

Rolf Isermann

---

# Identifikation dynamischer Systeme

---

Band II

Parameterschätzmethoden,  
Kennwertermittlung und Modellabgleich,  
Zeitvariante, nichtlineare und  
Mehrgrößen-Systeme, Anwendungen



Springer-Verlag

Rolf Isermann

# Identifikation dynamischer Systeme

Band II:

Parameterschätzmethoden,  
Kennwertermittlung und Modellabgleich,  
Zeitvariante, nichtlineare und  
Mehrgrößen-Systeme, Anwendungen

Mit 83 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo 1988

# 1. Dynamical systems.

Professor Dr.-Ing. Rolf Isermann

Institut für Regelungstechnik  
Fachgebiet Regelsystemtechnik  
TH Darmstadt  
Schloßgraben 1  
6100 Darmstadt

ISBN 3-540-18694-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork  
ISBN 0-387-18694-8 Springer-Verlag NewYork Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Isermann, Rolf:

Identifikation dynamischer Systeme / Rolf Isermann.

Berlin ; Heidelberg ; NewYork ; London ; Paris ; Tokyo : Springer

Bd. II. Parameterschätzmethoden, Kennwertermittlung und Modellabgleich,

Zeitvariante, nichtlineare und Mehrgrößen-Systeme, Anwendungen

1988

ISBN 3-540-18694-8 (Berlin . . .)

ISBN 0-387-18694-8 (NewYork . . .)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk-sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. Sep-tember 1965 in der Fassung vom 24. Juli 1985 zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu-widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1988

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hin-zuzuziehen.

Druck: Mercedes-Druck, Berlin; Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin  
2160/3020-543210

# Vorwort

Für viele Aufgabenstellungen beim Entwurf, beim Betrieb und bei der Automatisierung technischer Systeme werden in zunehmendem Maße genaue mathematische Modelle für das dynamische Verhalten benötigt. Auch im Bereich der Naturwissenschaften, besonders Physik, Chemie, Biologie und Medizin und in den Wirtschaftswissenschaften hat das Interesse an dynamischen Modellen stark zugenommen. Das grundsätzliche dynamische Verhalten kann dabei auf dem Wege einer theoretischen Modellbildung ermittelt werden, wenn die das System beschreibenden Gesetzmäßigkeiten in analytischer Form vorliegen. Wenn man diese Gesetze jedoch nicht oder nur teilweise kennt, oder wenn einige wesentliche Parameter nicht genau bekannt sind, dann muß man eine experimentelle Modellbildung, Identifikation genannt, durchführen. Hierbei verwendet man gemessene Signale und ermittelt das zeitliche Verhalten innerhalb einer gewählten Klasse von mathematischen Modellen.

Die Systemidentifikation (oder Prozeßidentifikation) ist eine noch relativ junge Disziplin, die sich vor allem in Rahmen der Regelungstechnik seit etwa 1960 entwickelt hat. Sie verwendet Grundlagen und Methoden der Systemtheorie, Signaltheorie, Regelungstheorie und Schätztheorie, und wurde wesentlich geprägt durch die moderne Meßtechnik und digitale Rechentechnik.

In zwei Bänden werden die bekanntesten Methoden der Identifikation dynamischer Systeme behandelt. Dabei wird sowohl auf die Theorie als auch Anwendung eingegangen. Das Werk ist eine Fortsetzung der vom Verfasser im Jahr 1971 im Bibliographischen Institut und im Jahr 1974 im Springer-Verlag erschienenen Bändchen. Der Umfang ist jedoch durch die weitere Entwicklung des Gebietes erheblich angestiegen, so daß die Aufteilung in zwei Bände zweckmäßig war.

Die Behandlung von grundlegenden Methoden der Identifikation dynamischer Systeme erfolgt in Band I. In Kapitel 1 wird zunächst das prinzipielle Vorgehen bei der Identifikation beschrieben. Die einzelnen Methoden werden nach typischen Merkmalen geordnet und es wird eine Übersicht der verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten gegeben.

Dann folgt im Kapitel 2 eine kurze Zusammenstellung der mathematischen Modelle linearer dynamischer Systeme für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale. Die weiteren Kapitel sind in Teilen zusammengefaßt.

