser, Bruhat-Tits).

Sur un type donné de corps, y a-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un tel corps ont automatiquement un point rationnel ?

J.-L. Colliot-Thélène (✉)
CNRS, Mathématiques, Bâtiment 425 Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France
e-mail: jlct@math.u-psud.fr

P. Corvaja and C. Gasbarri (eds.), *Arithmetic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 2009, DOI 10.1007/978-3-642-15945-9_1,

Sur les corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ d'une part, sur les corps finis d'autre part, des progrès décisifs ont été accomplis dans les cinq dernières années, et on peut dans une certaine mesure dire que la situation est stabilisée. La similitude apparente des résultats est trompeuse. Les résultats cités sur les corps finis s'étendent à une classe beaucoup plus large de variétés que les résultats sur un corps de fonctions d'une variable. Les techniques utilisées sur un corps fini relèvent de la cohomologie étale (ou, de la cohomologie p-adique). Les techniques utilisées sur un corps de fonctions sur les complexes relèvent de la cohomologie cohérente : théorie de la déformation, théorèmes d'annulation de Kodaira et généralisations, programme du modèle minimal.

Sur les corps de fonctions de deux variables, la recherche est extrêmement active.

Dans ce rapport, qui ne contient pratiquement pas de démonstrations, j'ai essayé de présenter un instantané de la situation.

Une partie importante du texte suit un fil unifiant les travaux sur les corps de fonctions d'une variable, ceux sur les corps de fonctions de deux variables, et l'étude des variétés sur les corps p-adiques. C'est l'étude des modèles projectifs réguliers au-dessus d'un anneau de valuation discrète et de leur fibre spéciale.

Certains aspects de ce texte ont fait l'objet d'exposés depuis quelques années. Je remercie Esnault, Gabber, Hassett, de Jong, Kollár, Madore, Moret-Bailly, Starr et Wittenberg pour diverses discussions.

J'engage les lecteurs à consulter le rapport récent d'O. Wittenberg [69].

2 Notations, rappels et préliminaires

Soit k un corps. On note k_s une clôture séparable de k et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Une k-variété est *par définition* un k-schéma séparé de type fini sur k (non nécessairement irréductible, non nécessairement réduit). On note $X(k) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,k}(\mathrm{Spec}\,k, X)$ l'ensemble des points k-rationnels d'un k-schéma X. Une k-variété est dite intègre si elle est irréductible et réduite. On note alors $k(X)$ son corps des fonctions. Une k-variété est dite géométriquement intègre si la $\overline{k}$-variété $X \times_k \overline{k}$ est intègre. Une k-variété géométriquement intègre possède un ouvert de Zariski non vide qui est lisse sur k. Si k est un corps de caractéristique zéro, une k-variété intègre X est géométriquement intègre si et seulement si le corps k est algébriquement fermé dans le corps $k(X)$.

Pour la cohomologie galoisienne, et en particulier le groupe de Brauer d'un corps, le lecteur consultera Serre [65]. En plusieurs endroits on fera libre usage de la notion de dimension cohomologique d'un corps.

En quelques endroits on fera aussi usage de certaines propriétés du groupe de Brauer d'un schéma. Le lecteur se reportera aux exposés de Grothendieck [36].

Lemme 2.1 *(Nishimura, Lang) Soient k un corps, Z une k-variété régulière connexe et Y une k-variété propre. Si l'on a $Z(k) \neq \emptyset$ et s'il existe une k-application rationnelle de Z vers Y, alors $Y(k) \neq \emptyset$.*

Lemme 2.2 *Soient k un corps, Z/k une k-variété géométriquement intègre et Y/k une k-variété lisse connexe. S'il existe un k-morphisme $Z \to Y$, alors la k-variété Y est géométriquement intègre.*

Démonstration. La k-variété lisse Y est géométriquement intègre si et seulement si Y_{k_s} est irréductible. Supposons qu'elle ne le soit pas. On dispose alors du k_s-morphisme $Z_{k_s} \to Y_{k_s}$. Le groupe de Galois de k_s sur k permute les composantes de Y_{k_s}. L'image de Z_{k_s} doit se trouver dans chaque composante de Y_{k_s}. Comme Y_{k_s} est lisse, ces composantes ne se rencontrent pas. Donc Y_{k_s} n'a qu'une seule composante.

