

COLLECTION MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES POUR LA MAÎTRISE
SOUS LA DIRECTION DE P.G. CIARLET ET J.-L. LIONS

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

**P.A. RAVIART
J.M. THOMAS**



MASSON

INTRODUCTION
à l'
ANALYSE NUMÉRIQUE
des
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Dans la même collection :

Voir page 4 de couverture.

Dans la collection « Maîtrise de mathématiques pures » :

INTÉGRATION ET PROBABILITÉS. ANALYSE DE FOURIER ET ANALYSE SPECTRALE, par P. MALLIAVIN. 1982, 200 pages

INTÉGRATION ET PROBABILITÉS. ANALYSE DE FOURIER ET ANALYSE SPECTRALE. EXERCICES, par G. LETAC. 1982, 152 pages.

CALCUL DIFFÉRENTIEL, par A. AVEZ, 1983, 152 pages.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE CLASSIQUE, par J. E. BERTIN et M. J. BERTIN. 1981, 152 pages.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE CLASSIQUE. EXERCICES, par M.-P. MALLIAVIN et A. WARUSFEL. 1981, 128 pages.

LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS COMPLEXES, par M.-P. MALLIAVIN. 1981, 96 pages.

LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS COMPLEXES. EXERCICES, par J.-P. BÉZIVIN et A. LÉVY-BRUHL. 1982, 108 pages.

Autres ouvrages :

PROBLÈMES D'ANALYSE NUMÉRIQUE, avec rappels de cours. Années 1969-1978, par R. ARCAN-GELI, M. ARTOLA, J.-M. BLONDEL et J. GENET. 1980, 240 pages.

OPTIMISATION. Méthodes numériques, par A. AUSLENDER. 1976. 184 pages.

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, en physique et en mécanique des milieux continus, par S. COLOMBO. 1976, 196 pages.

COURS DE MATHÉMATIQUES. Tome 2, équations différentielles et aux dérivées partielles. Optimisation. Groupes de transformations. Méthodes numériques, par J. BASS. 5^e édition, 1978, 480 pages.

FORTRAN 77. Langage Fortran V, par P. LIGNELET. 1982, 288 pages.

Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise

Sous la direction de P. G. CIARLET et J. L. LIONS

P. A. RAVIART

Université Pierre et Marie Curie

J. M. THOMAS

Université de Pau et des Pays de l'Adour

INTRODUCTION

à l'

ANALYSE NUMÉRIQUE

des

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1983

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© *Masson, Paris, 1983*

ISBN: 2-225-75670-8

MASSON S.A.
MASSON PUBLISHING USA Inc.
TORAY-MASSON S.A.
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.
MASSON EDITORES
EDITORIA MASSON DO BRASIL LTDA

120 bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
133 East 58th Street, New York, N.Y. 10022
Balme 151, Barcelona 8
Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano
Dakota 383, Colonia Napoles, Mexico 18 DF
Rua Dr Cesario Motta Jr 61, 01221 Sao Paulo

PRÉSENTATION DE LA COLLECTION “MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES POUR LA MAÎTRISE”

La Collection *Mathématiques appliquées pour la maîtrise* a pour but de présenter les principales théories mathématiques générales directement orientées vers les applications, de les développer de manière rigoureuse, et d'indiquer explicitement et avec précision la très grande variété de leurs applications.

Des *théories mathématiques générales orientées vers les applications* sont, notamment, les fondements de l'analyse des *équations différentielles et aux dérivées partielles*, linéaires ou non, qui “gouvernent” tellement de situations en Physique, en Mécanique, en Chimie, etc., et jusqu'en Économétrie! Ce sont aussi les outils principaux de l'*Analyse Numérique*, préalables obligés au traitement sur ordinateur : analyse numérique matricielle, méthodes de l'optimisation, méthodes de différences finies ou d'éléments finis pour l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles ; c'est aussi la *Statistique*, dont les applications sont universelles, et où l'ordinateur a apporté, là encore, une impulsion nouvelle considérable ; c'est aussi la *Mécanique des Solides* et la *Mécanique des Fluides* dont une connaissance déjà sérieuse est indispensable à tout mathématicien appliqué.

