线性代数

杨茂信 陈璞华 庚镜波 编

华南理工大学出版社

工 程 数 学

线 性 代 数

（第三版）

杨茂信　陈璞华　庚镜波　编

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据1986年高等学校教材编审委员会制订的“线性代数教学基本要求”和1993年5月高等学校工科数学课程教学指导委员会“关于工科数学课程教学的基本要求”，经华南理工大学等院校使用七届，反复修改后，以第三版出版。内容为：行列式、矩阵、线性方程组、向量与向量空间、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换，每章配有习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等理工科院校各专业学生用教材，也可作为自学教材和工程技术人员的参考书。

工 程 数 学

线 性 代 数

（第 三 版）

杨茂信　陈璞华　庾镜波　编

责任编辑　刘赞华

•

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮码 510641）

广东省新华书店经销

广州利达印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张8.125字数 185 千

1988年7月第1版　1995年2月第3版第3次印刷

印数：14001—22000

ISBN 7-5623-0059-31

O·7　定价：6.8元

第 三 版 说 明

使用本教材的教师认为第二版的编排比较适合专业不同层次的要求，因此本版在内容编排上没有作大变动，但根据任课老师的意见对该书进行了修改和补充，使之更充实。

在这次修改教材中，庄楚强，黄兵仁，杨伦标，刘研平等老师提出了许多宝贵意见，在此谨向他们表示衷心感谢。

编　者

一九九四年九月十二日

目　　录

第一章　行列式

行列式在数学中,特别在线性代数中有着广泛的应用.本章主要介绍n阶行列式的概念，基本性质，及其按行（列）展开定理.

§1　n阶行列式

一、全排列及其逆序数

在中学代数里知道，由自然数1，2，3，…，n组成一个有序数组，称为1，2，3，…，n的一个全排列（简称排列）.

n个不同元素的所有排列的种数，通常用P_n表示.

$$P_n = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

在全排列里,自然数按照从小到大的一个排列$123\cdots n$称为顺序排列. 一个排列中两个自然数的前后位置如果与从小到大的顺序相反，我们就说它们构成了一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数. 逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列. 顺序排列的逆序数为0，属于偶排列.

例如,排列132的逆序数为1；312的逆序数为2. 132是奇排列；312是偶排列.

排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例 1 求$\tau(n\quad n-1\cdots 2\quad 1)$.

解 在排列$n\quad n-1\cdots 2\quad 1$中，$n$与后面$n-1$个数都组成逆序；一般地$k$（$k>1$）与它后面$k-1$个数也都组成逆序. 所以

$$
\begin{aligned}
&\tau(n\quad n-1\cdots 2\quad 1)\\
&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\
&=\frac{1}{2}n(n-1)
\end{aligned}
$$

二、对换

为了探讨行列式的性质，我们还需引入对换的概念.

把自然数的一个排列中某两个数的位置互换，称为对这个排列施行一次对换.

定理 1 每个排列经过一个对换，将改变其奇偶性.

证 1. 先考虑相邻两数对换的情形. 设原来排列为$\cdots ij\cdots$；把i，j对换一次，便得到新排列$\cdots ji\cdots$. 比较这两个排列的逆序数，因为原来位于数i之前的每个数在i，j对换以后，仍然位于i，j之前，而原位于j后面的每个数在i，j对换后，也仍然在i，j之后，所以有关它们的逆序数保持不变. 如果ij是逆序，对换后ji便成顺序；如果ij是顺序，则ji便变成逆序. 由此可知，从原排列$\cdots ij\cdots$变成$\cdots ji\cdots$，逆序数或者减少1或者增加1，所以它们的奇偶性刚好相反，即奇排列变成偶排列，而偶排列则变成奇排列.

2. 再考虑i与j不相邻的情形. 设i与j中间尚有s个数，不妨记为$k_{k_1}k_2\cdots k_s$，如果依次进行相邻对换(i, k_1)，(i, k_2)，…，(i, k_s)，那么，经过这s次相邻对换后，原排

列便变成排列$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots$，接着再作相邻对换$(i, j)$，$(k_s, j)$，…，$(k_1, j)$，经过$s+1$次相邻对换后，排列又变成$\cdots jk_1\cdots k_si\cdots$，这就说明：把排列$\cdots i\cdots j\cdots$，作一个对换$(i, j)$，变成排列$\cdots j\cdots i\cdots$，这个变换可以通过上述$2s+1$次相邻对换来实现. 由1°知每次相邻对换将改变排列的奇偶性，可知经过奇数$(2s+1)$次对换后，新排列$\cdots j\cdots i\cdots$与原排列$\cdots i\cdots j\cdots$的奇偶性相反.

推论　全部n级排列中，奇排列与偶排列各占一半，都是$\frac{n!}{2}$个$(n\geqslant 2)$.

证　假设在$n!$个n级排列中有p个奇排列，q个偶排列，我们来证：$p=q$.

将这p个奇排列的头两个数字都作一个对换，例如，将$i_1i_2\cdots i_n$变为$i_2i_1\cdots i_n$，于是就得到p个偶排列，而且这p个排列各不相同. 但是偶排列一共有q个，所以$p\leqslant q$. 同理，将q个偶排列的头两个数字对换，便得到q个不同的奇排列，因此$q\leqslant p$. 由此即得$p=q$，即奇排列的总数与偶排列的总数一样，因为这两种排列一共有$n!$个，所以它们各有$\frac{n!}{2}$个.

在中学里已经讲过，三阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \doteq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1}$$

其中记号a_{ij}的第一下标i称为行标，第二下标j称为列

标，a_{ij}表示位于等式左边行列式中第 i 行第 j 列上的元素.

为了引入一般的即 n 阶行列式的概念，我们首先看看三阶行列式的结构.

