J. BOISTEL de BELLOY M. DELANNOY P. ROUGEE N. TOUPANCE

exercices et problèmes

mécanique générale 1

torseurs, cinématique, cinétique

seconde année
du premier cycle universitaire

classes préparatoires

VUIBERT UNIVERSITE

J. BOISTEL de BELLOY M. DELANNOY P. ROUGEE N. TOUPANCE

exercices et problèmes

mécanique générale 1

torseurs, cinématique, cinétique

seconde année
du premier cycle universitaire

classes préparatoires

VUIBERT UNIVERSITE

Exercices et problèmes de MÉCANIQUE

1

Premier cycle universitaire
Classes préparatoires
aux grandes écoles scientifiques

VUIBERT

DIFFUSEURS VUIBERT

ALGÉRIE	:	S.N.E.D. 49 bis, rue Larbi Ben M'Hidi EL DJAZAIR (ALGER) O.P.U. place centrale Ben Aknoun EL DJAZAIR (ALGER).
BELGIQUE	:	ÉDITIONS ET DIFFUSION 16, rue de Chambéry, 1040 BRUXELLES.
CANADA	:	LE DIFFUSEUR CP 85, BOUCHERVILLE J4B 5E6 QUÉBEC.
ESPAGNE	:	CIENTIFICO-TECNICA Sancho Davila 27, MADRID 28.
MAROC	:	SMER-DIFFUSION 3, rue Ghazza, RABAT.
PORTUGAL	:	LIDEL Rua D. Estefânia, 183-R/C DTO, 1096 LISBOA CODEX.
SUISSE	:	DIFFUSION S.N.L. 79, route d'Oron, 1000 LAUSANNE 21.
TUNISIE	:	S.T.D. 5, avenue de Carthage TUNIS. S.T.D. 48, rue Dag Hammarskjoeld, SFAX.

ISBN : 2-7117 - 2208-2

Avant-propos

Ce livre d'Exercices et Problèmes s'adresse d'abord aux étudiants des premières années universitaires et des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, pour les aider à assimiler leur programme de Mécanique. Il constitue aussi, — avec le livre de Cours —, une référence et une mémoire utilisables par les étudiants qui souhaitent une formation plus approfondie en mécanique, et pour tous ceux qui, après des détours, reviennent à cette discipline.

Le premier objectif des auteurs a donc été de proposer un ouvrage facilement accessible et opératoire pour quiconque s'y aventurera seul ou avec d'autres, en groupe. Ce souci nous a conduit à certains choix dans la présentation des textes :

— centrer chaque exercice ou problème sur un point particulier et développer en priorité les données essentielles qui s'y rapportent ; très souvent, en tête d'un énoncé, quelques mots indiquent précisément sa visée ;

— rappeler les notions et résultats fondamentaux au moment même où ils se trouvent nécessaires dans le cours de la résolution du problème traité. Ces rappels, bien mis en évidence dans le texte ont été sélectionnés : seuls les plus significatifs ont été retenus. Suivis de références au livre de Cours, ils sont une invitation à y rechercher les fondements et les démonstrations ; ils sont donc aussi une clef pour entrer dans la théorie. En fait, un va-et-vient continuel entre le Cours et les Exercices est indispensable pour assimiler sérieusement ce programme ;

— favoriser l'apprentissage grâce à des progressions établies selon trois perspectives :

- progression dans les difficultés d'un exercice (ou problème) à un autre ;
- progression dans la maîtrise de différentes méthodes, pour apprendre à choisir la meilleure (des comparaisons sont proposées dans certains cas) ;
- progression dans la pratique des calculs : très détaillés dans leur premier usage, ils ne sont repris ensuite que de manière succincte.

Quelques aménagements pratiques permettront une utilisation rapide et un repérage aisé de telle ou telle question. Ainsi l'Index notionnel situé à la fin de l'ouvrage, et des dispositions typographiques permettant de distinguer entre eux objectif, énoncé, solution, rappel, remarque.

Cet ouvrage est le résultat du travail d'une équipe homogène d'enseignants ; on le remarquera à une certaine unité dans la façon de voir et de traiter les problèmes ; il n'a pas paru nécessaire pour autant de réduire les disparités de style dues à la multi-rédaction.