Ces théories générales sont, dans la Collection, développées de manière rigoureuse, par le biais des solutions les plus synthétiques, les plus élégantes et les plus “confirmées” ; elle fournissent ainsi tous les outils nécessaires pour aborder la grande majorité des problèmes posés quotidiennement par les applications. Les théories générales présentées dans cette Collection ont d'ailleurs été élaborées pour faire face précisément aux *applications*, c'est-à-dire à des problèmes posés dans des disciplines parfois très éloignées des mathématiques mais néanmoins susceptibles d'être formalisés de façon mathématique.

Ces mêmes théories devraient également servir de point de départ pour l'étude des *nouveaux* problèmes posés par les applications ; il est en effet essentiel de savoir que ces nouveaux problèmes, d'importance fondamentale, se présentent sous la forme de questions complètement “ouvertes”. Après le préalable d'une modélisation mathématique souvent déjà imparfaite, la *seule* façon de les aborder réside alors dans un traitement “massif” sur ordinateur, à l'aide *précisément des méthodes et des outils fondamentaux présentés dans cette Collection*.

C'est pourquoi cette Collection qui, s'adresse à tous les étudiants du Deuxième Cycle de Mathématiques dites “appliquées”, mais aussi (au moins pour certains de ses volumes) aux étudiants du Deuxième Cycle de Mathématiques dites “pures”, de Mécanique, de Physique, aux élèves des Grandes Ecoles d'Ingénieurs, ...,

devrait non seulement initier ses lecteurs à des théories rigoureuses et élégantes, tout en leur fournissant un outil déjà utilisable dans de très nombreuses applications, mais aussi, nous l'espérons, leur donner le désir d'aller bien au-delà.

Pour l'accueil compréhensif qu'elle a bien voulu réserver à cette Collection, il nous est particulièrement agréable de remercier la maison Masson, en la personne notamment de M. J. F. Le Grand. Nous tenons également à remercier bien vivement M. A. Warusfel, dont l'activité et le dévouement ont beaucoup contribué à la conception et à l'élaboration de cette Collection.

P. G. CIARLET J. L. LIONS

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	9
1. Espaces de Sobolev	11
1.1. Rappels sur les distributions	11
1.2. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	14
1.3. Un théorème de trace	19
1.4. Applications du théorème de trace	25
1.5. Un résultat de compacité	28
1.6. Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	31
2. Problèmes aux limites elliptiques	34
2.1. Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques	34
2.2. Problèmes variationnels abstraits	36
2.3. Problèmes aux limites elliptiques d'ordre 2	40
2.4. Système de l'élasticité	49
2.5. Système de Stokes	54
3. Approximation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques. Premiers exemples ...	58
3.1. Théorie abstraite de l'approximation variationnelle	58
3.2. Application aux problèmes aux limites en dimension $n=1$	64
3.3. Applications à un problème aux limites en dimension $n=2$	72
4. Interpolation de Lagrange dans $\mathbf{R}^n$	79
4.1. Éléments finis de Lagrange	79
4.2. Éléments finis simpliciaux	82
4.3. Éléments finis parallélotopes	89
4.4. Résultats généraux d'approximation dans les espaces de Sobolev	96
5. Analyse de la méthode des éléments finis	104
5.1. Cas d'un ouvert Ω polyédrique	104
5.2. Cas d'un ouvert Ω non polyédrique	113
5.3. Méthode des éléments finis avec intégration numérique	123
6. Théorie spectrale des problèmes aux limites	133
6.1. Introduction aux problèmes spectraux	133
6.2. Théorie spectrale abstraite	135
6.3. Application aux problèmes aux limites elliptiques	140
6.4. Approximation variationnelle des problèmes spectraux	144
6.5. Application aux problèmes elliptiques du second ordre	151

