

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1147

Mario Wschebor

Surfaces Aléatoires

Mesure Géométrique des Ensembles de Niveau



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1147

Mario Wschebor

Surfaces Aléatoires

Mesure Géométrique des Ensembles de Niveau



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Auteur

Mario Wschebor
Universidad Simon Bolivar
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal No. 80659
Caracas, Venezuela

Mathematics Subject Classification (1980): 60G60, 60D05

ISBN 3-540-15688-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo

ISBN 0-387-15688-7 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek. Wschebor, Mario: Surfaces aléatoires: mesure géométr. des ensembles de niveau / Mario Wschebor. - Berlin: Heidelberg; New York: Springer, 1985. (Lectures notes in mathematics; Vol. 1147)

ISBN 3-540-15688-7 (Berlin...)

ISBN 0-387-15688-7 (New York. ...)

NE: GT

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to "Verwertungsgesellschaft Wort", Munich.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1985
Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–952 please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 953: Iterative Solution of Nonlinear Systems of Equations. Proceedings, 1982. Edited by R. Ansorge, Th. Meis, and W. Törnig. VII, 202 pages. 1982.

Vol. 954: S.G. Pandit, S.G. Deo, Differential Systems Involving Impulses. VII, 102 pages. 1982.

Vol. 955: G. Gierz, Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality. IV, 296 pages. 1982.

Vol. 956: Group Actions and Vector Fields. Proceedings, 1981. Edited by J.B. Carrell. V, 144 pages. 1982.

Vol. 957: Differential Equations. Proceedings, 1981. Edited by D.G. de Figueiredo. VIII, 301 pages. 1982.

Vol. 958: F.R. Beyl, J. Tappe, Group Extensions, Representations, and the Schur Multiplier. IV, 278 pages. 1982.

Vol. 959: Géométrie Algébrique Réelle et Formes Quadratiques, Proceedings, 1981. Edité par J.-L. Colliot-Thélène, M. Coste, L. Mahé, et M.-F. Roy. X, 458 pages. 1982.

Vol. 960: Multigrid Methods. Proceedings, 1981. Edited by W. Hackbusch and U. Trottenberg. VII, 652 pages. 1982.

Vol. 961: Algebraic Geometry. Proceedings, 1981. Edited by J.M. Aroca, R. Buchweitz, M. Giusti, and M. Merle. X, 500 pages. 1982.

Vol. 962: Category Theory. Proceedings, 1981. Edited by K.H. Kampé D. Pumplin, and W. Tholen. XV, 322 pages. 1982.

Vol. 963: R. Nottrot, Optimal Processes on Manifolds. VI, 124 pages. 1982.

Vol. 964: Ordinary and Partial Differential Equations. Proceedings, 1982. Edited by W.N. Everitt and B.D. Sleeman. XVIII, 726 pages. 1982.

Vol. 965: Topics in Numerical Analysis. Proceedings, 1981. Edited by P.R. Turner. IX, 202 pages. 1982.

Vol. 966: Algebraic K-Theory. Proceedings, 1980, Part I. Edited by R.K. Dennis. VIII, 407 pages. 1982.

Vol. 967: Algebraic K-Theory. Proceedings, 1980, Part II. VIII, 409 pages. 1982.

Vol. 968: Numerical Integration of Differential Equations and Large Linear Systems. Proceedings, 1980. Edited by J. Frazee. VI, 412 pages. 1982.

Vol. 969: Combinatorial Theory. Proceeding 1982. Edited by D. Jungnickel and K. Vedder. V, 326 pages. 1982.

Vol. 970: Twistor Geometry and Non-Linear Systems. Proceedings, 1980. Edited by H.-D. Doebner and T.D. Paley. V, 216 pages. 1982.

Vol. 971: Kleinian Groups and Related Topics. Proceedings, 1981. Edited by D.M. Gallo and R.M. Porter. V, 117 pages. 1983.

Vol. 972: Nonlinear Filtering and Stochastic Control. Proceedings, 1981. Edited by S.K. Mitter and A. Moro. VIII, 297 pages. 1983.

Vol. 973: Matrix Pencils. Proceedings, 1982. Edited by B. Kågström and A. Ruhe. XI, 293 pages. 1983.

Vol. 974: A. Draux, Polynômes Orthogonaux Formels – Applications. VI, 625 pages. 1983.

Vol. 975: Radical Banach Algebras and Automatic Continuity. Proceedings, 1981. Edited by J.M. Bachar, W.G. Bade, P.C. Curtis Jr., H.G. Dales and M.P. Thomas. VIII, 470 pages. 1983.

Vol. 976: X. Fernique, P.W. Millar, D.W. Stroock, M. Weber, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XI – 1981. Edited by P.L. Hennequin. XI, 465 pages. 1983.

Vol. 977: T. Parthasarathy, On Global Univalence Theorems. VIII, 106 pages. 1983.

Vol. 978: J. Ławrynowicz, J. Krzyż, Quasiconformal Mappings in the Plane. VI, 177 pages. 1983.

Vol. 979: Mathematical Theories of Optimization. Proceedings, 1981. Edited by J.P. Ceaconi and T. Zolezzi. V, 268 pages. 1983.

Vol. 980: L. Breen, Fonctions thêta et théorème du cube. XIII, 115 pages. 1983.

Vol. 981: Value Distribution Theory. Proceedings, 1981. Edited by I. Laine and S. Rickman. VIII, 245 pages. 1983.

Vol. 982: Stability Problems for Stochastic Models. Proceedings, 1982. Edited by V.V. Kalashnikov and V.M. Zolotarev. XVII, 295 pages. 1983.

Vol. 983: Nonstandard Analysis-Recent Developments. Edited by A.E. Hurd. V, 213 pages. 1983.

Vol. 984: A. Bove, J.E. Lewis, C. Parenti, Propagation of Singularities for Fuchsian Operators. IV, 161 pages. 1983.