Im Teil A wird zunächst die Identifikation mit nichtparametrischen Modellen für zeitkontinuierliche Signale betrachtet. Dabei wird die Fourieranalyse mit nichtperiodischen Testsignalen, die Frequenzgangmessung mit periodischen Testsignalen und die Korrelationsanalyse mit stochastischen Signalen beschrieben. Dann erfolgt im Teil B die Identifikation mit nichtparametrischen Modellen, aber zeitdiskreten Signalen in Form der Korrelationsanalyse.

Der Teil C widmet sich der Identifikation mit parametrischen Modellen für zeitdiskrete Signale. Der Fall zeitdiskreter Signale wird hier zuerst besprochen, da die zugehörigen Methoden einfacher zu behandeln und weiter entwickelt sind als für zeitkontinuierliche Signale. Es wird zunächst die Parameterschätzung für statische Systeme und dann für dynamische Systeme beschrieben. Die Methode der kleinsten Quadrate in der ursprünglichen, nichtrekursiven Form wird abgeleitet. Dann werden die zugehörigen rekursiven Parameterschätzgleichungen angegeben. Es folgen die Methoden der gewichteten kleinsten Quadrate, mehrere Modifikationen der Methode der kleinsten Quadrate, die Methode der Hilfsvariablen und die stochastische Approximation.

Im Anhang werden verschiedene Grundlagen, Grundbegriffe und Ableitungen zusammengefaßt, die den Stoff einiger Kapitel ergänzen.

Der Band II setzt den Teil C mit einer vertiefenden Behandlung der Parameterschätzmethoden fort. Zunächst werden die Maximum-Likelihood-Methode und die Bayes-Methode beschrieben, die von einer statistischen Betrachtungsweise ausgehen. Dann folgt eine Parameterschätzmethode mit nichtparametrischem Zwischenmodell. In besonderen Kapiteln wird auf die rekursiven Parameterschätzmethoden und damit verbunden, auf die Parameterschätzung zeitvarianter Prozesse eingegangen. Weitere Kapitel über numerisch verbesserte Schätzmethoden, ein Vergleich verschiedener Parameterschätzmethoden, die Parameterschätzung im geschlossenen Regelkreis und verschiedene Probleme (Wahl der Abtastzeit, Ermittlung der Modellordnung, integrale Prozesse, usw.) schließen den Teil C ab.

Zur Identifikation mit parametrischen Modellen, aber zeitkontinuierlichen Signalen in Teil D werden zunächst verschiedene Verfahren zur Parameterbestimmung aus Übergangsfunktionen, die sog. Kennwertermittlung, beschrieben. Dann folgen die Parametereinstellmethoden mit Modellabgleich, die im Zusammenhang mit der Analogrechenstechnik entstan-

den sind, Parameterschätzmethoden für Differentialgleichungen und für gemessene Frequenzgänge.

Der Teil E ist der Identifikation von Mehrgrößensystemen gewidmet. Es werden zunächst die verschiedenen Modellstrukturen und dann geeignete Identifikationsmethoden mittels Korrelation und Parameterschätzung betrachtet.

Einige Möglichkeiten zur Identifikation nichtlinearer Systeme werden in Teil F beschrieben. Hierbei steht die Parameterschätzung von dynamischen Systemen mit stetig und nichtstetig differenzierbaren Nichtlinearitäten im Vordergrund.

Schließlich wird im Teil G auf die praktische Durchführung der Identifikation eingegangen. Es werden zunächst einige Angaben zu praktischen Aspekten, wie besondere Geräte, die Elimination besonderer Störsignale, die Verifikation der erhaltenen Modelle und die Identifikation mit Digitalrechnern gemacht. Dann erfolgen Anwendungsbeispiele für mehrere technische Prozesse. Diese Beispiele zeigen exemplarisch, daß die meisten der behandelten Identifikationsmethoden in verschiedenen Einsatzfällen auch praktisch erprobt wurden.

