

理论力学
疑难及易混
问题分析

贾玉江 刘云鹏 战永杰



理论力学 疑难及易混问题 分析

LI LUN LI XUE YI NAN JI YI HUN
WEN TI FEN XI

东北师范大学出版社

东

31

5

版
土

理 论 力 学

疑难及易混问题分析

贾玉江 刘云鹏 战永杰

•

东北师范大学出版社出版

(长春市斯大林大街110号)

吉林省新华书店发行

长春市第四印刷厂印刷

•

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 11 字数: 236千

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数: 1—6 500

ISBN 7-5602-0024-9/O·9

统一书号: 13334·24 (压膜)定价: 2.00元

前 言

理论力学是大学理工科的一门基础理论课。力学中的一些概念、理论和规律，不仅对研究机械运动是必要的，而且对进一步学习其他理论物理课程也是不可少的。在多年的教学过程中，我们发现不少学生对理论力学中的基本概念、基本理论掌握得不够好，因而运用力学规律解决实际问题的能力不强。其中突出的问题是对许多理论和概念问题混淆不清，因而在实际应用中出现错误。

为此，我们在开展教学研究、总结多年教学经验的基础上，基本按着现行理科通用教材（如周衍柏《理论力学教程》、肖士珣《理论力学简明教程》）的章节顺序，对理论力学的基本概念、理论及其应用中经常遇到的疑难及容易混淆的问题，如一对内力的元功之和的特点和求法，相对什么样的动点的角动量对时间的变化率与惯性力矩无关，广义能量积分的物理意义等等，都作了明晰的解释。

本书是在分题准备的基础上经过集体讨论，再进行修订，通过试用，最后才定稿完成的。在讨论过程中，东北师范大学物理系原力学教研室肖士珣教授、张世泽副教授自始至终参加了讨论。张世泽副教授审阅了全书的初稿，并提出了宝贵的意见。在此，我们一并表示感谢。

本书各章执笔人是：贾玉江（第一章、第三章）、刘云鹏（第二章、第四章）和战永杰（第五章）。全书由贾玉江

进行了文字上的统校。由于我们水平所限，错误之处在所难免，敬请批评指正。

编 者

1986年12月

目 录

第一章 质点力学

- § 1·1 质点运动学 (1)
 - 1. 径向加速度与法向加速度的区别 2. 质点的绝对速度、相对速度与牵连速度
- § 1·2 质点动力学 (6)
 - 1. 牛顿运动定律的适用条件 2. 质点运动微分方程几种可直接积分的情况 3. 约束力的特点
- § 1·3 功和能 (16)
 - 1. 功的概念和本质 2. 保守力的特点 3. 势能
 - 的值是相对的
- § 1·4 质点动力学的基本定理及其应用 (28)
 - 1. 力学中的状态量与过程量 2. 如何求解有心力作用下质点的运动轨道

第二章 质点组力学

- § 2·1 质点组 (37)
 - 1. 研究质点组动力学的必要性 2. 内力、外力及机械内力的性质 3. 非机械内力的矢量和不一定为零 4. 一般的质点组不能求合力
- § 2·2 动量定理与动量守恒 (43)
 - 1. 质点组的动量是表征质点组随质心平动的特

征量 2.对动量定理与动量守恒定律的理解

3.用动量定理解题要注意相对运动的 同时性

4.外力的冲量和为零不是动量守恒的充要条件

5.在有外力的情况下,内力可以影响质心的运动

§ 2·3 角动量定理与角动量守恒 (56)

1.质点组的角动量是描写其绕矩心转动的特征

量 2.对角动量定理与角动量守恒定律的理

解 3.角动量守恒与参考点的选取有关 4.