7. Problèmes paraboliques	154
7.1. Equation de la chaleur	154
7.2. Problèmes paraboliques abstraits	155
7.3. Exemples de problèmes paraboliques	161
7.4. Méthode de semi-discrétisation	166
7.5. Discrétisation totale des problèmes paraboliques	169
7.6. Application aux problèmes paraboliques d'ordre 2 en x	179
8. Problèmes d'évolution d'ordre deux en temps	185
8.1. Équation des ondes	185
8.2. Problèmes d'ordre 2 en t généraux	186
8.3. Exemples de problèmes d'ordre 2 en t	191
8.4. Méthode de semi-discrétisation	195
8.5. Discrétisation totale des problèmes d'ordre 2 en t : 1 ^{ère} partie	197
8.6. Discrétisation totale des problèmes d'ordre 2 en t : 2 ^e partie	205
8.7 Application aux problèmes hyperboliques du second ordre	213
Références bibliographiques	217
Principales notations utilisées	218
Index	220

AVANT-PROPOS

Ce livre est consacré à l'étude théorique et à l'approximation numérique des problèmes aux limites linéaires pour les équations aux dérivées partielles. Il reprend avec quelques compléments le cours d'Analyse Numérique Approfondie enseigné par le premier Auteur à l'Université Pierre et Marie Curie dans le cadre de la Maîtrise de Mathématiques et Applications Fondamentales.

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques ou économiques sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations aux dérivées partielles. Bien plus, dans de nombreux domaines de pointe (industrie aéronautique, industrie pétrolière, industrie nucléaire, problèmes de la fusion contrôlée, prévision météorologique, etc.), le progrès technique nécessite de résoudre numériquement des systèmes d'équations aux dérivées partielles parfois très compliqués afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. Avec les progrès toujours aussi foudroyants des performances des ordinateurs, la simulation numérique des phénomènes devient plus souple, plus facile à réaliser, et surtout plus économique, que la simulation expérimentale et tend de plus en plus à s'y substituer ; cette évolution est particulièrement nette aux États-Unis, plus lente en France où le développement encore trop faible des bureaux d'études ou des centres de recherches appliquées joint à un certain archaïsme de pensée malheureusement trop répandu freine une évolution inéluctable.

Le but de cet ouvrage est ainsi de servir d'introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles intervenant dans les applications et aux méthodes d'approximation numérique adaptées à l'emploi des ordinateurs. Dans le cadre nécessairement limité de ce livre, nous nous sommes bien entendu restreints aux problèmes linéaires et parmi ceux-ci aux problèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques du type des ondes pour lesquels nous avons adopté une présentation unifiée. Nous avons par contre laissé de côté l'étude des équations et des systèmes hyperboliques du 1^{er} ordre malgré leur importance dans les applications ; leur traitement tant théorique que numérique nous a paru en effet un peu délicat au niveau de ce traité relativement élémentaire.

En ce qui concerne les méthodes d'approximation numérique nous avons centré notre exposé sur la méthode des éléments finis qui a été introduite par les Ingénieurs au début des années 50 pour les besoins du calcul de structures et qui a été progressivement reconnue comme une méthode générale d'approximation des équations aux dérivées partielles. Cette méthode est la base de puis-

sants codes numériques universellement utilisés. Nous n'avons fait qu'évoquer la méthode plus ancienne et plus classique des différences finies en montrant comment elle peut s'obtenir à partir de la méthode des éléments finis. De même, nous nous sommes résignés à passer sous silence les méthodes spectrales qui jouent un rôle croissant dans un certain nombre d'applications. En effet, il ne nous était pas possible dans cet ouvrage introductif de donner un panorama suffisamment complet de l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles ; nous avons donc choisi de privilégier la méthode des éléments finis qui nous apparaît comme étant la méthode d'approximation la plus riche en généralité et en possibilités. Par manque de place, nous avons dû renoncer à évoquer de manière précise les problèmes fondamentaux de la mise en œuvre sur ordinateur de la méthode des éléments finis.