Das Werk richtet sich an Studenten, Ingenieure in der Forschung und Praxis und an Wissenschaftler aus dem Bereich der Naturwissenschaften, die an einer Einführung und vertieften Behandlung der Identifikation dynamischer Systeme interessiert sind. Dabei werden lediglich Grundkenntnisse der Behandlung linearer, dynamischer Systeme vorausgesetzt. Der erste Band entspricht weitgehend einer Vorlesung (2 Stunden Vorlesung, 1 Stunde Übung) an der Technischen Hochschule Darmstadt ab dem sechsten Semester. Dabei wird der Stoff in der Reihenfolge der Kapitel 1, A1, A2, 2, 3, 4, 5, A3, 6, 7, 8, 9, 10 behandelt.

Viele der Methoden, Untersuchungen und Ergebnisse wurden in zahlreichen Studien- und Diplomarbeiten seit 1966 und in besonderen Forschungsarbeiten seit 1972 erarbeitet. Hierzu möchte ich sowohl den damaligen Studenten als auch den Institutionen zur Forschungsförderung, besonders der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) und dem Bundesministerium für Forschung und Technologie (BMFT) sehr danken.

Der Verfasser dankt ganz besonders seinen Mitarbeitern, die in mehrjähriger Zusammenarbeit an der Untersuchung und Entwicklung von Identifikationsmethoden, der Erstellung von Programmpaketen, Simulationen auf Digitalrechnern, Anwendungen mit Prozeßrechnern und Mikrorechnern und schließlich durch das Korrekturlesen wesentlich am Entstehen die-

ses Buches beteiligt waren. Hierbei danke ich besonders den Herren Dr.-Ing. U. Baur, Dr.-Ing. W. Bamberger, Dr.-Ing. S. Bergmann, Dr.-Ing. P. Blessing, Dr.-Ing. W. Goedecke, Dr.-Ing. H. Hensel, Dipl.-Ing. R. Kofahl, Dr.-Ing. H. Kurz, Dr.-Ing. K.-H. Lachmann, Dr.-Ing. W. Mann, Dipl.-Ing. K.H. Peter, Dr.-Ing. R. Schumann und Dr.-Ing. F. Radke. Mein Dank gilt ferner dem Springer-Verlag für die Herausgabe des Buches. Schließlich möchte ich mich noch sehr bei Frau M. Widulle für die sorgfältige Gestaltung des gesamten Textes mit der Schreibmaschine bedanken.

Darmstadt, April 1987

Rolf Isermann

# Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abkürzungen .....	XV
12 Maximum-Likelihood-Methode .....	1
12.1 Nichtrekursive Maximum-Likelihood-Methode (ML) .....	2
12.2 Rekursive Maximum-Likelihood-Methode (RML) .....	10
12.3 Erreichbare Genauigkeit, Cramér-Rao-Ungleichung .....	13
12.4 Zusammenfassung .....	16
13 Bayes-Methode .....	17
14 Parameterschätzung mit nichtparametrischem Zwischenmodell (zweistufige Methoden) .....	21
14.1 Antwortfunktionen auf nichtperiodische Testsignale und Methode der kleinsten Quadrate .....	22
14.2 Korrelationsanalyse und Methode der kleinsten Quadrate (COR-LS) .....	25
14.3 Zusammenfassung .....	32
15 Rekursive Parameterschätzmethoden .....	33
15.1 Einheitliche Darstellung rekursiver Parameterschätz- methoden .....	33
15.2 Konvergenz rekursiver Parameterschätzmethoden .....	35
15.2.1 Konvergenz im deterministischen Fall .....	37
15.2.2 Konvergenz bei stochastischen Störsignalen über gewöhnliche Differentialgleichungen .....	39
15.2.3 Konvergenz bei stochastischen Störsignalen mit der Martingale-Theorie .....	45
15.3 Zusammenfassung .....	47
16 Parameterschätzung zeitvarianter Prozesse .....	49
16.1 Exponentielle Gewichtung mit konstantem Vergessensfaktor ..	49
16.2 Exponentielle Gewichtung mit variablem Vergessensfaktor ..	55
16.3 Beeinflussung der Kovarianzmatrix .....	58
16.4 Modelle für die Parameteränderung .....	60
16.5 Zusammenfassung .....	64