动量守恒时,角动量不一定守恒

§ 2·4 动能定理与机械能守恒 (65)

1.对质点组动能定理和机械能守恒定律的理解

2.力的矢量和为零不能说力做功的代数和也为

零 3.对“有动能就一定有动量”及“有动量

也一定有动能”说法的讨论 4.质点组内力

做功的特点及其在讨论机械能守恒时的意义

5.如何理解汽车牵引力做功问题 6.外力是否

为保守力与参照系的选取有关

§ 2·5 动量定理、角动量定理及动能定理与平 动参照系的关系 (78)

1.动量、角动量、功与能的相对性及动力学普

遍定理对惯性系的不变性 2.功与能的相对

性是否同能量守恒及转换定律相矛盾 3.如

何选取动点才能使动力学普遍定理表示式中

不出现惯性力的作用

§ 2·6 二体问题 (93)

1.二体问题的运动微分方程及折合质量的物理

意义 2.牛顿公式 $e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$ 的成立是有条

件的

§ 2·7 变质量物体的运动	(101)
1. 如何理解变质量物体的运动微分方程	

第三章 刚体力学

§ 3·1 刚体运动学	(112)
1. 有限转动与无限小转动的区别 2. 刚体角速度的合成与分解 3. 刚体转动的角速度与基点的选取无关	
§ 3·2 作用在刚体上的力	(119)
1. 力学中的固定矢量、滑移矢量和自由矢量	
2. 作用在刚体上的外力的矢量和与合(外)力的区别 3. 滚动摩擦	
§ 3·3 刚体的转动惯量与惯量椭球	(127)
1. 刚体对轴的转动惯量 2. 如何描述刚体对一点的转动惯性 3. 关于转动惯量的平行轴定理 4. 刚体对通过定点的任意轴的转动惯量 5. 刚体对一点的惯量椭球 6. 刚体惯量主轴的求法	
§ 3·4 刚体的定轴转动	(147)
1. 刚体定轴转动时对轴上各点的角动量 2. 刚体定轴转动的动力学方程 3. 静反力、动反力和附加压力 4. 动平衡和静平衡	
§ 3·5 刚体的平面平行运动	(166)
1. 刚体的平面平行运动与刚体的平动的区别 2. 刚体的平面平行运动与定轴转动的对比分析 3. 刚体平面平行运动的运动学的解法 4. 刚体平面平行运动的动力学的解法	
§ 3·6 刚体的定点运动	(185)

1. 如何描述刚体的定点运动 2. 刚体定点运动的欧勒动力学方程 3. 刚体定点运动问题的解

第四章 非惯性参照表

§ 4.1 相对运动的基本概念 (197)

1. 绝对角速度、相对角速度和牵连角速度 2. 平面极坐标系可以看做平面转动参照系 3.

绝对微商、相对微商与牵连微商及

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 与 $\frac{d^*\mathbf{v}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{v}'}{dt}$ 与 $\frac{d^*\mathbf{v}'}{dt}$ 的区别

§ 4.2 非惯性参照系中的运动微分方程 (205)

1. 在非惯性系中如何对物体进行受力分析 2.

惯性离心力与离心力的区别 3. 科氏力与科氏加速度

§ 4.3 非惯性系中的动量定理、角动量定理、动能定理及相应的守恒定律 (213)

1. 动量定理的形式及动量守恒的条件 2. 角动

量定理的形式与角动量守恒的条件 3. 动能

定理的形式与机械能守恒的条件 4. 机械能

守恒与参照系的选取有关 5. 在何条件下机

械能守恒与参照系选取无关

§ 4.4 地球自转对其周围物体运动的影响 (226)

1. 地球自转对抛体运动的影响 2. 如何在惯性

系中解释地面附近发生的一些现象

第五章 分析力学

§ 5.1 约束与广义坐标 (238)

1. 稳定约束与不稳定约束的关系	2. 完整约束与非完整约束的关系	
§ 5.2	虚功原理与达朗伯原理	(242)
1.	对不稳定约束而言实位移不属于虚位移之列	
2.	如何正确理解理想约束	3. 关于虚功原理的几点说明
4.	如何由虚功原理导出自由刚体的平衡条件	5. 广义力的物理意义及其求法
6.	如何正确理解达朗伯原理及其惯性力	
§ 5.3	拉格朗日方程	(256)
1.	拉格朗日方程的物理含义	2. 应用拉格朗日方程解题应注意的几个问题
3.	由拉格朗日方程导出狭义相对论的质点运动方程	4. 有势场与保守场的区别
5.	时空对称性与守恒定律的关系	6. 惯性系与非惯性系的时空本质
7.	从拉格朗日方程看时间的各向同性	
8.	从时空特征导出广义动量积分	9. 广义能量积分的物理意义
10.	动量(或角动量)守恒条件的两种表述对比	
§ 5.4	微振动	(279)
1.	与普物中振动的关系	2. 微振动与拉格朗日方程线性化的关系
3.	微振动只能发生在稳定平衡位置附近	4. 如何理解简正坐标和简正振动
§ 5.5	正则方程	(289)
1.	哈密顿动力学的优点	2. 位形空间与相空间
3.	由 $L(q_a, \dot{q}_a, t)$ 到 $H(q_a, p_a, t)$ 的勒让德变换	4. 如何由正则方程导出欧勒动力学方程
§ 5.6	泊松括号和泊松定理	(301)