Vol. 985: Asymptotic Analysis II. Edited by F. Verhulst. VI, 497 pages. 1983.

Vol. 986: Séminaire de Probabilités XVII 1981/82. Proceedings. Edited by J. Azéma and M. Yor. V, 512 pages. 1983.

Vol. 987: C.J. Bushnell, A. Fröhlich, Gauss Sums and p-adic Division Algebras. XI, 187 pages. 1983.

Vol. 988: J. Schwermer, Kohomologie arithmetisch definierter Gruppen und Eisensteinreihen. III, 170 pages. 1983.

Vol. 989: A.B. Mingarelli, Volterra-Stieltjes Integral Equations and Generalized Ordinary Differential Expressions. XIV, 318 pages. 1983.

Vol. 990: Probability in Banach Spaces IV. Proceedings, 1982. Edited by A. Beck and K. Jacobs. V, 234 pages. 1983.

Vol. 991: Banach Space Theory and its Applications. Proceedings, 1981. Edited by A. Pietsch, N. Popa and I. Singer. X, 302 pages. 1983.

Vol. 992: Harmonic Analysis, Proceedings, 1982. Edited by G. Mauceri, F. Ricci and G. Weiss. X, 449 pages. 1983.

Vol. 993: R.D. Bourgin, Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property. XII, 474 pages. 1983.

Vol. 994: J.-L. Journé, Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón. VI, 129 pages. 1983.

Vol. 995: Banach Spaces, Harmonic Analysis, and Probability Theory. Proceedings, 1980–1981. Edited by R.C. Blei and S.J. Sidney. V, 173 pages. 1983.

Vol. 996: Invariant Theory. Proceedings, 1982. Edited by F. Gherardelli. V, 159 pages. 1983.

Vol. 997: Algebraic Geometry – Open Problems. Edited by C. Ciliberto, F. Ghione and F. Orecchia. VIII, 411 pages. 1983.

Vol. 998: Recent Developments in the Algebraic, Analytical, and Topological Theory of Semigroups. Proceedings, 1981. Edited by K.H. Hofmann, H. Jürgensen and H. J. Weinert. VI, 486 pages. 1983.

Vol. 999: C. Preston, Iterates of Maps on an Interval. VII, 205 pages. 1983.

Vol. 1000: H. Hopf, Differential Geometry in the Large. VII, 184 pages. 1983.

Vol. 1001: D.A. Hejhal, The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$. Volume 2. VIII, 806 pages. 1983.

Vol. 1002: A. Edrei, E.B. Saff, R.S. Varga, Zeros of Sections of Power Series. VIII, 115 pages. 1983.

Vol. 1003: J. Schmets, Spaces of Vector-Valued Continuous Functions. VI, 117 pages. 1983.

Vol. 1004: Universal Algebra and Lattice Theory. Proceedings, 1982. Edited by R.S. Freese and O.C. Garcia. VI, 308 pages. 1983.

Vol. 1005: Numerical Methods. Proceedings, 1982. Edited by V. Pereyra and A. Reinoza. V, 296 pages. 1983.

Vol. 1006: Abelian Group Theory. Proceedings, 1982/83. Edited by R. Göbel, L. Lady and A. Mader. XVI, 771 pages. 1983.

Vol. 1007: Geometric Dynamics. Proceedings, 1981. Edited by J. Palis Jr. IX, 827 pages. 1983.

INTRODUCTION

Soit $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus stochastique à d -paramètres réels et à valeurs réelles. Nous allons étudier un certain nombre de problèmes liés aux ensembles de niveau des trajectoires :

$$C_u^X = \{t : X(t) = u\}.$$

Sous des conditions de régularité nous pouvons définir la mesure (aléatoire) d'aire $(d-1)$ -dimensionnelle de cet ensemble (nombre des points si $d = 1$, longueur de courbe si $d = 2$, aire de 2-surface si $d = 3$ et ainsi de suite) et calculer ses moments par des formules intégrales, dans le même sens que ce qui a été fait dans le cas $d = 1$, à partir des travaux de pionnier de S.O. Rice ([R2]) de 1944-45.

Or, dans le cas général il nous faut d'abord bien définir cette mesure, avoir des outils pour pouvoir l'estimer de façon convenable et étudier ses principales propriétés. Ceci est fait dans le chapitre 1, basé sur des idées développées par E. De Giorgi ([D 2],[D 3]).

Dans le chapitre 2 nous abordons la question du comportement local des trajectoires d'une surface aléatoire près d'un niveau donné, qui est étroitement liée à la géométrie de l'ensemble de niveau. La démonstration du Théorème 4 de ce chapitre dépend de façon essentielle des propriétés géométriques fines des périmètres définis au chapitre 1.

Dans le chapitre 3 nous exposons les résultats principaux, à savoir les formules de type Rice pour les moments des variables aléatoires $Q_T(A_U^X)$ (cf. chapitre 1 pour la définition).

Dans le cas $d = 1$ on retrouve bien sûr les formules classiques exposées, par exemple, dans [C5] pour les processus gaussiens stationnaires et [M2] en général.

Dans le cas $d > 1$, la formule pour le premier moment de $Q_T(A_U^X)$ a été connue pour certains processus gaussiens stationnaires avec des trajectoires suffisamment régulières déjà par M.S. Longuet-Higgins dans [L3] et démontrée aussi dans [B5] et [W3]. Un problème apparenté est considéré dans [Z1].

Sauf pour certaines situations particulières mentionnées de façon expresse, nous nous sommes en général placés dans le cadre des processus qui p.s. ont des trajectoires qui sont des fonctions de classe C^1 . Les formules de Rice ont été démontrées sous des conditions un peu plus générales dans le cas $d = 1$ dans [B6] et [M2]. Néanmoins, puisque nous serons surtout intéressés au cas $d > 1$, nous restons dans des conditions qui, avec les techniques que nous allons employer, sont celles qui s'adaptent mieux aux "vraies" surfaces (i.e. au cas $d > 1$).