Nous nous sommes efforcés d'exposer des exercices et des problèmes qui, au moins dans la forme où ils sont présentés, ont été élaborés par nous-mêmes ; mais il est bien clair que la matière traitée appartient à un patrimoine commun. Il n'est donc pas impossible que certains de nos collègues reconnaissent des exercices qui leur sont familiers. Nous remercions ici ceux qui auraient ainsi involontairement contribué à ce livre.

La Mécanique Générale est une science ancienne. Un ouvrage nouveau sur le sujet ne saurait prétendre en révolutionner le contenu et la problématique. Une science ne reçoit toutefois jamais son expression définitive ; cela est particulièrement vrai aujourd'hui pour les sciences à forte mathématisation et il est nécessaire, pour les faire vivre, d'en retravailler constamment la formulation.

Nous espérons que, dans cet esprit, ce livre et celui du Cours auquel il se rapporte, auront aussi leur utilité.

Table des matières

Liste de notations

$\mathscr{B} = \vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$	Base OND
C. I.	Conditions initiales
$\dfrac{d^R\vec{U}}{dt}$	Dérivée d'un vecteur $\vec{U}$ par rapport à (ou dans) un repère d'espace R
$\mathscr{E}$	Espace affine euclidien de dimension trois
E	Espace vectoriel associé à $\mathscr{E}$
f	Coefficient de frottement
$I_{S\|A}$ (Resp.: $I_{S\|D}$, $I_{S\|P}$)	Moment d'inertie du solide S par rapport au point A (resp.: à la droite D, au plan P)
$\mathscr{I}_{S.A}$	Opérateur d'inertie du solide S au point A.
OND	Orthonormé direct
$\mathscr{P}(F^n_{S^*\to S})$	Puissance (dans un repère considéré) des efforts de nature n exercés par le solide S* sur le solide S
$\mathscr{P}^c_{S^*\leftrightarrow S}$	Puissance des inter efforts de contact entre les deux solides S* et S
P. F.	Principe Fondamental de la Dynamique
R	Repère d'espace
$T = A\vec{X}\vec{Y}\vec{Z} = A\mathscr{B}$	Trièdre OND
$T_{S\|R}$	Énergie cinétique du solide S par rapport à un repère R
$\mathbb{T}$	Espace vectoriel des torseurs
$\mathscr{T}$	Torseur
$\vec{\mathscr{T}}$	Vecteur (ou somme, ou résultante) du torseur $\mathscr{T}$
$\overrightarrow{\mathscr{T}(A)}$	Valeur (ou moment) du torseur $\mathscr{T}$ au point A
$\mathscr{T}^n_{S^*\to S}$	Torseur des efforts de nature n exercés par S* sur S
U	Fonction de force
$V_{S\|R}$	Torseur (distributeur) des vitesses du solide S par rapport à un repère R
$\overrightarrow{V_{A\|R}}$	Vitesse du point A par rapport à (ou dans) un repère R
$\overrightarrow{V_{S\|R}(A)}$	Vitesse du solide S par rapport à un repère R en A; ou valeur du torseur $V_{S\|R}$ en A
$\mathscr{V}$	Espace des vitesses de l'articulation entre les deux solides
$\mathscr{V}^\perp$	Orthogonal de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{T}$
$\overrightarrow{\Gamma_{A\|R}}$	Accélération du point A par rapport à (ou dans) un repère R
$\delta_{S\|R}$	Torseur dynamique du solide S dans son mouvement par rapport à un repère R
$\overrightarrow{\delta_{S\|R}}$	Résultante dynamique ou quantité d'accélération
$\overrightarrow{\delta_{S\|R}(A)}$	Moment dynamique au point A
$\theta = (\vec{X}, \vec{u})/\vec{Z}$	Angle de vecteurs dans un plan orienté par $\vec{Z}$
$\sigma_{S\|R}$	Torseur cinétique du solide S dans son mouvement par rapport à un repère R
$\overrightarrow{\sigma_{S\|R}}$	Résultante cinétique

$\overrightarrow{\sigma_{S\vert R}(A)}$	Moment cinétique au point A
$\vec{\Omega}_{S\vert R}$	Vecteur rotation du solide S par rapport à un repère R
$\stackrel{D}{=}$	Égalité obtenue par application du P. F.