1. 用泊松括号表示正则方程 2. 证明泊松恒等式的一种方法 3. 正则变量函数间的对易性和正则共轭性 4. 关于泊松定理的说明 5. 用泊松括号证明有心力场中质点的角动量积分

§ 5.7 哈密顿原理 (313)

1. 力学的变分原理与非变分原理 2. 哈密顿原理的表述问题 3. 作用量的物理意义 4. 哈密顿原理的物理意义

§ 5.8 正则变换 (319)

1. 正则变换理论的基本思想 2. 分析正则变换条件的思想依据 3. 利用勒让德变换确定四种正则变换的条件式

§ 5.9 哈密顿——雅科毕方程 (324)

1. 推导H—J方程的一种方法 2. H—J方程的几种特殊情况 3. 关于H—J方程的数学说明 4. 关于H—J方程的物理解释 5. 如何应用H—J方程解题

第一章

质点力学

§1.1 质点运动学

1. 径向加速度与法向加速度的区别

有人说：既然加速度的表达式 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}$ ，而 $\mathbf{r}$ 又是从坐标原点引向质点所在位置的矢径，那么 $\ddot{\mathbf{r}}$ 就是径向加速度了。

实际上， $\ddot{\mathbf{r}}$ 并不是径向加速度的全部，而只是径向加速度的一部分。在平面极坐标中，质点的速度， $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}^\circ + r\dot{\theta}\mathbf{p}^\circ$ ，而加速度

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}^\circ + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{p}^\circ$$

其中 $\ddot{r}$ 是由于径向速度 $\dot{r}\mathbf{r}^\circ$ 的大小 $\dot{r}$ 的变化引起的，仍然沿着矢径的方向，所以是径向加速度的一部分。但径向加速度中还包含有另外一项 $-r\dot{\theta}^2\mathbf{r}^\circ$ ，它是由于横向速度 $r\dot{\theta}\mathbf{p}^\circ$ 的方向 $\mathbf{p}^\circ$ 发生变化（ $\mathbf{p}^\circ$ 的时间变化率为 $-\dot{\theta}\mathbf{r}^\circ$ ）引起的。所

以径向加速度是上述两项之和，即 $\mathbf{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}^\circ$ ，而法向加速度是质点的加速度在自然坐标系中的一个分量。

如果选择质点运动轨道上某一点为自然坐标的原点，并规定曲线的某一方向为自然坐标的正方向，则质点在轨道上任一位置的速度可写成

$$\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau}^\circ$$

其中 $\boldsymbol{\tau}^\circ$ 是质点所在位置处轨道切线方向的单位矢量（沿自然坐标的增加方向），而 v_τ 则是质点速度在 $\boldsymbol{\tau}^\circ$ 方向的投影。

质点在自然坐标系中的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \boldsymbol{\tau}^\circ + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^\circ$$

式中 $\frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^\circ$ 就是法向加速度（亦称向心加速度），指向质点

所在处轨道的曲率中心； ρ 是轨道在质点所在处的曲率半径。规定曲线的凹向为主法线的正方向（单位矢量为 $\mathbf{n}^\circ$ ），在副法线上质点的加速度为零。

可见径向加速度和法向加速度根本不是一回事。一个是平面极坐标系中的量，一个是自然坐标系中的量。

有人将平面极坐标系中径向加速度的一部分 $-r\dot{\theta}^2 \mathbf{r}^\circ$ 也称为向心加速度，在不致引起混乱的情形下也是可以的。不过这时的“心”，不是质点运动轨道所在处的曲率中心，而是平面极坐标系的坐标原点，即极点。