Le chapitre 4 décrit un exemple d'application des méthodes exposées avant, à l'approximation du temps local du processus de Wiener à d paramètres ($d \geq 1$).

En général le choix des sujets reflète plutôt les intérêts récents de l'auteur qu'une vue d'ensemble sur la théorie des surfaces aléatoires. Il s'agit aussi du développement de méthodes de calcul qui soient indépendantes d'un ordre préfixé sur l'espace paramétrique, qui, en général, n'est pas donné de façon naturelle. Un texte équilibré devrait contenir -entre autres- certains aspects de la description géométrique des ensembles de niveau des surfaces aléatoires qui ne sont pas mentionnés ici (voir, par exemple, [A2], [B4], [W2] et références citées). Aussi, l'étude de l'intégration stochastique à plusieurs paramètres et les sujets qui lui sont liés ([C2], [G1], [I2]).

Dans cette monographie nous avons inclu très peu d'exemples et d'applications. En particulier, nous allons revenir ailleurs sur les applications de la théorie exposée ici à divers problèmes de statistique, notamment à des questions de modélisation de phénomènes naturels.

Le texte est une version corrigée du cours que j'ai fait au Laboratoire de Mathématique d'Orsay en mai-juin 83. Je tiens à remercier J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle et aux autres membres de l'équipe de statistique qu'ils dirigent par l'excellent climat technique et humain dont j'ai pu profiter pendant mon séjour de l'année 1983. Spécialement à Dominique Picard qui a lu une première version du manuscrit et fait des observations qui ont contribué à l'améliorer et à Nicole Parvan et Anne-Marie Baillet pour leur impeccable travail de secrétariat.

Mario Wschebor

- Vol. 1008: Algebraic Geometry. Proceedings, 1981. Edited by J. Dolgachev. V, 138 pages. 1983.
- Vol. 1009: T.A. Chapman, Controlled Simple Homotopy Theory and Applications. III, 94 pages. 1983.
- Vol. 1010: J.-E. Dies, Chaînes de Markov sur les permutations. IX, 226 pages. 1983.
- Vol. 1011: J.M. Sigal, Scattering Theory for Many-Body Quantum Mechanical Systems. IV, 132 pages. 1983.
- Vol. 1012: S. Kantorovitz, Spectral Theory of Banach Space Operators. V, 179 pages. 1983.
- Vol. 1013: Complex Analysis – Fifth Romanian-Finnish Seminar. Part 1. Proceedings, 1981. Edited by C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu and I. Suciu. XX, 393 pages. 1983.
- Vol. 1014: Complex Analysis – Fifth Romanian-Finnish Seminar. Part 2. Proceedings, 1981. Edited by C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu and I. Suciu. XX, 334 pages. 1983.
- Vol. 1015: Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe – II. Seminar. Edited by R. Gérard et J.P. Ramis. V, 411 pages. 1983.
- Vol. 1016: Algebraic Geometry. Proceedings, 1982. Edited by M. Raynaud and T. Shioda. VIII, 528 pages. 1983.
- Vol. 1017: Equadiff 82. Proceedings, 1982. Edited by H.W. Knobloch and K. Schmitt. XXIII, 666 pages. 1983.
- Vol. 1018: Graph Theory, Łagów 1981. Proceedings, 1981. Edited by M. Borowiecki, J.W. Kennedy and M.M. Sysło. X, 289 pages. 1983.
- Vol. 1019: Cabal Seminar 79–81. Proceedings, 1979–81. Edited by A.S. Kechris, D.A. Martin and Y.N. Moschovakis. V, 284 pages. 1983.
- Vol. 1020: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups. Proceedings, 1982. Edited by J. Carmona and M. Vergne. V, 187 pages. 1983.
- Vol. 1021: Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings, 1982. Edited by K. Itô and J.V. Prokhorov. VIII, 747 pages. 1983.
- Vol. 1022: G. Gentili, S. Salamon and J.-P. Vigué, Geometry Seminar "Luigi Bianchi", 1982. Edited by E. Vesentini. VI, 177 pages. 1983.
- Vol. 1023: S. McAdam, Asymptotic Prime Divisors. IX, 118 pages. 1983.
- Vol. 1024: Lie Group Representations I. Proceedings, 1982–1983. Edited by R. Herb, R. Lipsman and J. Rosenberg. IX, 369 pages. 1983.
- Vol. 1025: D. Tarré, Homotopie Rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan. X, 211 pages. 1983.
- Vol. 1026: W. Plesken, Group Rings of Finite Groups Over p -adic Integers. V, 151 pages. 1983.
- Vol. 1027: M. Hasumi, Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces. XII, 280 pages. 1983.