Le niveau requis pour aborder ce livre est celui de la licence de Mathématiques (correspondant aux connaissances acquises à l'issue des trois premières années d'études universitaires) ou à celui de la fin de première année des Ecoles d'Ingénieurs. En fait, un lecteur muni d'une bonne connaissance de la théorie des espaces de Hilbert, des *résultats* essentiels de la théorie de l'intégration et de notions élémentaires de calcul différentiel peut étudier cet ouvrage avec fruit. Le lecteur pourra se familiariser avec les notions contenues dans ce livre en consultant le recueil d'exercices correspondant. Il y trouvera également les quelques points de démonstration techniques laissés ici en « Exercice ».

Nous exprimons nos vifs remerciements à Mesdames H. BUGLER et M. DAMPÉRAT qui se sont chargées de la préparation matérielle du manuscrit.

Pierre-Arnaud RAVIART
Jean-Marie THOMAS

1. ESPACES DE SOBOLEV

Ce chapitre constitue une introduction aux espaces de Sobolev qui sont la clef d'une bonne compréhension des problèmes aux limites. Il rassemble les propriétés essentielles de ces espaces qui seront utilisées de façon constante dans les chapitres ultérieurs.

1.1. Rappels sur les distributions

Commençons par rappeler succinctement un certain nombre de notions sur les distributions.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ de point générique $x=(x_1, \dots, x_n)$ (avec $n \leq 3$ dans les applications). Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω . Si a est un point de Ω et $R>0$ un réel tel que la boule de $\mathbf{R}^n$ de centre a et de rayon R soit contenue dans Ω , un exemple classique de fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est donnée par

$$(1.1-1) \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-a|^2 - R^2}} & \text{si } |x-a| < R, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $|y| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$, norme euclidienne de y dans $\mathbf{R}^n$.

Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ et si $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ est un multi-entier, on pose

$$\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

avec

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

On munit $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une *pseudo-topologie*, c'est-à-dire on définit les suites convergentes dans $\mathcal{D}(\Omega)$: si (φ_m) est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, on dira que φ_m tend vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

- (i) le support de φ_m reste dans un compact fixe K de $\mathcal{D}$;
- (ii) quel que soit $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_m$ tend vers $\partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K .

On introduit ensuite l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω comme étant l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires « continues » sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Autrement dit si T est une distribution sur Ω et si $\langle T, \varphi \rangle$ désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$, pour toute suite (φ_m) convergente vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi_m \rangle$ tend vers $\langle T, \varphi \rangle$.

A son tour, on munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une pseudo-topologie : si (T_m) est une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dira que T_m tend vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_m, \varphi \rangle$ tend vers $\langle T, \varphi \rangle$.

EXEMPLE 1.1-1. Soit a un point de Ω ; on introduit la masse de Dirac δ_a au point a par

$$(1.1-2) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Il est clair que ceci définit δ_a comme étant une distribution sur Ω .

EXEMPLE 1.1-2. Soit $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω relativement à la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \dots dx_n$ dans $\mathbf{R}^n$. Rappelons que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(1.1-3) \quad (f, g)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

On note

$$(1.1-4) \quad \|f\|_{0, \Omega} = (f, f)_{0, \Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

la norme correspondante. Notons ce résultat classique de la théorie de l'intégration :

$$(1.1-5) \quad \mathcal{D}(\Omega) \text{ est dense dans } L^2(\Omega).$$

Étant donné une fonction f de $L^2(\Omega)$, on lui associe T_f la distribution sur Ω définie par

$$(1.1-6) \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Remarquons que l'application $f \mapsto T_f$ de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est injective. En effet, soit f une fonction de $L^2(\Omega)$ telle que $T_f = 0$, i.e.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