17	Numerisch verbesserte rekursive Parameterschätzmethoden .....	66
17.1	Wurzelfilterung .....	66
17.2	UD-Faktorisierung .....	69
17.3	Zusammenfassung .....	71
18	Vergleich verschiedener Parameterschätzmethoden .....	72
18.1	Vorbemerkungen .....	72
18.2	Vergleich der A-priori-Annahmen .....	74
18.3	Gütevergleich durch Simulation .....	79
18.4	Vergleich des Rechenaufwandes .....	92
18.5	Zusammenfassung .....	93
19	Parameterschätzung im geschlossenen Regelkreis .....	96
19.1	Prozeßidentifikation ohne Zusatzsignal .....	97
19.1.1	Indirekte Prozeßidentifikation (Fall a+c+e) .....	98
19.1.2	Direkte Prozeßidentifikation (Fall b+d+e) .....	103
19.2	Prozeßidentifikation mit Zusatzsignal .....	107
19.3	Methoden zur Identifikation im geschlossenen Regelkreis ..	109
19.3.1	Indirekte Prozeßidentifikation ohne Zusatzsignal ..	110
19.3.2	Direkte Prozeßidentifikation ohne Zusatzsignal ....	110
19.3.3	Direkte Prozeßidentifikation mit Zusatzsignal ....	111
19.4	Zusammenfassung .....	111
20	Verschiedene Probleme der Parameterschätzung .....	112
20.1	Wahl des Eingangssignals .....	112
20.2	Wahl der Abtastzeit .....	115
20.3	Ermittlung der Modellordnung .....	117
20.3.1	Bestimmung der Totzeit .....	118
20.3.2	Bestimmung der Modellordnung .....	120
20.4	Parameterschätzung bei integralwirkenden Prozessen .....	129
20.5	Störsignale am Eingang .....	132
D	Identifikation mit parametrischen Modellen - kontinuierliche Signale .....	134
21	Parameterbestimmung aus Übergangsfunktionen .....	135
21.1	Kennwerte einfacher Übertragungsglieder .....	135
21.1.1	Verzögerungsglied erster Ordnung .....	136
21.1.2	Verzögerungsglied zweiter Ordnung .....	139
21.1.3	Verzögerungsglied höherer Ordnung .....	142

21.1.4	Integral wirkende Glieder .....	148
21.1.5	Differenzierend wirkende Glieder .....	149
21.2	Parameterbestimmung mit einfachen Modellen (Kennwert- ermittlung) .....	150
21.2.1	Approximation durch Verzögerungsglied erster Ordnung und Totzeit .....	150
21.2.2	Approximation durch Verzögerungsglied n-ter Ordnung mit gleichen Zeitkonstanten .....	150
21.2.3	Approximation durch Verzögerungsglied zweiter Ordnung mit ungleichen Zeitkonstanten .....	153
21.2.4	Approximation durch Verzögerungsglied n-ter Ordnung mit gestaffelten Zeitkonstanten .....	154
21.2.5	Approximation durch Verzögerungsglieder n-ter Ordnung mit verschiedenen Zeitkonstanten .....	156
21.3	Parameterbestimmung mit allgemeineren Modellen .....	157
21.3.1	Methode der mehrfachen Integration .....	157
21.3.2	Methode der mehrfachen Momente .....	159
21.4	Zusammenfassung .....	161
22	Parametereinstellung durch Modellabgleich .....	163
22.1	Verschiedene Modellanordnungen .....	164
22.2	Modellabgleich mittels Gradientenmethode .....	166
22.2.1	Paralleles Modell .....	167
22.2.2	Seriellles Modell .....	170
22.2.3	Paralleles-serielles Modell .....	172
22.3	Modellabgleich mit Referenzmodellmethoden und Stabilitätsentwurf .....	175
22.3.1	Zustandsfehler .....	175
22.3.2	Verallgemeinerter Fehler .....	178
22.4	Zusammenfassung .....	179
23	Parameterschätzmethoden für Differentialgleichungen .....	181
23.1	Methode der kleinsten Quadrate .....	181
23.1.1	Grundgleichungen .....	181
23.1.2	Konvergenz .....	185
23.1.3	Ermittlung der Ableitungen .....	187
23.1.4	Ergänzungen .....	188
23.2	Konsistente Parameterschätzmethoden .....	189
23.2.1	Methode der Hilfsvariablen .....	189
23.2.2	Erweitertes Kalman-Filter, Maximum-Likelihood- Methode .....	190
23.2.3	Korrelation und kleinste Quadrate .....	190
23.2.4	Umrechnung zeitdiskreter Modelle .....	193
23.3	Zusammenfassung .....	195