Remarque 2.3. Comme l'observe Moret-Bailly, cet énoncé est une conséquence de deux résultats généraux. Soit $Z \to Y$ un k-morphisme de k-variétés. Si Z est géométriquement connexe et Y connexe, alors Y est géométriquement connexe. Par ailleurs, si Y est normal et géométriquement connexe, alors Y est géométriquement irréductible.

Obstruction élémentaire

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k, $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu. Soit X une k-variété lisse géométriquement intègre. L'inclusion naturelle de groupes multiplicatifs $k_s^\times \to k_s(X)^\times$ définit une suite exacte

$$1 \to k_s^\times \to k_s(X)^\times \to k_s(X)^\times/k_s^\times \to 1.$$

La classe $e(X)$ de l'extension de modules galoisiens discrets obtenue est appelée l'obstruction élémentaire à l'existence d'un k-point : si X possède un k-point, alors $e(X) = 0$ (CT-Sansuc, voir [4]). Si $e(X) = 0$, alors pour toute extension finie séparable K/k, l'application naturelle de groupes de Brauer $\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}\,K(X)$ est injective.

Construction de grands corps

Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour chaque corps K contenant k, donnons-nous une classe $\mathscr{C}_K$ de K-variétés algébriques géométriquement intègres admettant un ensemble E_K de K-variétés représentant toutes les classes de K-isomorphie de la classe. Pour $k \subset K \subset L$ on suppose que le changement de corps de base $K \to L$ envoie $\mathscr{C}_K$ dans $\mathscr{C}_L$.

Pour tout corps K avec $k \subset K$ supposons satisfaite la condition suivante :

(Stab) Si $f : X \to Y$ est un K-morphisme dominant de K-variétés géométriquement intègres, si Y appartient à $\mathscr{C}_K$ et si la fibre générique de f appartient à $\mathscr{C}_{K(Y)}$, alors X appartient à $\mathscr{C}_K$.

Une construction bien connue, utilisée par Merkur'ev et Suslin (cf. [23]) permet alors de construire un plongement de corps $k \subset L$ possédant les propriétés suivantes :

(i) Le corps k est algébriquement fermé dans L.
(ii) Le corps L est union de corps de fonctions de k-variétés dans $\mathscr{C}_k$.
(iii) Toute variété dans $\mathscr{C}_L$ possède un point L-rationnel.

Le principe est le suivant : s'il existe un k-variété X dans $\mathscr{C}_k$ qui ne possède pas de point rationnel, on remplace k par le corps des fonctions de cette variété. Et on itère. Je renvoie à l'article de Ducros [23] pour la construction précise, qui est reprise dans [14] et [10].

Prenons pour $\mathscr{C}_K$ la classe des K-variétés géométriquement intègres. Rappelons qu'un corps L est dit *pseudo-algébriquement clos* (PAC) si toute L-variété géométriquement intègre sur L possède un L-point. La construction ci-dessus montre que tout corps k de caractéristique zéro est algébriquement fermé dans un corps pseudo-algébriquement clos.

En prenant pour $\mathscr{C}_K$ la classe des K-variétés birationnelles à des fibrations successives de restrictions à la Weil de variétés de Severi-Brauer, Ducros [23] montre que tout corps k de caractéristique zéro est algébriquement fermé dans un corps L de dimension cohomologique $cd(L) \leq 1$.

3 Schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète

3.1 A-schémas de type (R), croisements normaux, croisements normaux stricts

Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, F son corps résiduel. Soit π une uniformisante de A.

Dans la suite de ce texte, on dira qu'un A-schéma $\mathscr{X}$ *est de type* (R) s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) Le A-schéma $\mathscr{X}$ est propre et plat sur A.
(ii) Le schéma $\mathscr{X}$ est connexe et régulier.
(iii) La fibre générique $X = \mathscr{X} \times_A K = \mathscr{X}_K$ est une K-variété géométriquement intègre lisse sur F.