Les références ci-dessous doivent se lire:

R 4.B.3	3e rappel du paragraphe B du chapitre 4
(*c*, 2.3)	Paragraphe 3 du chapitre 2 du livre de cours
(*c*, 2, **(27)**)	Formule **(27)** du chapitre 2 du livre de cours

1. Torseurs

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine réel euclidien de dimension trois, orienté, et E désigne son espace de vecteurs associé. L'espace vectoriel des torseurs de E est noté $\mathbb{T}$. D'autre part, on notera indifféremment les trièdres sous la forme $T = O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$, ou $O\mathscr{B} = O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$, avec O point de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B} = \vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$ base de E, généralement orthonormée directe (OND).

Exercice 1

Soit un trièdre $O\mathscr{B} = O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$ OND. Soit V le champ de vecteurs défini par

$$\overrightarrow{V(M)} = \begin{pmatrix} a - \alpha y + \alpha^2 z \\ b + \alpha x + 2z \\ c - x - 2y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées dans $O\mathscr{B}$ de M ; a, b, c sont des constantes données et α est un paramètre réel.

1° Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le champ V est un torseur dont on précisera le vecteur.

2° Pour chaque valeur de α solution de la question 1, déterminer l'axe central du torseur V.

R 1.1

Définition d'un torseur.

Un torseur est un champ de vecteurs, c'est-à-dire une application $\mathscr{T} : \mathscr{E} \to E$, pour lequel il existe un élément $\vec{\mathscr{T}}$ de E tel que l'on ait

$$\forall M,\ \forall P \qquad \overrightarrow{\mathscr{T}(M)} = \overrightarrow{\mathscr{T}(P)} + \vec{\mathscr{T}} \wedge \overrightarrow{PM}\,.$$

$\vec{\mathscr{T}}$ **est le vecteur,** ou la **somme,** ou la **résultante** du torseur $\mathscr{T}$ et $\overrightarrow{\mathscr{T}(M)}$ **est sa valeur,** ou **son moment** en M.

(c, Annexe 4 (1))

1° Soit M et P deux points quelconques, de coordonnées respectives (x, y, z) et $(x + X, y + Y, z + Z)$. On a

$$\overrightarrow{V(P)} - \overrightarrow{V(M)} = \begin{pmatrix} -\alpha Y + \alpha^2 Z \\ \alpha X + 2Z \\ -X - 2Y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Le champ V est un torseur si, et seulement si, il existe un vecteur $\vec{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ tel que cette expression soit, pour toute paire de points M et P, donc quels que soient les scalaires X, Y, Z, égale à

$$\vec{\mathscr{C}} \wedge \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} vZ - wY \\ wX - uZ \\ uY - vX \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Donc, encore si, et seulement si, il existe (u, v, w) tel que l'on ait

$$-\alpha = -w, \quad \alpha^2 = v, \quad \alpha = w, \quad 2 = -u, \quad -1 = -v, \quad -2 = u,$$

c'est-à-dire $\qquad u = -2, \quad v = 1 = \alpha^2, \quad w = \alpha,$

ce qui est possible si, et seulement si, $\alpha^2 = 1$.

En conclusion :

— si $\alpha = +1$, le champ V est un torseur de vecteur $\vec{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$;

— si $\alpha = -1$, le champ V est un torseur de vecteur $\vec{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

R 1.2

Définition de l'axe central d'un torseur.

Étant donné un torseur $\mathscr{C}$ de vecteur $\vec{\mathscr{C}}$ non nul, l'ensemble des points M où $\overrightarrow{\mathscr{C}(M)}$ est parallèle à $\vec{\mathscr{C}}$ est une droite Δ appelée axe central de $\mathscr{C}$.

(*c*. Annexe 4, **(12)**)

2° On obtient l'axe central Δ du torseur V en écrivant que $\overrightarrow{V(M)}$ est parallèle à $\vec{\mathscr{C}}$ en tout point M de Δ, soit

— si $\alpha = 1$, $\qquad \dfrac{a - y + z}{-2} = \dfrac{b + x + 2z}{1} = \dfrac{c - x - 2y}{1}$

$$\Leftrightarrow x + y + z = \frac{c - b}{2} \quad \text{et} \quad y - z = \frac{a + b + c}{3} ;$$

$$— \text{ si } \alpha = -1, \quad \frac{a+y+z}{-2} = \frac{b-x+2z}{1} = \frac{c-x-2y}{-1}$$

$$\Leftrightarrow x + y - z = \frac{c+b}{2} \quad \text{et} \quad y + z = \frac{c-b-a}{3}.$$

On a ainsi, dans chaque cas, les équations de l'axe central.