24	Parameterschätzung für Frequenzgänge .....	196
24.1	Einfache Approximationsmethoden .....	196
24.1.1	Gegenseitige Abhängigkeit der Frequenzgang- koordinaten .....	197
24.1.2	Graphische Methoden .....	197
24.1.3	Analytische Methoden .....	198
24.2	Methoden der kleinsten Quadrate für Frequenzgänge .....	200
24.3	Zusammenfassung .....	204
E	Identifikation von Mehrgrößensystemen .....	205
25	Modellstrukturen zur Identifikation von Mehrgrößensystemen ....	206
25.1	Übertragungsmodelle .....	206
25.1.1	Übertragungsmatrix-Darstellung .....	206
25.1.2	Matrizenpolynom-Darstellung .....	208
25.2	Zustandsmodelle .....	209
25.2.1	Allgemeines Zustandsmodell .....	209
25.2.2	Beobachtbarkeitskanonisches Zustandsmodell .....	211
25.2.3	Steuerbarkeitskanonisches Zustandsmodell .....	214
25.3	Gewichtsfunktions-Modelle, Markov-Parameter .....	218
25.4	Zusammenfassung .....	220
26	Methoden zur Identifikation von Mehrgrößensystemen .....	222
26.1	Korrelationsmethoden .....	222
26.1.1	Entfaltung .....	222
26.1.2	Testsignale .....	223
26.2	Parameterschätzmethoden .....	226
26.2.1	Methode der kleinsten Quadrate .....	227
26.2.2	Korrelationsanalyse und kleinste Quadrate .....	228
26.3	Zusammenfassung .....	229
F	Identifikation nichtlinearer Systeme .....	230
27	Parameterschätzung nichtlinearer Systeme .....	231
27.1	Dynamische Systeme mit stetig differenzierbaren Nichtlinearitäten .....	231
27.1.1	Volterrareihe .....	231
27.1.2	Hammerstein-Modelle .....	233
27.1.3	Wiener-Modelle .....	235
27.1.4	Modell nach Lachmann .....	236
27.1.5	Parameterschätzmethoden .....	237

27.2	Dynamische Systeme mit nicht stetig differenzierbaren Nichtlinearitäten .....	240
27.2.1	Systeme mit Reibung .....	240
27.2.2	Systeme mit Lose (Tote Zone) .....	242
27.2.3	Parameterschätzmethoden .....	244
27.3	Zusammenfassung .....	244
G	Zur Anwendung der Identifikationsmethoden - Beispiele .....	245
28	Praktische Aspekte zur Identifikation .....	246
28.1	Elimination besonderer Störsignale .....	246
28.2	Verifikation des Ergebnisses .....	249
28.3	Besondere Geräte für die Identifikation .....	251
28.4	Identifikation mit Digitalrechnern .....	252
28.5	Zusammenfassung .....	254
29	Anwendungsbeispiele zur Prozeßidentifikation .....	255
29.1	Dampfbeheizter Wärmeaustauscher 1 - zeitdiskretes, lineares Modell .....	255
29.2	Dampfbeheizter Wärmeaustauscher 1 - zeitdiskretes, nichtlineares Modell .....	259
29.3	Dampfbeheizter Wärmeaustauscher 2 - zeitkontinuierliches, lineares Modell .....	261
29.4	Klimaanlage - zeitdiskretes Mehrgrößenmodell .....	263
29.5	Folientrocknungsanlage - zeitdiskretes Mehrgrößenmodell in Zustandsdarstellung .....	265
29.6	Trommeltrockner - zeitdiskretes p-kanonisches Mehrgrößenmodell .....	268
29.7	Dieselmotoren-Prüfstand - zeitdiskretes Mehrgrößenmodell .	271
29.8	Gleichstrommotor-Kreiselpumpe - zeitkontinuierliches nichtlineares Modell .....	273
29.9	Industrieroboter - zeitkontinuierliches, nichtlineares zeitvariantes Modell .....	277
	Literaturverzeichnis .....	281
	Sachverzeichnis .....	300

## 12 Maximum-Likelihood-Methode

In den vorausgegangenen Kapiteln wurden Parameterschätzmethoden behandelt, bei denen keine besonderen Annahmen über die Verteilungsdichte des Störsignals oder Fehlersignals gemacht werden mußten. Die Annahme von Modellen, deren Fehlersignal linear in den Parametern ist, erlaubte dann bei der nichtrekursiven Methode der kleinsten Quadrate eine *direkte Verarbeitung* der Daten (in einem Zug), siehe Abschnitt 1.3, was einen rechentechnischen Vorzug bedeutet. Die möglichen Strukturen der Modelle waren jedoch eingeschränkt.