- Vol. 1028: Séminaire d'Analyse P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda. Années 1981/1983. Edité par P. Lelong, P. Dolbeault et H. Skoda. VIII, 328 pages. 1983.
- Vol. 1029: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1982. Edité par M.-P. Malliavin. V, 339 pages. 1983.
- Vol. 1030: U. Christian, Selberg's Zeta-, L, and Eisensteinseries. XII, 196 pages. 1983.
- Vol. 1031: Dynamics and Processes. Proceedings, 1981. Edited by Ph. Blanchard and L. Streit. IX, 213 pages. 1983.
- Vol. 1032: Ordinary Differential Equations and Operators. Proceedings, 1982. Edited by W.N. Everitt and R.T. Lewis. XV, 521 pages. 1983.
- Vol. 1033: Measure Theory and its Applications. Proceedings, 1982. Edited by J.M. Belley, J. Dubois and P. Morales. XV, 317 pages. 1983.
- Vol. 1034: J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces. V, 222 pages. 1983.
- Vol. 1035: The Mathematics and Physics of Disordered Media. Proceedings, 1983. Edited by B.D. Hughes and B.W. Ninham. VII, 432 pages. 1983.
- Vol. 1036: Combinatorial Mathematics X. Proceedings, 1982. Edited by L.R.A. Casse. XI, 419 pages. 1983.
- Vol. 1037: Non-linear Partial Differential Operators and Quantization Procedures. Proceedings, 1981. Edited by S.I. Andersson and H.-D. Doebner. VII, 334 pages. 1983.
- Vol. 1038: F. Borceux, G. Van den Bossche, Algebra in a Localic Topos with Applications to Ring Theory. IX, 240 pages. 1983.
- Vol. 1039: Analytic Functions, Błażejewko 1982. Proceedings. Edited by J. Ławrynowicz. X, 494 pages. 1983.
- Vol. 1040: A. Good, Local Analysis of Selberg's Trace Formula. III, 128 pages. 1983.
- Vol. 1041: Lie Group Representations II. Proceedings 1982–1983. Edited by R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman and J. Rosenberg. IX, 340 pages. 1984.
- Vol. 1042: A. Gut, K.D. Schmidt, Amarts and Set Function Processes. III, 258 pages. 1983.
- Vol. 1043: Linear and Complex Analysis Problem Book. Edited by V.P. Havin, S.V. Hruščev and N.K. Nikol'skii. XVIII, 721 pages. 1984.
- Vol. 1044: E. Gekeler, Discretization Methods for Stable Initial Value Problems. VIII, 201 pages. 1984.
- Vol. 1045: Differential Geometry. Proceedings, 1982. Edited by A.M. Naveira. VIII, 194 pages. 1984.
- Vol. 1046: Algebraic K-Theory, Number Theory, Geometry and Analysis. Proceedings, 1982. Edited by A. Bak. IX, 464 pages. 1984.
- Vol. 1047: Fluid Dynamics. Seminar, 1982. Edited by H. Beirão da Veiga. VII, 193 pages. 1984.
- Vol. 1048: Kinetic Theories and the Boltzmann Equation. Seminar, 1981. Edited by C. Cercignani. VII, 248 pages. 1984.
- Vol. 1049: B. Iochum, Cônes autopolaires et algèbres de Jordan. VI, 247 pages. 1984.
- Vol. 1050: A. Prestel, P. Roquette, Formally p -adic Fields. V, 167 pages. 1984.
- Vol. 1051: Algebraic Topology, Aarhus 1982. Proceedings. Edited by I. Madsen and B. Oliver. X, 665 pages. 1984.
- Vol. 1052: Number Theory. Seminar, 1982. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 309 pages. 1984.
- Vol. 1053: P. Hilton, Nilpotente Gruppen und nilpotente Räume. V, 221 pages. 1984.
- Vol. 1054: V. Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. VII, 237 pages. 1984.
- Vol. 1055: Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes. Proceedings, 1982. Edited by L. Accardi, A. Frigerio and V. Gorini. VI, 411 pages. 1984.
- Vol. 1056: Algebraic Geometry. Bucharest 1982. Proceedings, 1982. Edited by L. Bădescu and D. Popescu. VII, 380 pages. 1984.
- Vol. 1057: Bifurcation Theory and Applications. Seminar, 1983. Edited by L. Salvadori. VII, 233 pages. 1984.
- Vol. 1058: B. Aulbach, Continuous and Discrete Dynamics near Manifolds of Equilibria. IX, 142 pages. 1984.
- Vol. 1059: Séminaire de Probabilités XVIII, 1982/83. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 518 pages. 1984.
- Vol. 1060: Topology. Proceedings, 1982. Edited by L.D. Faddeev and A.A. Mal'cev. VI, 389 pages. 1984.
- Vol. 1061: Séminaire de Théorie du Potentiel. Paris, No. 7. Proceedings. Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki. IV, 281 pages. 1984.