Exercice 2

Soit un trièdre T = $\mathbf{O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}}$ OND, A et B deux points définis par

$$\mathbf{A = O + a\vec{X}\,; \qquad B = O + a\vec{Y},}$$

***a* constante donnée non nulle.**
Un torseur $\mathcal{T}$ satisfait les conditions

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{T}(A)} = \overrightarrow{\mathcal{T}(B)} = \lambda(\vec{Y} - \vec{Z}) & \lambda \in \mathbb{R} \text{ donné} \\ \overrightarrow{\mathcal{T}(O)} \,.\, \vec{Z} = 0\,. \end{cases}$$

Déterminer $\overrightarrow{\mathcal{T}(O)}$, le vecteur $\vec{\mathcal{T}}$ du torseur $\mathcal{T}$ et son axe central.

Puisque $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont parallèles à $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ respectivement, on a

$$\overrightarrow{\mathcal{T}(O)}\,.\,\vec{X} = (\overrightarrow{\mathcal{T}(A)} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{AO})\,.\,\vec{X} = \overrightarrow{\mathcal{T}(A)}\,.\,\vec{X} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathcal{T}(O)}\,.\,\vec{Y} = (\overrightarrow{\mathcal{T}(B)} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{BO})\,.\,\vec{Y} = \overrightarrow{\mathcal{T}(B)}\,.\,\vec{Y} = \lambda\,.$$

Comme, par hypothèse, on a $\overrightarrow{\mathcal{T}(O)}.\vec{Z} = 0$, il vient

$$\overrightarrow{\mathcal{T}(O)} = \lambda\vec{Y}\,.$$

Puisque $\overrightarrow{\mathcal{T}(A)}$ et $\overrightarrow{\mathcal{T}(B)}$ sont égaux, leur différence est nulle donc $\vec{\mathcal{T}}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{\mathcal{T}} = k(\vec{Y} - \vec{X})\,.$$

D'autre part, $\overrightarrow{\mathcal{T}(O)} = \overrightarrow{\mathcal{T}(A)} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{AO}$, d'où $k = \frac{\lambda}{a}$, donc

$$\vec{\mathcal{T}} = \frac{\lambda}{a}(\vec{Y} - \vec{X})\,.$$

(x, y, z) étant les coordonnées dans T d'un point M quelconque, on a

$$\overrightarrow{\mathcal{T}(M)} = \overrightarrow{\mathcal{T}(O)} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix} z \\ a + z \\ -(x+y) \end{pmatrix}_{\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}},$$

d'où les équations de l'axe central (*cf.* R 1.2) :

$$\frac{z}{-1} = \frac{a+z}{1} = \frac{x+y}{0}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad x + y = 0.$$

L'axe central est donc la droite parallèle à $\overrightarrow{AB}$ passant par le point $\left(0, 0, -\frac{a}{2}\right)$.

Les exercices sur les torseurs proposés par la suite feront apparaître l'utilité de connaître la structure de l'ensemble $\mathbb{T}$ des torseurs et de distinguer des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{T}$. Il est donc maintenant nécessaire de donner des rappels à ce sujet.

R 1.3

1° L'ensemble $\mathbb{T}$ des torseurs est un espace vectoriel réel de dimension six.

2° Dans l'ensemble $\mathbb{T}$ des torseurs peuvent être distingués et caractérisés le sous-ensemble des couples et le sous-ensemble des glisseurs.

a) Un **couple** est un torseur $\mathscr{C}$ de vecteur nul. Sa valeur est uniforme (la même en tout point). Il n'admet pas d'axe central.

b) Un **glisseur** est un torseur $\mathscr{G}$ dont la valeur en au moins un point est nulle.

Si A est ce point et si $\vec{\mathscr{G}}$ est non nul, l'ensemble des points où la valeur de $\mathscr{G}$ est nulle est la droite Δ passant par A et parallèle à $\vec{\mathscr{G}}$. Cette droite n'est autre, dans ce cas particulier, que l'axe central défini en R 1.2. On dit aussi que c'est le support du glisseur $\mathscr{G}$.

c) Un point A étant choisi, l'ensemble $\mathbb{C}$ des couples et l'ensemble $\mathbb{G}_A$ des glisseurs d'axe passant par A sont deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel $\mathbb{T}$ des torseurs, de dimension trois chacun.