On note $K(X)$ le corps des fonctions de X, qui est aussi celui du schéma $\mathscr{X}$. On note $Y = \mathscr{X} \times_A F = \mathscr{X}_F$ la fibre spéciale de $\mathscr{X}/A$. La fibre spéciale Y est le F-schéma associé au diviseur de Cartier de $\mathscr{X}$ défini par l'annulation de π.

Comme $\mathscr{X}$ est régulier donc normal, on a une décomposition de diviseurs de Weil
$$Y = \sum_i n_i Y_i$$
où les Y_i sont les adhérences des points x_i de codimension 1 de $\mathscr{X}$ situés sur la fibre spéciale. L'anneau local de tout tel point x_i est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $K(X)$. Si l'on note v_i la valuation sur le corps $K(X)$ associée à un tel x_i, alors $n_i = v_i(\pi)$.

Comme $\mathscr{X}$ est régulier, les Y_i sont des diviseurs de Cartier sur $\mathscr{X}$. Ce sont les composantes réduites de la fibre spéciale. Ce sont des F-variétés intègres mais non nécessairement géométriquement irréductibles ni (si le corps F n'est pas parfait) nécessairement géométriquement réduites.

On dit que $Y \subset \mathscr{X}$ *est à croisements normaux* si partout localement pour la topologie étale sur $\mathscr{X}$ l'inclusion $Y \subset \mathscr{X}$ est donnée par une équation $\prod_{i \in I} x_i^{n_i}$, où les x_i font partie d'un système régulier de paramètres et les n_i sont des entiers naturels.

On dit que $Y \subset \mathscr{X}$ *est à croisements normaux stricts* si la fibre $Y \subset \mathscr{X}$ est à croisements normaux et si de plus chaque composante réduite Y_i de Y est une F-variété (intègre) lisse. Une telle composante n'est pas nécessairement géométriquement irréductible.

On note A^h le hensélisé de A, et l'on note A^{sh} un hensélisé strict de A. On note K^h le corps des fractions de A^h et K^{sh} le corps des fractions de A^{sh}. Les inclusions $A \subset A^h \subset A^{sh}$ induisent $F = F \subset F_s$ sur les corps résiduels, où F_s est une clôture séparable de F.

On note $\hat{A}$ le complété de A. Si les corps K et F ont même caractéristique, alors il existe un corps de représentants de F dans $\hat{A}$: il existe un isomorphisme $\hat{A} \simeq F[[t]]$.

3.2 *Quand la fibre spéciale a une composante de multiplicité 1*

Proposition 3.1 *Soit $\mathscr{X}$ un A-schéma de type (R). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe une composante réduite Y_i dont l'ouvert de lissité est non vide et qui satisfait $n_i = 1$.
(2) Il existe un ouvert $U \subset \mathscr{X}$ lisse et surjectif sur $\operatorname{Spec} A$.
(3) $\mathscr{X} \to \operatorname{Spec} A$ est localement scindé pour la topologie étale.
(4) $\mathscr{X}(A^{sh}) \neq \emptyset$.
(5) $X(K^{sh}) \neq \emptyset$.
(6) $\mathscr{X}(\widehat{A^{sh}}) \neq \emptyset$.
(7) $X(\widehat{K^{sh}}) \neq \emptyset$.

Démonstration. Laissée au lecteur.

Dans la situation ci-dessus, on dira que *Y a une composante de multiplicité 1.*[1]

Proposition 3.2 *(a) Soient $\mathscr{X}$ un A-schéma lisse connexe fidèlement plat sur A et $\mathscr{X}'/A$ un A-schéma de type (R). S'il existe une K-application rationnelle de $X = \mathscr{X}_K$ dans $X' = \mathscr{X}'_K$, alors la fibre spéciale Y' de $\mathscr{X}'/A$ a une composante de multiplicité 1.*

(b) Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ deux A-schémas de type (R). Si les fibres génériques $X = \mathscr{X}_K$ et $X' = \mathscr{X}'_K$ sont K-birationnellement équivalentes, alors la fibre spéciale Y de $\mathscr{X}$

[1] La terminologie adoptée dans ce texte diffère de celle de [5].