只有当质点作圆周运动，并且选择圆心作为极坐标系的原点时，才有质点的径向加速度等于质点的法向加速度。因为此时 $r = \rho$ ， $\dot{r} = 0$ ， $v^2 = v_\tau^2 = r^2 \dot{\theta}^2$ ，所以

$$\mathbf{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{r}^\circ = -r\dot{\theta}^2 \mathbf{r}^\circ$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} n^\circ = r \dot{\theta}^2 n^\circ$$

而 $r^\circ = -n^\circ$ ，所以 $a_r = a_{..}$ 。

2. 质点的绝对速度、相对速度与牵连速度

质点的速度（矢量）是表征质点运动快慢及运动方向的物理量。但是在谈到某一质点的运动速度时，一定要指明这个质点是相对于哪一个物体或参照系的速度。要描述具体的运动，必须选定某一参照物或参照系作为定位的标准。对不同的参照物，质点的速度是不同的。所以质点的速度是一个相对的量，即对不同的参照物，质点具有不同的速度（包括量值与方向）。

设质点相对某一参照物 A 的速度是 v 。另外还有一物体 B ，它相对参照物 A 而运动。我们为了确定质点对 A 、 B 的运动之间的关系，可以假设参照物 A 是不动的，把它称做描述质点运动的固定参照系，而把物体 B 称做描述质点运动的运动参照系。显然，质点相对于参照系 A 、 B 的速度不同。我们把质点相对于运动参照系 B 的运动叫做质点的相对运动，质点相对运动的速度就是质点的相对速度，用 v' 表示。质点相对于固定参照系 A 的运动叫做质点的绝对运动，质点绝对运动的速度就是质点的绝对速度，用 v_a 表示。

至于质点的绝对速度与质点的相对速度的关系，一般课本都有证明，结论是：质点的绝对速度 v_a 等于质点的相对速度与质点的牵连速度 v_e 的矢量和，可写作

$$v_a = v' + v_e \quad (1)$$

问题的关键在于什么是质点的牵连速度 v_e 。有人说：运动参照系的速度就是牵连速度，这是不够确切的。质点的

牵连速度的严格定义是：由于运动参照系的运动而使质点所具有的相对固定参照系的速度叫做质点的牵连速度；某时刻质点的牵连速度，等于该时刻动参照系上与质点位置重合的点的速度。

为了明悉质点的牵连速度的物理意义，我们在参照系A与B上分别建立坐标系 $0-xyz$ 及 $0'-x'y'z'$ （也可为其它坐标系）。如图1-1所示，质点P相对于两个坐标系的位置关系为

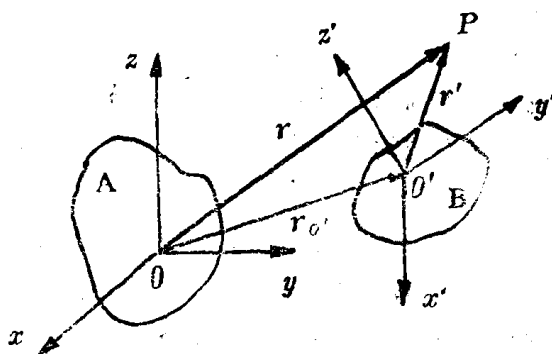


图 1-1

置关系为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'}$$

利用速度的定义式 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ，则有

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} \quad (2)$$

其中， $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 是质点相对固定坐标系的位置矢量对时间的变化

率，即质点的绝对速度。由(2)式可见，质点的绝对速度由两项组成。根据(1)式，它们就是质点的相对速度与质点的牵连速度的矢量和。但(2)式右侧哪一项是质点的相

对速度、哪一项是质点的牵连速度呢？能说 $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ 就是质点的

相对速度、 $\frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt}$ 就是质点的牵连速度吗？不能！

假设运动参照系既作平动、又有转动，并设 t 时刻动系的转动角速度为 ω ，则根据矢量的微商法则，有

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d^*\mathbf{r}'}{dt} + \omega \times \mathbf{r}' \quad (3)$$

通常称 (3) 式右方第一项为相对微商，而第二项称做牵连微商。

$\frac{d^*\mathbf{r}'}{dt}$ 是质点相对于运动坐标系的位置矢量对时间的相对微商（这时并不涉及动系的运动，而只考虑质点相对于动系的运动），这正是质点的相对速度 $\mathbf{v}'$ 。