(*c*, Annexe 4, **(4)**, A.4.3)

Exercice 3

Soit un trièdre T = $O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$ OND, les points et les vecteurs définis comme suit :

$$A = O + 4\vec{X} - \vec{Y} - 2\vec{Z}, \qquad \vec{V} = -2\vec{X} + \vec{Y} + 2\vec{Z},$$

$$\vec{\mathscr{T}}_\lambda = (\lambda - 3)\vec{X} + \lambda\vec{Y} + 2\lambda\vec{Z}, \qquad \overrightarrow{\mathscr{T}_\lambda(O)} = (\lambda - 5)\vec{Y} + (3\lambda - 1)\vec{Z} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On considère les deux torseurs suivants :

— le glisseur $\mathscr{G}$ dont l'axe passe par A et dont le vecteur est $\vec{V}$;

— le torseur $\mathscr{T}_\lambda$ dont le vecteur et la valeur en O sont respectivement $\vec{\mathscr{T}}_\lambda$ et $\overrightarrow{\mathscr{T}_\lambda(O)}$.

1° Déterminer les coordonnées vectorielles en O du glisseur $\mathscr{G}$. Montrer qu'il existe une valeur λ_0 de λ pour laquelle les torseurs $\mathscr{G}$ et $\mathscr{T}$ sont égaux.

2° Montrer qu'il existe une valeur λ_1 de λ, distincte de λ_0, telle que $\mathscr{T}_{\lambda_1}$ soit un glisseur. Déterminer le support de ce glisseur.

3° Effectuer la décomposition centrale de $\mathscr{T}_\lambda$ pour $\lambda = 2$.

R 1.4

Soit A un point, $\vec{R}$ et $\vec{G}$ deux vecteurs. Le champ $M \to \vec{G} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AM}$ est un torseur dont la valeur en A est $\vec{G}$ et le vecteur $\vec{R}$. Nous le noterons $\begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{G} \end{bmatrix}_A$.

Tout torseur est de la forme précédente :

$$\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T} \qquad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{T}} \\ \overrightarrow{\mathcal{T}(A)} \end{bmatrix}_A = \text{le champ } M \to \overrightarrow{\mathcal{T}(A)} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

Il en résulte que, A étant choisi (arbitrairement), tout torseur $\mathcal{T}$ est caractérisé par la donnée des deux vecteurs $\vec{\mathcal{T}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{T}(A)}$ que l'on appelle de ce fait **coordonnées vectorielles** (ou éléments de réduction) du torseur $\mathcal{T}$ en A.

L'application qui à $\mathcal{T}$ associe ses coordonnées vectorielles est linéaire. Cela se traduit par

$$\overrightarrow{\lambda_1\mathcal{T}_1 + \lambda_2\mathcal{T}_2} = \lambda_1\vec{\mathcal{T}}_1 + \lambda_2\vec{\mathcal{T}}_2$$
$$\overrightarrow{(\lambda_1\mathcal{T}_1 + \lambda_2\mathcal{T}_2)(A)} = \lambda_1\overrightarrow{\mathcal{T}_1(A)} + \lambda_2\overrightarrow{\mathcal{T}_2(A)}$$

et

$$\lambda_1\begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{G}_1 \end{bmatrix}_A + \lambda_2\begin{bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{G}_2 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{R}_1 + \lambda_2\vec{R}_2 \\ \lambda_1\vec{G}_1 + \lambda_2\vec{G}_2 \end{bmatrix}_A$$

(*c*, Annexe 4, A.4.1, **(4)**)

1° En utilisant R 1.3 et 4, on peut écrire

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \vec{V} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -2\vec{X} + \vec{Y} + 2\vec{Z} \\ \vec{0} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -2\vec{X} + \vec{Y} + 2\vec{Z} \\ -4\vec{Y} + 2\vec{Z} \end{bmatrix}_O$$

puisque

$$\overrightarrow{\mathcal{G}(O)} = \overrightarrow{\mathcal{G}(A)} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V} = (4\vec{X} - \vec{Y} - 2\vec{Z}) \wedge (-2\vec{X} + \vec{Y} + 2\vec{Z}) = -4\vec{Y} + 2\vec{Z}.$$

Un torseur étant caractérisé par ses coordonnées vectorielles en un point, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{T}$ seront égaux si, et seulement si,

$$\begin{cases} (\lambda - 3)\vec{X} + \lambda\vec{Y} + 2\lambda\vec{Z} = -2\vec{X} + \vec{Y} + 2\vec{Z} \\ (\lambda - 5)\vec{Y} + (3\lambda - 1)\vec{Z} = -4\vec{Y} + 2\vec{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_0 = 1.$$

2°

R 1.5

Pour tout torseur $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$:

a) $\vec{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{T}(M)}$ est indépendant du point M : on l'appelle **invariant scalaire.**

b) Les torseurs dont l'invariant scalaire est nul sont les couples et les glisseurs.

c) Pour qu'un torseur de vecteur non nul soit un glisseur il faut et il suffit que son invariant scalaire soit nul.