- Vol. 1062: J. Jost, Harmonic Maps Between Surfaces. X, 133 pages. 1984.
- Vol. 1063: Orienting Polymers. Proceedings, 1983. Edited by J.L. Ericksen. VII, 166 pages. 1984.
- Vol. 1064: Probability Measures on Groups VII. Proceedings, 1983. Edited by H. Heyer. X, 588 pages. 1984.
- Vol. 1065: A. Cuyt, Padé Approximants for Operators: Theory and Applications. IX, 138 pages. 1984.
- Vol. 1066: Numerical Analysis. Proceedings, 1983. Edited by D.F. Griffiths. XI, 275 pages. 1984.
- Vol. 1067: Yasuo Okuyama, Absolute Summability of Fourier Series and Orthogonal Series. VI, 118 pages. 1984.
- Vol. 1068: Number Theory, Noordwijkerhout 1983. Proceedings. Edited by H. Jager. V, 296 pages. 1984.
- Vol. 1069: M. Kreck, Bordism of Diffeomorphisms and Related Topics. III, 144 pages. 1984.
- Vol. 1070: Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis. Proceedings, 1983. Edited by M. Cwikel and J. Peetre. III, 239 pages. 1984.
- Vol. 1071: Padé Approximation and its Applications, Bad Honnef 1983. Proceedings. Edited by H. Werner and H.J. Bünger. VI, 264 pages. 1984.
- Vol. 1072: F. Rothe, Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems. V, 216 pages. 1984.
- Vol. 1073: Graph Theory, Singapore 1983. Proceedings. Edited by K. M. Koh and H. P. Yap. XIII, 335 pages. 1984.
- Vol. 1074: E. W. Stredulinsky, Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations. III, 143 pages. 1984.
- Vol. 1075: H. Majima, Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points. IX, 159 pages. 1984.
- Vol. 1076: Infinite-Dimensional Systems. Proceedings, 1983. Edited by F. Kappel and W. Schappacher. VII, 278 pages. 1984.
- Vol. 1077: Lie Group Representations III. Proceedings, 1982-1983. Edited by R. Herb, R. Johnson, R. Lipsman, J. Rosenberg. XI, 454 pages. 1984.
- Vol. 1078: A. J. E. M. Janssen, P. van der Steen, Integration Theory. V, 224 pages. 1984.
- Vol. 1079: W. Ruppert, Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. V, 260 pages. 1984.
- Vol. 1080: Probability Theory on Vector Spaces III. Proceedings, 1983. Edited by D. Szynal and A. Weron. V, 373 pages. 1984.
- Vol. 1081: D. Benson, Modular Representation Theory: New Trends and Methods. XI, 231 pages. 1984.
- Vol. 1082: C.-G. Schmidt, Arithmetik Abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation. X, 96 Seiten. 1984.
- Vol. 1083: D. Bump, Automorphic Forms on $GL(3, \mathbb{R})$. XI, 184 pages. 1984.
- Vol. 1084: D. Kletzing, Structure and Representations of Q-Groups. VI, 290 pages. 1984.
- Vol. 1085: G. K. Immink, Asymptotics of Analytic Difference Equations. V, 134 pages. 1984.
- Vol. 1086: Sensitivity of Functionals with Applications to Engineering Sciences. Proceedings, 1983. Edited by V. Komkov. V, 130 pages. 1984.
- Vol. 1087: W. Narkiewicz, Uniform Distribution of Sequences of Integers in Residue Classes. VIII, 125 pages. 1984.
- Vol. 1088: A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, J. A. Melamed, Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators. X, 175 pages. 1984.
- Vol. 1089: Measure Theory, Oberwolfach 1983. Proceedings. Edited by D. Kölzow and D. Maharam-Stone. XIII, 327 pages. 1984.
- Vol. 1090: Differential Geometry of Submanifolds. Proceedings, 1984. Edited by K. Kenmotsu. VI, 132 pages. 1984.
- Vol. 1091: Multifunctions and Integrands. Proceedings, 1983. Edited by G. Salinetti. V, 234 pages. 1984.
- Vol. 1092: Complete Intersections. Seminar, 1983. Edited by S. Greco and R. Strano. VII, 299 pages. 1984.
- Vol. 1093: A. Prestel, Lectures on Formally Real Fields. XI, 125 pages. 1984.
- Vol. 1094: Analyse Complexe. Proceedings, 1983. Edité par E. Amar, R. Gay et Nguyen Thanh Van. IX, 184 pages. 1984.
- Vol. 1095: Stochastic Analysis and Applications. Proceedings, 1983. Edited by A. Truman and D. Williams. V, 199 pages. 1984.
- Vol. 1096: Théorie du Potentiel. Proceedings, 1983. Edité par G. Mokobodzki et D. Pinchon. IX, 601 pages. 1984.
- Vol. 1097: R. M. Dudley, H. Kunita, F. Ledrappier, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII - 1982. Edité par P. L. Hennequin. X, 396 pages. 1984.
- Vol. 1098: Groups - Korea 1983. Proceedings. Edited by A. C. Kim and B. H. Neumann. VII, 183 pages. 1984.
- Vol. 1099: C. M. Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms. XIII, 376 pages. 1984.
- Vol. 1100: V. Ivrii, Precise Spectral Asymptotics for Elliptic Operators Acting in Fiberings over Manifolds with Boundary. V, 237 pages. 1984.
- Vol. 1101: V. Cossart, J. Giraud, U. Orbanz, Resolution of Surface Singularities. VII, 132 pages. 1984.
- Vol. 1102: A. Verona, Stratified Mappings - Structure and Triangulability. IX, 160 pages. 1984.
- Vol. 1103: Models and Sets. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part I. Edited by G. H. Müller and M. M. Richter. VIII, 484 pages. 1984.
- Vol. 1104: Computation and Proof Theory. Proceedings, Logic Colloquium, 1983, Part II. Edited by M. M. Richter, E. Börger, W. Oberschelp, B. Schinzel and W. Thomas. VIII, 475 pages. 1984.
- Vol. 1105: Rational Approximation and Interpolation. Proceedings, 1983. Edited by P. R. Graves-Morris, E. B. Saff and R. S. Varga. XII, 528 pages. 1984.
- Vol. 1106: C. T. Chong, Techniques of Admissible Recursion Theory. IX, 214 pages. 1984.
- Vol. 1107: Nonlinear Analysis and Optimization. Proceedings, 1982. Edited by C. Vinti. V, 224 pages. 1984.
- Vol. 1108: Global Analysis - Studies and Applications I. Edited by Yu. G. Borisovich and Yu. E. Gliklikh. V, 301 pages. 1984.
- Vol. 1109: Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems. Proceedings, 1983. Edited by S. Albeverio, P. Combe and M. Sirugue-Collin. IX, 227 pages. 1985.
- Vol. 1110: R. Jajte, Strong Limit Theorems in Non-Commutative Probability. VI, 152 pages. 1985.
- Vol. 1111: Arbeitstagung Bonn 1984. Proceedings. Edited by F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter. V, 481 pages. 1985.
- Vol. 1112: Products of Conjugacy Classes in Groups. Edited by Z. Arad and M. Herzog. V, 244 pages. 1985.
- Vol. 1113: P. Antosik, C. Swartz, Matrix Methods in Analysis. IV, 114 pages. 1985.
- Vol. 1114: Zahlentheoretische Analysis. Seminar. Herausgegeben von E. Hlawka. V, 157 Seiten. 1985.
- Vol. 1115: J. Moulin Ollagnier, Ergodic Theory and Statistical Mechanics. VI, 147 pages. 1985.
- Vol. 1116: S. Stolz, Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder. XXIII, 134 Seiten. 1985.