(3) 式右方第二项 $\omega \times \mathbf{r}'$ 表示 t 时刻由于运动参照系的转动而使质点所具有的相对固定参照系的速度，这是牵连速度的一部分。另一部分是由于运动参照系的平动而使质点所具有的相对固定参照系的牵连速度。由于系统平动时，系统上各点具有相同的速度，所以由于动系的平动而使质点具有的牵连速度也就等于动系原点 O' 的速度 $\frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt}$ 。结果，由于

动系既作平动又作转动而使质点所具有的总的牵连速度即为上述两种牵连速度的矢量和，即

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{r}_{o'}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}' \quad (4)$$

将 (3) 式代入 (2) 式，再利用 (4) 式恰得 (1) 式。

总之，对牵连速度的理解，要注意以下三点：

(1) 当谈到牵连速度时, 总是指的质点的牵连速度。它是由于运动参照系的运动而使质点所具有的(相对固定参照系的)速度。那种说运动参照系的速度就是牵连速度的提法是不确切的。在运动参照系有转动时, 说运动参照系的速度而不指明动系上哪一点的速度是毫无意义的。

(2) 质点的牵连速度的量值与方向, 不仅与动系的运动有关, 而且也与质点相对动系的位置(矢量)有关。由

(4) 式可以看出, v_e 不仅与 $v_o = \frac{d\mathbf{r}_o}{dt}$ 及 ω 即动系的平动速度

度及转动角速度有关, 而且也与 $\mathbf{r}'$ 有关。

(3) 不论质点在动系中运动与否, 只要动系在运动, 质点就有牵连速度。如果质点在动系中运动, 则质点还有相对动系的相对速度, 质点的绝对速度就等于其相对速度与牵连速度的矢量和。如果质点在动系中静止不动, 则质点的绝对速度就等于其牵连速度。

§1.2 质点动力学

1. 牛顿运动定律的适用条件

有人说: 牛顿三定律只是在古典力学的范围——即宏观物体、低速运动的条件下适用, 它对微客体及高速运动不适用。

这种观点是不全面的。

诚然, 牛顿三定律是在古典力学的范围——即宏观物体、低速运动的条件下建立起来的。但是, 牛顿三定律建立起来以后, 它又不单单是宏观物体低速运动的规律, 在某些

件下，它也能适用于微客体及高速运动的情况。

在掌握牛顿三定律的适用条件时，需注意以下几点：

(1) 牛顿三定律适用于宏观物体，但是对一些忽略波动性的经典粒子，如分子、原子……，在研究其机械运动的规律时，牛顿三定律也是适用的。

所谓宏观物体，是指其内部包含大量分子、原子的体系。当把整个物体当作研究对象，而不涉及其内部的分子、原子结构及其运动时（或者说只研究质心的运动规律时），牛顿定律是适用的。

对分子、原子、电子、基本粒子等所谓微观粒子，它们同时具有粒子性与波动性，而且粒子的能量和角动量不取连续的数值而取分立的数值，它们的运动规律应该用量子力学来处理。但是，当粒子的能量比较大且作用于粒子的力（力场）的变化比较缓慢时，则其量子力学的方程趋近于经典力学的规律。

判断一个粒子的运动规律能否用经典力学的规律来处理，就看其与普朗克常数 h 的关系。普朗克常数 $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ ，具有〔能量〕 $\times$ 〔时间〕、〔动量〕 $\times$ 〔长度〕或〔角动量〕的量纲。如果普朗克常数在粒子的运动中不起作用，即相当于 $h \rightarrow 0$ ，则粒子的运动就可用经典力学的规律来处理。例如，我们研究一个离子的运动，其质量为 $5 \times 10^{-26} \text{kg}$ ，速率为 $8 \times 10^5 \text{m/s}$ ，绕半径为 0.28m 的圆周运动，则其角动量为 $1.1 \times 10^{-20} \text{J} \cdot \text{s}$ ，差不多是 h 的 10^{13} 倍，因此可按经典力学的规律来计算。

(2) 牛顿三定律适用于物体的低速运动。

牛顿第二定律，在初等力学中一般表示为

$$ma = F \quad (1)$$