(*c*, Annexe 4 **(7)**)

$\mathcal{T}_\lambda$ est caractérisé par ses coordonnées vectorielles en O : son invariant scalaire est donc $\vec{\mathcal{T}}_\lambda . \overrightarrow{\mathcal{T}_\lambda(\mathrm{O})}$. $\mathcal{T}_\lambda$ sera un glisseur si, et seulement si,

$$\vec{\mathcal{T}}_\lambda . \overrightarrow{\mathcal{T}_\lambda(\mathrm{O})} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) + 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 .$$

Comme λ_1 doit être distinct de λ_0, la seule valeur possible est $\lambda_1 = 0$. On a alors $\vec{\mathcal{T}}_{\lambda_1} = -3\vec{\mathrm{X}} \neq \vec{0}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ est le glisseur

$$\mathcal{T}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -3\vec{\mathrm{X}} \\ -5\vec{\mathrm{Y}} - \vec{\mathrm{Z}} \end{bmatrix}_{\mathrm{O}} .$$

Le support de $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ est l'ensemble des points P (de coordonnées x, y, z dans T) où

$$\overrightarrow{\mathcal{T}_{\lambda_1}(\mathrm{P})} = \overrightarrow{\mathcal{T}_{\lambda_1}(\mathrm{O})} + \vec{\mathcal{T}}_{\lambda_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-5 + 3z)\vec{\mathrm{Y}} + (-1 - 3y)\vec{\mathrm{Z}}$$

est nul. C'est donc la droite d'équations

$$y = -\frac{1}{3} \qquad z = \frac{5}{3} .$$

3°

R 1.6

Tout torseur $\mathcal{T}$ peut être décomposé de façon unique en la somme d'un couple $\mathcal{C}$ et d'un glisseur $\mathcal{G}$, le moment du couple et le vecteur du glisseur étant parallèles **(décomposition centrale)** :

- si $\mathcal{T}$ est un couple : $\mathcal{G} = 0$ et $\mathcal{C} = \mathcal{T}$;
- si $\mathcal{T}$ est un glisseur : $\mathcal{G} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{C} = 0$.

Dans les autres cas, $\mathcal{G}$ est le glisseur de vecteur $\vec{\mathcal{T}}$ et de support l'axe central Δ de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ est le couple de valeur le moment central $\vec{\mathrm{I}}$ de $\mathcal{T}$ (qui est par définition la valeur uniforme $\vec{\mathrm{I}}$ que prend $\overrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{P})}$ en tous les points P de Δ).

Les éléments Δ, $\vec{\mathcal{T}}$ et $\vec{\mathrm{I}}$ caractérisent $\mathcal{T}$: ce sont les éléments centraux de $\mathcal{T}$.

(c. Annexe 4, A.4.5)

Le moment central $\vec{\mathrm{I}}$ d'un torseur $\mathcal{T}$ quelconque, de vecteur $\vec{\mathcal{T}}$ non nul, est parallèle à $\vec{\mathcal{T}}$: $\vec{\mathrm{I}} = \mu\vec{\mathcal{T}}$. Si M est un point quelconque et P un point de l'axe central de $\mathcal{T}$, on a

$$\mu\vec{\mathcal{T}} = \vec{\mathrm{I}} = \overrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{P})} = \overrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{M})} + \vec{\mathcal{T}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{MP}} .$$

En multipliant scalairement par $\vec{\mathcal{T}}$ cette relation, on obtient

$$\mu = \frac{\vec{\mathcal{T}} . \overrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{M})}}{\vec{\mathcal{T}} . \vec{\mathcal{T}}} \qquad \text{et donc} \qquad \vec{\mathrm{I}} = \frac{\vec{\mathcal{T}} . \overrightarrow{\mathcal{T}(\mathrm{M})}}{\vec{\mathcal{T}} . \vec{\mathcal{T}}} \vec{\mathcal{T}} ,$$