Die in diesem Kapitel beschriebene Maximum-Likelihood-Methode unterscheidet sich prinzipiell von den bisher betrachteten Methoden. Sie geht von einer statistischen Betrachtungsweise aus, bei der eine Funktion der beobachteten Signale und unbekanntem Parameter, die Likelihood-Funktion, gebildet wird. Für die Verteilungsdichte des Fehlersignals müssen allerdings bestimmte Annahmen gemacht werden; das Fehlersignal braucht jedoch nicht mehr linear in allen Parametern zu sein. Einfache Verhältnisse ergeben sich allerdings nur bei Annahme einer vormalverteilten Fehlersignals. Die Maximum-Likelihood-Methode ist ein relativ allgemeines Parameterschätzverfahren. Sie erlaubt aufgrund der allgemeinen Schätztheorie Angaben über die asymptotische Güte der Konvergenz. Unter bestimmten Bedingungen ist sie asymptotisch effizient, d.h. es gibt keine anderen erwartungstreuen Schätzverfahren mit kleinerer Varianz.

Über die Entwicklung der Maximum-Likelihood-Methode berichtet Deutsch (1965). Das Prinzip der Maximum-Likelihood-Schätzung geht demnach auf Gauss (1809) zurück. R.A. Fisher (1921) hat sie jedoch als allgemeines Schätzverfahren eingeführt. Seitdem gehört sie zu den grundlegenden statistischen Schätzmethoden.

Zur Parameterschätzung dynamischer Prozesse wurde die Maximum-Likelihood-Methode zuerst von Åström, Bohlin (1966) auf Differenzgleichungen mit korreliertem Ausgangssignal (ARMAX-Modell) angewendet. Kashyap (1970) verwendete sie für Zustandsmodelle mit korrelierten Eingangsstörungen aber nichtkorrelierten Ausgangsstörungen und Mehra (1973) für Zustandsmo-

delle mit nichtkorreliertem Eingangssignal und nichtkorrelierten Ausgangsstörungen bzw. Mehra (1973) für korrelierte Ausgangsstörungen.

Die Ableitung der nichtrekursiven Maximum-Likelihood-Methode soll im folgenden in Anlehnung an Åström, Bohlin (1966) und Åström (1980) erfolgen. Dann schließt sich die Beschreibung einer rekursiven Form an, die durch Vereinfachungen aus der nichtrekursiven ML-Methode hervorgeht. Schließlich wird noch eine unterste Schranke für die Kovarianzen der Parameterschätzwerte behandelt, die Cramér-Rao-Ungleichung.

## 12.1 Nichtrekursive Maximum-Likelihood-Methode (ML)

Es wird ein Modell des dynamischen Prozesses in der ARMAX-Form

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(z^{-1})y(z) - \hat{B}(z^{-1})u(z) &= \hat{D}(z^{-1})e(z) & (12.1-1) \\ \hat{A}(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m} \\ \hat{D}(z^{-1}) &= 1 + d_1z^{-1} + \dots + d_mz^{-m} \end{aligned} \right\} \quad (12.1-2)$$

angenommen, wobei  $e$  ein statistisch unabhängiges normalverteiltes Signal ( $0, \sigma_e$ ) ist und alle Wurzeln von  $D(z)$  im Inneren des Einheitskreises liegen.