En vertu de (1.1-5), on a

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

ce qui entraîne $f=0$. Par linéarité, ceci prouve que l'égalité de deux distributions T_f et T_g implique l'égalité des fonctions f et g au sens de $L^2(\Omega)$ partout. On peut donc identifier f et T_f , ce qui revient à identifier $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans toute la suite, cette identification sera faite systématiquement et on écrira

$$(1.1-7) \quad L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Notons d'ailleurs que l'application identité de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, encore appelée *injection canonique* de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, est « continue » : si f_m tend vers f dans $L^2(\Omega)$, alors f_m tend vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, on a, d'après l'inégalité de Cauchy—Schwarz,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} (f_m - f) \varphi dx \right| \leq \|f - f_m\|_{0, \Omega} \|\varphi\|_{0, \Omega}.$$

REMARQUE 1.1-1. De la même façon, on peut identifier l'espace $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ des fonctions localement sommables dans Ω à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Introduisons enfin la *dérivation au sens des distributions*. Si T est une distribution sur Ω , on définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par

$$(1.1-8) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Puisque $\varphi \mapsto \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ceci définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ en tant que distribution sur Ω . Notons que, si f est une fonction une fois continûment dérivable sur Ω , sa dérivée au sens classique $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coïncide avec sa dérivée au sens des distributions. En effet, on a, d'une part, par définition de la dérivée-distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

et, d'autre part, par intégration par parties

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

puisque de telles fonctions φ sont à support compact dans Ω .

De façon plus générale, si T est une distribution sur Ω et si $\alpha \in \mathbf{N}^n$ est un multi-entier quelconque, on définit la dérivée au sens des distributions $\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ de T par

$$(1.1-9) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Ainsi une distribution sur Ω est indéfiniment dérivable au sens des distributions. On vérifie immédiatement que l'application $T \mapsto \partial^\alpha T$ est continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ au sens suivant : si T_m tend vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\partial^\alpha T_m$ tend vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

EXEMPLE 1.1-3. On définit la *fonction d'Heaviside* H sur $\mathbf{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Suivant la remarque 1.1-1, H s'identifie à une distribution T_H sur $\mathbf{R}$. On a

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta \quad (\text{masse de Dirac à l'origine}).$$

En effet,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \left\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbf{R}} H(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = - \int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = \varphi(0).$$

EXEMPLE 1.1-4. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et admettant une dérivée $\frac{df}{dx}$ continue et bornée dans l'ouvert $\mathbf{R} \setminus \bigcup_{j=1}^k \{x_j\}$. Soit $s_j = f(x_j+0) - f(x_j-0)$ le saut de f au point x_j . Alors le résultat précédent se généralise en

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{j=1}^k s_j \delta_{x_j}.$$

En effet, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbf{R}} f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{df}{dx}(x) \varphi(x) dx + \sum_{j=1}^k s_j \varphi(x_j).$$

1.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$; elle s'identifie à une distribution sur Ω , encore notée v , et on peut donc définir ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, en tant que distributions sur Ω . En général, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas au sous-espace $L^2(\Omega)$. On introduit alors la

Définition 1.2-1. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$(1.2-1) \quad H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(1.2-2) \quad (u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et on note

$$(1.2-3) \quad \|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{1/2}$$

la norme correspondante.

EXEMPLE 1.2-1. Si Ω est un intervalle ouvert et borné de $\mathbf{R}$, il est clair d'après l'exemple 1.1-4 que toute fonction continue et continûment dérivable par morceaux sur $\overline{\Omega}$ appartient à $H^1(\Omega)$. Nous verrons d'ailleurs des exemples plus généraux au paragraphe 4 de ce chapitre (cf. théorème 1.4-3).

Notons maintenant la propriété fondamentale de l'espace $H^1(\Omega)$ qui motive son introduction.

Théorème 1.2-1. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (1.2-2).