- Vol. 1117: D.J. Aldous, J.A. Ibragimov, J. Jacod, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII – 1983. Edité par P.L. Hennequin. IX, 409 pages. 1985.
- Vol. 1118: Grossissements de filtrations: exemples et applications. Séminaire, 1982/83. Edité par Th. Jeulin et M. Yor. V, 315 pages. 1985.
- Vol. 1119: Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Proceedings, 1984. Edited by I. Capuzzo Dolcetta, W.H. Fleming and T. Zolezzi. VI, 202 pages. 1985.
- Vol. 1120: K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras. V, 118 pages. 1985.
- Vol. 1121: Singularities and Constructive Methods for Their Treatment. Proceedings, 1983. Edited by P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman. IX, 346 pages. 1985.
- Vol. 1122: Number Theory. Proceedings, 1984. Edited by K. Alladi. VII, 217 pages. 1985.
- Vol. 1123: Séminaire de Probabilités XIX 1983/84. Proceedings. Edité par J. Azéma et M. Yor. IV, 504 pages. 1985.
- Vol. 1124: Algebraic Geometry, Sitges (Barcelona) 1983. Proceedings. Edited by E. Casas-Alvero, G.E. Welters and S. Xambó-Descamps. XI, 416 pages. 1985.
- Vol. 1125: Dynamical Systems and Bifurcations. Proceedings, 1984. Edited by B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens. V, 129 pages. 1985.
- Vol. 1126: Algebraic and Geometric Topology. Proceedings, 1983. Edited by A. Ranicki, N. Levitt and F. Quinn. V, 523 pages. 1985.
- Vol. 1127: Numerical Methods in Fluid Dynamics. Edited by F. Brezzi. VII, 333 pages. 1985.
- Vol. 1128: J. Elschner, Singular Ordinary Differential Operators and Pseudodifferential Equations. 200 pages. 1985.
- Vol. 1129: Numerical Analysis, Lancaster 1984. Proceedings. Edited by P.R. Turner. XIV, 179 pages. 1985.
- Vol. 1130: Methods in Mathematical Logic. Proceedings, 1983. Edited by C.A. Di Prisco. VII, 407 pages. 1985.
- Vol. 1131: K. Sundaresan, S. Swaminathan, Geometry and Nonlinear Analysis in Banach Spaces. III, 116 pages. 1985.
- Vol. 1132: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory. Proceedings, 1983. Edited by H. Araki, C.C. Moore, Ş. Strătilă and C. Voiculescu. VI, 594 pages. 1985.
- Vol. 1133: K. C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. VI, 362 pages. 1985.
- Vol. 1134: G.P. Galdi, S. Rionero, Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity. VII, 126 pages. 1985.
- Vol. 1135: Number Theory. Seminar, 1983–1984. Edited by D.V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, H. Cohn and M. B. Nathanson. V, 283 pages. 1985.
- Vol. 1136: Quantum Probability and Applications II. Proceedings, 1984. Edited by L. Accardi and W. von Waldenfels. VI, 534 pages. 1985.
- Vol. 1137: Xiao G., Surfaces fibrées en courbes de genre deux. IX, 103 pages. 1985.
- Vol. 1138: A. Ocneanu, Actions of Discrete Amenable Groups on von Neumann Algebras. V, 115 pages. 1985.
- Vol. 1139: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1983. Edited by H. D. Doebner and J. D. Hennig. VI, 337 pages. 1985.
- Vol. 1140: S. Donkin, Rational Representations of Algebraic Groups. VII, 254 pages. 1985.
- Vol. 1141: Recursion Theory Week. Proceedings, 1984. Edited by H.-D. Ebbinghaus, G.H. Müller and G.E. Sacks. IX, 418 pages. 1985.
- Vol. 1142: Orders and their Applications. Proceedings, 1984. Edited by I. Reiner and K. W. Roggenkamp. X, 306 pages. 1985.
- Vol. 1143: A. Krieg, Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions. XIII, 203 pages. 1985.
- Vol. 1144: Knot Theory and Manifolds. Proceedings, 1983. Edited by D. Rolfsen. V, 163 pages. 1985.
- Vol. 1145: G. Winkler, Choquet Order and Simplices. VI, 143 pages. 1985.
- Vol. 1146: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1983–1984. Edité par M.-P. Malliavin. IV, 420 pages. 1985.
- Vol. 1147: M. Wschebor, Surfaces Aléatoires. VII, 111 pages. 1985.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE 1.</u> PÉRIMÈTRES D'ENSEMBLES BORÉLIENS DANS $\mathbb{R}^d$	11
<u>CHAPITRE 2.</u> EXISTENCE D'EXTREMA LOCAUX	12
2.1. Le cas gaussien	14
2.2. Le cas général	28
<u>CHAPITRE 3.</u> FORMULES DE RICE	28
3.1. Notations et hypothèses	31
3.2. Finitude des moments du nombre de passages par un niveau ($d = 1$)	37
3.3. Commentaires sur $H_{1,K}$ et $H_{2,K}$	39
3.4. Premier moment de $Q_T(A_u^X)$	51
3.5. Moments d'ordre supérieur de $Q_T(A_u^X)$	59
3.6. Remarques diverses sur les formules de Rice	88
<u>CHAPITRE 4.</u> APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL DU PROCESSUS DE WIENER À d -PARAMÈTRES	107
BIBLIOGRAPHIE	110
INDEX DES NOTATIONS	111
INDEX DES TERMES	