Zum Vergleich sei an das Modell der Methode der kleinsten Quadrate erinnert, Gl.(8.1-9),

$$\hat{A}(z^{-1})y(z) - \hat{B}(z^{-1})u(z) = \epsilon(z). \quad (12.1-3)$$

Der Gleichungsfehler  $\epsilon$  mußte nach Satz 8.2 nichtkorreliert sein, damit eine biasfreie Parameterschätzung ermöglicht wird. Aus dem Vergleich von Gl.(12.1-1) und (12.1-3) folgt

$$\epsilon(z) = \hat{D}(z^{-1})e(z). \quad (12.1-4)$$

Für das Modell Gl.(12.1-1) ist  $\epsilon(z)$  zu einem Prozeß mit gleitendem Mittel (moving average process) erweitert worden. Der Gleichungsfehler  $\epsilon$  ist für diesen Fall somit ein korreliertes Signal, das durch das Filter  $1/\hat{D}(z^{-1})$  in ein nichtkorreliertes Fehlersignal umgeformt wird, Bild 12.1.

Mit diesen Annahmen muß der Prozeß also die Struktur

$$y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(z) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v(z) \quad (12.1-5)$$

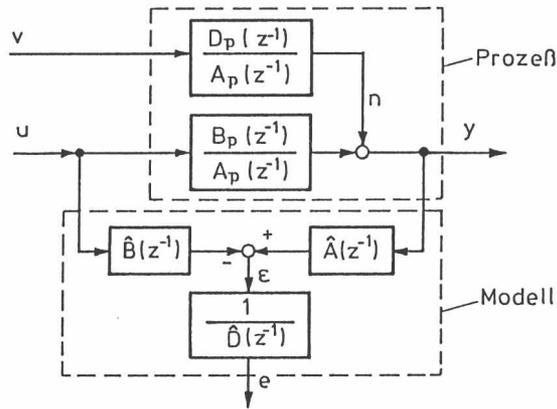


Bild 12.1 Struktur von Prozeß und Modell für die Maximum-Likelihood-Methode

haben (ARMAX-Modell), wenn  $v$  ein nichtkorreliertes Störsignal ist, und  $v=e$  gesetzt wird. Diese Struktur ergibt sich auch bei der Zustandsdarstellung siehe Abschnitt 18.2.

Zur Ableitung der Maximum-Likelihood-Methode muß das beobachtete Ausgangssignal  $y(k)$  eine bestimmte Verteilungsdichte aufweisen. Da sich nur bei Annahme eines normalverteilten Ausgangssignales überschaubare Gleichungen ergeben, sei *Normalverteilung* der  $y(k)$  angenommen.

Die bedingte Verteilungsdichte der beobachteten Signalwerte  $\{y(k)\}$  für gegebene Eingangssignalwerte  $\{u(k)\}$  und für gegebene Parameter  $\underline{\theta}=[a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_m; d_1, \dots, d_m, \sigma_e]$  werde mit

$$p[\{y(k)\}|\{u(k)\}, \underline{\theta}] = p[\underline{y}|\underline{u}, \underline{\theta}]$$

bezeichnet und sei bekannt, Bild 12.2.

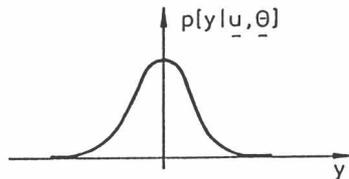


Bild 12.2 Bedingte Verteilungsdichte des beobachteten Signals  $y(k)$

In diese Gleichung für die Verteilungsdichte werden die gemessenen Werte  $y_p(k)$  und  $u_p(k)$  eingesetzt. Dann erhält man die *Likelihood-*

Funktion

$$p[\underline{y}_p | \underline{u}_p, \underline{\theta}],$$

die man in Abhängigkeit von den unbekanntem Parametern  $\theta_i$  betrachtet, Bild 12.3.

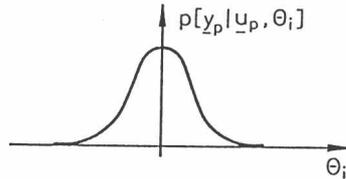


Bild 12.3 Likelihood-Funktion für einen einzigen Parameter  $\theta_i$

Da die Parameter  $\theta_i$  Konstanten sind und keine stochastischen Variablen, ist die Likelihood-Funktion keine Verteilungsdichte der Parameter. Der Methode des Maximum-Likelihood liegt nun der Gedanke zugrunde, daß die besten Werte der unbekanntem Parameter  $\theta_i$  diejenigen sind, die dem beobachteten Ergebnis die größte Wahrscheinlichkeit verleihen. Das sind offensichtlich diejenigen Parameterwerte, die die Likelihood-Funktion maximieren. In bezug auf mehrere Parameter gilt dann als Ausgangsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} p[\underline{y}_p | \underline{u}_p, \underline{\theta}] = 0. \quad (12.1-6)$$