DÉMONSTRATION. L'espace $H^1(\Omega)$ est visiblement préhilbertien pour le produit scalaire (1.2-2). La seule chose à vérifier est qu'il est complet pour la norme (1.2-3). Soit donc (v_m) une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$; d'après (1.2-3), (v_m) et $\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)$, $1 \leq i \leq n$, sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Puisque l'espace $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des fonctions v et v_i , $1 \leq i \leq n$, telles que

$$(1.2-4) \quad v_m \rightarrow v \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

$$(1.2-5) \quad \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \rightarrow v_i \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il reste à prouver que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ au sens des distributions sur Ω . Puisque l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue, on déduit de (1.2-4) et de (1.2-5)

$$(1.2-6) \quad v_m \rightarrow v \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$(1.2-7) \quad \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \rightarrow v_i \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

D'après la continuité de la dérivation de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, (1.2-6) implique

$$(1.2-8) \quad \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on conclut de (1.2-7) et de (1.2-8)

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ceci prouve que $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est une fonction de $L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, donc que v appartient à $H^1(\Omega)$; de plus v_m tend vers v dans $H^1(\Omega)$. On a ainsi démontré que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2-2. *L'espace $H^1(\Omega)$ est séparable, i.e., il existe une partie dénombrable dense dans $H^1(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Notons d'abord deux résultats de caractère général :

- (i) le produit de deux espaces séparables est séparable ;
- (ii) si E est un espace de Hilbert et si F est un sous-espace fermé de E , la séparabilité de E entraîne celle de F . En effet, si (e_m) est une suite dense dans E , la suite (f_m) , où f_m est la projection de e_m sur F , est dense dans F .

Ceci posé, on introduit, d'une part, l'espace $(L^2(\Omega))^{n+1}$ muni de la structure hilbertienne produit, d'autre part, l'application

$$\mathcal{J} : v \mapsto \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$$

de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$. L'application $\mathcal{J}$ est isométrique :

$$\|\mathcal{J}v\|_{(L^2(\Omega))^{n+1}} = \|v\|_{1,\Omega}$$

de sorte que $H^1(\Omega)$ s'identifie à $\mathcal{J}(H^1(\Omega))$ sous-espace fermé de $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Or, puisque l'espace $L^2(\Omega)$ est séparable, l'espace $(L^2(\Omega))^{n+1}$ l'est également en vertu de la propriété (i) et donc aussi $H^1(\Omega)$ d'après la propriété (ii).

Nous avons rappelé que l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Cet espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est-il dense dans $H^1(\Omega)$? Nous verrons (cf. remarque 1.2-2) que la réponse à cette question est en général négative ; c'est pourquoi on introduit la

Définition 1.2-2. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Néanmoins dans le cas particulier où $\Omega = \mathbf{R}^n$, cette notation est superflue ; on a en effet le

Theorème 1.2-3. L'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbf{R}^n)$, i.e.,

$$H_0^1(\mathbf{R}^n) = H^1(\mathbf{R}^n).$$

DÉMONSTRATION. Elle se fait par troncature et régularisation.

1°) *Troncature.* — On introduit une fonction M de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} M(x) = 1 & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 < M(x) < 1 & \text{pour } 1 < |x| < 2, \\ M(x) = 0 & \text{pour } |x| \geq 2; \end{cases}$$

puis pour tout réel $R > 0$, on définit la fonction M_R de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ par

$$M_R(x) = M\left(\frac{x}{R}\right), \quad \frac{x}{R} = \left(\frac{x_1}{R}, \dots, \frac{x_n}{R}\right).$$

Alors, si v est une fonction de $H^1(\mathbf{R}^n)$, $M_R v$ est une fonction de $H^1(\mathbf{R}^n)$ à support compact et, lorsque R tend vers $+\infty$, $M_R v$ tend vers v dans $H^1(\mathbf{R}^n)$. En effet, on a, d'une part,

$$\|M_R v - v\|_{0,\mathbf{R}^n}^2 \leq \int_{|x| \geq R} |v(x)|^2 dx$$

ce qui prouve que $M_R v$ tend vers v dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, lorsque R tend vers $+\infty$. D'autre

part, puisque $\frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{x}{R}\right)$, on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) \right| = 0$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x_i}(M_R v) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(M_R \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial M_R}{\partial x_i} v \right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Le sous-espace de $H^1(\mathbf{R}^n)$ des fonctions à support compact est donc dense dans $H^1(\mathbf{R}^n)$.