CHAPITRE 1

PÉRIMÈTRES D'ENSEMBLES BORÉLIENS DANS $\mathbb{R}^d$

Pour l'exposé de ce chapitre nous suivons de très près le livre de M. Miranda [M3].

DEFINITION.

Soient O un ensemble ouvert et B un borélien dans $\mathbb{R}^d$. Nous allons appeler "périmètre relatif de B par rapport à O " (fini ou infini) à :

$$(1) \quad Q_0(B) = \sup \left\{ \int_B \operatorname{div}(v(t)) dt : v \in (C_K^\infty(O))^d, \|v(t)\| \leq 1, t \in \mathbb{R}^d \right\}$$

où $(C_K^\infty(O))^d$ indique l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, de classe C^∞ et support compact contenu dans O , (dt) est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ - pour laquelle on va employer aussi parfois la notation $\mu_d(dt)$ - et $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

Nous allons énoncer les propriétés dont nous allons nous servir dans les chapitres suivants, et démontrer la plupart d'entre elles.

PROPOSITION 1.

O, O_i indiquent des ouverts, B, B_i des boréliens dans $\mathbb{R}^d$ et χ_B la fonction indicatrice de B .

- (i) $\mu_d(B_1 \Delta B_2) = 0 \Rightarrow Q_0(B_1) = Q_0(B_2).$
- (ii) $O_1 \subset O_2 \Rightarrow Q_{O_1}(B) \leq Q_{O_2}(B)$ et $O_n \uparrow O \Rightarrow Q_{O_n}(B) \uparrow Q_O(B).$
- (iii) $\bar{B} \subset O_1 \Rightarrow Q_0(B) = Q_{O \cap O_1}(B).$
- (iv) $\chi_{B_n} \rightarrow \chi_B \Rightarrow Q_0(B) \leq \liminf_n Q_0(B_n).$

La démonstration est immédiate, d'après la définition (1).

Nous allons employer la notation suivante : soit $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une approximation C^∞ de l'unité dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que pour chaque $\varepsilon > 0$, ψ_ε est une fonction de classe C^∞ , $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(t) dt = 1$, $\text{supp}(\psi_\varepsilon) \subset B(0; \varepsilon) = \{t : \|t\| < \varepsilon\}$.

Pour chaque fonction $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ nous allons poser :

$$g_\varepsilon(t) = (\psi_\varepsilon * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(t-s) g(s) ds.$$

PROPOSITION 2. (Estimation des périmètres).

Soient O un ouvert et B un borélien dans $\mathbb{R}^d$.

(a) Si $\{g_n\}$ est une suite uniformément bornée de fonctions réelles de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}^d$, telle que

$$g_n \rightarrow \chi_B \text{ p.p.,}$$

alors

$$(2) \quad Q_0(B) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0 \|\text{grad}(g_n(t))\| dt$$

(b) Si $0 < \varepsilon < \delta$, nous avons :

$$(3) \quad Q_0(B) \geq \int_{O_{-\delta}} \|\text{grad}(\chi_B)_\varepsilon(t)\| dt$$

où $O_{-\delta} = \{t : \text{dist}(t, O^c) > \delta\}$.

Démonstration.

(a) Supposons $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, de classe C^∞ , $\|v(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$ et $\text{supp}(v)$ compact et contenu dans O .

Alors

$$\int_B \text{div}(v(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(t) \text{div}(v(t)) dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (\text{grad}(g_n(t)), v(t)) dt;$$

((.,.) note le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$) en intégrant par parties.

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\text{grad}(g_n(t)), v(t))| dt \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\text{grad}(g_n(t))\| dt$$

et (2) se déduit de la définition du périmètre.

(b) Supposons v comme avant, sauf que, en plus, $\text{supp}(v) \subset 0_{-\delta}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (v(t), \text{grad}(\chi_B)_\epsilon(t)) dt &= \int_{\mathbb{R}^d} (v(t), \int_B \text{grad}(\psi_\epsilon(t-s)) ds) dt \\ &= \int_B \text{div}(w(s)) ds \end{aligned}$$

où

$$w(s) = - \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\epsilon(t-s) v(t) dt.$$

On a bien $w \in (C_K^\infty(\mathbb{R}^d))^d$, $\text{supp}(w) \subset 0$ - parce que $\text{supp}(v) \subset 0_{-\delta}$ et $\epsilon < \delta \Rightarrow \text{supp}(\psi_\epsilon) \subset B(0; \delta)$ - et aussi :

$$\|w(s)\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|v(t)\|^2 \psi_\epsilon(t-s) dt \leq 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}^d.$$

Donc,

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^d} (v(t), \text{grad}(\chi_B)_\epsilon(t)) dt \leq Q_0(B).$$

Un argument d'approximation montre que le deuxième membre de (3) peut être approché d'aussi près que l'on veut par des intégrales de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^d} (v(t), \text{grad}(\chi_B)_\epsilon(t)) dt$$

où $v \in (C_K^\infty(0_{-\delta}))^d$ et $\|v(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$. Donc, (4) implique (3).

Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ un borélien dans $\mathbb{R}^d$. On définit la "frontière essentielle" de B par

$$\tilde{\partial} B = \cap \left\{ \partial(B \Delta N), \mu_d(N) = 0 \right\},$$

∂ notant la frontière usuelle.

PROPOSITION 3. (Cas particuliers importants).

(a) Soit B une d -variété différentiable avec bord ∂B dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour chaque ouvert O , nous avons

$$(5) \quad Q_0(B) = \sigma_{d-1}(\partial B \cap O),$$

où σ_{d-1} indique la mesure d'aire ordinaire.

(b) Soit $d = 1$. Dans ce cas

$$(6) \quad Q_0(B) = \#(\tilde{\partial B} \cap 0).$$

Démonstration. Soit $v \in (C_K^\infty(0))^d$, $\|v(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$. D'après la formule de Green :

$$(7) \quad \int_B \operatorname{div}(v(t)) dt = \int_{\partial B \cap 0} (v(t), n(t)) d\sigma_{d-1}(t)$$

où $n(\cdot)$ note la normale unitaire à ∂B orientée vers l'extérieur de B .

Il s'ensuit que

$$\int_B \operatorname{div}(v(t)) dt \leq \sigma_{d-1}(\partial B \cap 0)$$

et donc, que

$$Q_0(B) \leq \sigma_{d-1}(\partial B \cap 0)$$

en utilisant la définition (1).

Pour prouver (5) on construit un champ vectoriel $v \in (C_K^\infty(0))^d$, $\|v(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$ et tel que le deuxième membre de (7) approxime $\sigma_{d-1}(\partial B \cap 0)$ d'arbitrairement près. Pour faire cela on observe qu'il suffit de faire l'approximation localement et ceci est possible en prenant pour $v(\cdot)$ une approximation de $n(\cdot)$ au voisinage de chaque point de $\partial B \cap 0$.