Da die  $\underline{y}_p = \{y_p(k)\}$  nicht statistisch unabhängig voneinander sind, läßt sich die bisher betrachtete Verteilungsdichte nicht unmittelbar angeben. Zur Bildung der Likelihood-Funktion wird deshalb die Verteilungsdichte

$$p[\underline{e} | \underline{u}_p, \underline{\theta}]$$

des Fehlersignals  $e(k)$  verwendet, das ebenfalls wie  $y(k)$  normalverteilt ist, falls  $A(z^{-1})/D(z^{-1})$  ein *lineares Filter* ist. Es wird als *statisch unabhängiges Signal* angenommen. Deshalb gilt für seine bedingte Verteilungsdichte bei  $N$  gemessenen Signalen

$$\begin{aligned} p[\underline{e} | \underline{u}, \underline{\theta}] &= p[e(1) | \underline{u}, \underline{\theta}] \cdot p[e(2) | \underline{u}, \underline{\theta}] \cdot \dots \cdot p[e(N) | \underline{u}, \underline{\theta}] \\ &= \prod_{k=1}^N p[e(k) | \underline{u}, \underline{\theta}]. \end{aligned} \quad (12.1-7)$$

Diese Funktion muß entsprechend Gl.(12.1-6) abgeleitet werden. Da die Ableitung eines aus vielen Faktoren bestehenden Produktes jedoch unan-

genehm zu handhaben ist, bildet man den Logarithmus der Likelihood-Funktion

$$L = \ln p[\underline{e}|\underline{u},\underline{\theta}] = \sum_{k=1}^N \ln p[e(k)|\underline{u},\underline{\theta}]. \quad (12.1-8)$$

Dadurch wird die Lage der Maxima der Likelihood-Funktion bezüglich der Parameter  $\underline{\theta}$  nicht verändert. Die Parameterschätzung erfolgt schließlich durch Lösen der *Maximum-Likelihood-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} L = \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \sum_{k=1}^N \ln p[e(k)|\underline{u},\underline{\theta}] = \underline{0}. \quad (12.1-9)$$

Diese Gleichung gilt noch für beliebige differenzierbare Verteilungsdichten. Das Einführen einer *Normalverteilung* erleichtert jedoch die folgende Rechnung wesentlich. Mit  $E\{e(k)\}=0$  gilt dann für einen einzigen Signalwert zum Zeitpunkt  $k$

$$p[e(k)|\underline{u},\underline{\theta}] = \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} e^2(k)/\sigma_e^2\right], \quad (12.1-10)$$

und für  $N$  Signalwerte nach Gl. (12.1-7)

$$p[\underline{e}|\underline{u},\underline{\theta}] = \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} e^2(k)/\sigma_e^2\right] \quad (12.1-11)$$

wenn die Standardabweichung  $\sigma_e$  aller Fehlersignale  $e(k)$  gleich ist.

Der Logarithmus der Likelihood-Funktion wird dann nach Gl. (12.1-8)

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}) &= \ln \left[ \left[ \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} \right]^N \cdot \prod_{k=1}^N \exp\left[-\frac{1}{2} e^2(k)/\sigma_e^2\right] \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{k=1}^N e^2(k) - N \ln \sigma_e - \frac{N}{2} \ln 2\pi. \end{aligned} \quad (12.1-12)$$

Diese Gleichung muß nun bezüglich der unbekannt Parameter  $a_i, b_i, d_i$  und  $\sigma_e$  maximiert werden. Bezeichnet man die in Gl. (12.1-12) auftretende Verlustfunktion mit

$$V(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k) \quad (12.1-13)$$

dann muß gelten

$$\frac{\partial}{\partial a_i} V(\underline{\theta}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial b_i} V(\underline{\theta}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial d_i} V(\underline{\theta}) = 0 \quad (12.1-14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_e} = 2 \sigma_e^{-3} V(\underline{\theta}) - N \sigma_e^{-1} = 0. \quad (12.1-15)$$

Aus der letzten Gleichung folgt direkt als Schätzwert für die Varianz