三阶行列式从结构看都具有如下几个特点：

(1) 三阶行列式都是若干项的代数和，而每一项都是行列式中位于不同行不同列上的三个元素的乘积，一般可写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$，其中的 $i_1i_2i_3$ 是自然数 1，2，3 的一个全排列.

(2) 三阶行列式的每项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$的符号，决定于全排列 $i_1i_2i_3$ 的逆序数：当 $i_1i_2i_3$ 是偶排列时，项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$的符号取正号；反之，当 $i_1i_2i_3$ 是奇排列时，则项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$的符号取负号.

(3) 由三个自然数 1，2，3 组成的所有不同的全排列共有 6 个，相应地三阶行列式便有六个项.

我们对三阶行列式的结构作了分析，总结出三个规律，概括起来，三阶行列式可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2i_3)} (-1)^{(i_1i_2i_3)} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3} \qquad (2)$$

其中 $\sum\limits_{(i_1i_2i_3)}$ 是指对所有排列 $(i_1i_2i_3)$ 求和，τ $(i_1i_2i_3)$ 是排列 $i_1i_2i_3$ 的逆序数.

将三阶行列式的规律加以推广，我们有

定义 1 没有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}$$

$$a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$得到形如

$$(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

的项，其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，$\tau^{(i_1i_2i_3)}$ 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而式（3）的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2j_2}\cdots a_{ni_n} \tag{4}$$

称为n **阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

特别当 $n=1$ 时，由数 a 确定的一阶行列式就是数 a 本身.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由于这个行列中，当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$. 行列式中凡是含有这些零因子的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$均为零，因此

$$D=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

$$=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(12\cdots i_n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{ni_n}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \tag{6}$$

这就是说，这行列式除了主对角线上 n 个元素 $a_{11}a_{12}\cdots$，a_{nn}的乘积这一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$外，其余各项由于至少含有一个因子 0 而均为零，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

以上形式的行列式，通常称为下三角形行列式.

同理，对上三角形行列式，也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{7}$$

特殊情形

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \tag{8}$$

这种除了主对角线上的元素之外，其余元素均为 0 的行列式称为对角形行列式.

依照定义，我们不难算出

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} \tag{9}$$

§2 n阶行列式的性质

行列式的性质是化简和计算行列式的依据，

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

行列式 D' 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.　(10)

（证明省略）

由于 D 的列（行）经过转置便是 D' 的行（列）. 因此在行列式中，凡对行成立的性质，根据性质 1 可知对列也成立，反之亦然. 这说明：在行列式中，行与列的地位是同等的.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

证　设行列式 D 互换 i，j 两行，等到行列式 D_1：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

为了说明方便，我们把 D_1 重新记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $k\neq i$，j 时，$b_{kp}=a_{kp}$；

当 $k=i$，j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，($p=1$，2，…，n). 根据行列式的定义，

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为顺序排列，τ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，记排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 逆序数为 τ'，因为一次对换 (p_i，p_j) 改变了排列的奇偶性，所以 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau'}$，

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\ &=-\sum(-1)^{\tau'}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\ &=-D. \end{aligned}$$

推论　如果行列式有两行（列）对应元素相同，则此行列式为零.

证　一方面，由于两行对应元素相同，所以互换这两行与没有互换时的行列式一样；另一方面，根据性质 2，互换这两行后，新行列式　$D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3　把行列式的某一行（列）的每个元素乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

（依定义可证，这里从略）

这个性质指出：当行列式的某一行（列）的各元素存在公因子 k 时，可以将这公因子 k 提到行列式外面去.

推论　若行列式的某一行（列）的各元素均为 0，则此行列式等于零.

性质 4　若行列式中有两行（列）对应元素成比例，则此行列式等于零.

证　因为在成比例的两行（列）中，若把其中的一行（列）提出比例常数 k 后，剩下行列式便有两行（列）对应元素是相同的，根据性质 2 的推论，可知行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一列（行）的各元素均是两数之和. 例如：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a'_{1j} + a''_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a'_{2j} + a''_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & (a'_{nj} + a''_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

（这由定义易证，这里从略）

性质 6　在行列式的某一行（列）加上另一行（列）与某一数 k 的乘积，行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{13}$$

证　按照性质 5，上面等式右边的行列式等于两个行列式之和，前者便是上面等式左边的行列式，后者因有两行成比例可知等于零.

约定记号：用 γ_i 表示 i 行；c_i 表示第 i 列. $\gamma_i \longleftrightarrow \gamma_j$ 表示互换第 i 行与第 j 行；第 i 行乘以数 k，记作 $k\times\gamma_i$；用 $\gamma_i \pm k\gamma_j$ 表示第 i 行加（减）k 与第 j 行之积，类似地可得到关于行列式列的记号. 如 $c_i \longleftrightarrow c_j$，$kc_i$，$c_i \pm kc_j$.

例 3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&7&-10\end{vmatrix}.$$

解 $D\xlongequal[\substack{r_3-3r_1\\r_4-2r_1}]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&-34&-26\\0&26&-19&-24\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3+2r_2}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&31&10\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-\frac{31}{16}r_3}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&0&-\frac{11}{2}\end{vmatrix}=1144.$$

由此例可见，利用性质 6 可把一个行列式中的元素尽可能多地化为零．若能把行列式化为三角形行列式，那末，行列式的计算便可得到简化，这是一个常用的方法．

如果行列式（5）的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$（i，$j=1$，2，…，n）就称这个行列式为**对称行列式**．例如：

$$\begin{vmatrix}-1&4\\4&0\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&3&4&2\\3&0&-1&5\\4&-1&2&6\\2&5&6&-1\end{vmatrix},$$

都是对称行列式．一般的对称行列式可以写成