Pour démontrer (b), si $\tilde{\partial B} \cap 0$ est un ensemble fini, il suffit d'appliquer (a), quitte à remplacer B par un ensemble de la forme $B \Delta N$, $\mu_1(N) = 0$, ce qui ne change pas $Q_0(B)$ (cf. prop. 1, (i)).

Si $\tilde{\partial B} \cap 0$ est infini, nous pouvons raisonner de la manière suivante :
Pour chaque m ($m = 1, 2, \dots$) prenons m points $\tau_1, \dots, \tau_m$ appartenant à $\tilde{\partial B} \cap 0$ et m intervalles $I_1, \dots, I_m$, 2 à 2 disjoints, $\tau_i \in I_i$, $\operatorname{dist}(I_i, 0^c) \geq \delta > 0$ ($i = 1, \dots, m$).

D'après la proposition 2 (b),

$$\begin{array}{c} I_1 \quad I_2 \quad I_3 \\ \text{---} (\cdot) \text{---} (\cdot) \text{---} (\cdot) \text{---} \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \end{array}$$

nous avons pour $0 < \epsilon < \delta$:

$$Q_0(B) \geq \int_{0-\delta} |(\chi_B)'_\epsilon(t)| dt \geq \sum_{i=1}^m \int_{I_i} |(\chi_B)'_\epsilon(t)| dt.$$

Soit $\epsilon_n \rightarrow 0$ une suite telle que $(\chi_B)_{\epsilon_n} \rightarrow \chi_B$ presque partout.

Le fait que $\tau_i \in \tilde{\partial} B$ entraîne que $\mu_1(I_i \cap B) > 0$, $\mu_1(I_i \cap B^C) > 0$ ($i=1, \dots, m$) et nous pouvons choisir $t_i, t'_i \in I_i$ tels que (pour $i=1, \dots, m$) :

$$t_i \in B, \quad (\chi_B)_{\epsilon_n}(t_i) \rightarrow 1$$

$$t'_i \in B^C, \quad (\chi_B)_{\epsilon_n}(t'_i) \rightarrow 0.$$

Donc,

$$Q_0(B) \geq \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_i}^{t'_i} (\chi_B)'_{\epsilon_n}(t) dt \right| = \sum_{i=1}^m |(\chi_B)_{\epsilon_n}(t'_i) - (\chi_B)_{\epsilon_n}(t_i)| \xrightarrow{n} m.$$

Puisque m est quelconque, ceci prouve bien que $Q_0(B) = +\infty$.

PROPOSITION 4. (σ -sousadditivité de $Q_0(\cdot)$).

Si $\{E_n\}$ est une suite d'ensembles boréliens dans $\mathbb{R}^d$ et 0 un ouvert, on a :

$$(8) \quad Q_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q_0(E_n).$$

Démonstration. Nous prouvons d'abord que

$$(9) \quad Q_0(E_1 \cup E_2) \leq Q_0(E_1) + Q_0(E_2).$$

Considérons

$$g_\epsilon = (\chi_{E_1})_\epsilon + (\chi_{E_2})_\epsilon - (\chi_{E_1})_\epsilon (\chi_{E_2})_\epsilon$$

et une suite $\epsilon_n \rightarrow 0$ telle que :

$$g_{\epsilon_n} \rightarrow \chi_{E_1 \cup E_2} \text{ presque partout.}$$

D'après la Proposition 2 (a), pour chaque $\delta > 0$:

$$Q_{0-\delta}(E_1 \cup E_2) \leq \liminf \int_{0-\delta} \|\text{grad}(g_{\epsilon_n}(t))\| dt.$$

Or,

$$\text{grad}(g_\epsilon) = [(1 - (\chi_{E_2})_\epsilon)] \text{grad}((\chi_{E_1})_\epsilon) + [(1 - (\chi_{E_1})_\epsilon)] \text{grad}((\chi_{E_2})_\epsilon)$$

et puisque $0 \leq (\chi_{E_i})_\epsilon \leq 1$ ($i=1,2$), on conclut :

$$Q_{0-\delta}(E_1 \cup E_2) \leq \liminf \int_{0-\delta} [\|\text{grad}((\chi_{E_1})_{\epsilon_n})(t)\| + \|\text{grad}((\chi_{E_2})_{\epsilon_n})(t)\|] dt \\ \leq Q_0(E_1) + Q_0(E_2)$$

en utilisant la partie (b) de la Proposition 2.(9) découle alors, de la Proposition 1 (ii), en faisant $\delta \downarrow 0$.

Quant à (8), si $v \in (C_K^\infty(0))^d$, $\|v(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^d$, nous avons :

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \text{div}(v(t)) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{n=1}^N E_n} \text{div}(v(t)) dt \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} Q_0\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right) \\ \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N Q_0(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_0(E_n).$$

Exemple. Nous pouvons construire un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ de périmètre fini et dont le bord est irrégulier. En effet, soient $B(t_n; r_n)$ ($n=1,2,\dots$) des boules ouvertes contenues dans la boule unitaire de $\mathbb{R}^d$, la suite $\{t_n\}$ des centres étant dense dans $B(0;1)$ et celle des rayons vérifiant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{d-1} < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^d < 1.$$

Considérons l'ensemble ouvert

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(t_n; r_n).$$

D'après les Propositions 3 (a) et 4, $Q_{\mathbb{R}^d}(E) < \infty$.

Néanmoins, la frontière ∂E est irrégulière au point de vue topologique.

Plus précisément, $\partial E = B(0;1) \setminus E$ et en notant $c_d = \mu_d(B(0;1))$:

$$\mu_d(\partial E) \geq c_d \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} r_n^d\right) > 0.$$

Nous allons utiliser la proposition suivante dans la démonstration du Lemme 2 du chapitre 2. En fait l'égalité est p.p. vraie dans (10) ci-dessous, mais nous aurons besoin de l'inégalité énoncée seulement et nous en donnons une