复变函数

唐生强　唐清干　黄文韬　编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书较全面、系统地介绍了复变函数的基础知识. 全书共 7 章,内容包括:复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开、留数及其应用和共形映射等,最后还介绍了复变函数中一些运算的计算机实现. 每章配有适量习题和补充题供读者选用,书末附有答案及提示.

本书可作为普通高等学校工科本科各专业的复变函数课程的教材,也可供相关专业的工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/唐生强,唐清干编著. —重庆:重庆大学出版社,2001.8
电气工程及其自动化本科系列教材
ISBN 7-5624-2459-4

Ⅰ.复... Ⅱ.①唐... ②唐... Ⅲ.复变函数—高等学校—教材
Ⅳ.0174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 043780 号

复变函数
唐生强 唐清干 编著
责任编辑 曾令维 周 立
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
四川自贡新华印刷厂印刷
*
开本:850×1168 1/32 印张:6.5 字数:175 千
2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—6000
ISBN 7-5624-2459-4/O·209 定价:10.00 元

前言

《复变函数》是高等学校工科类本科的一门基础课，它在流体力学、电学、热学等方面有重要的应用. 本书在教学内容的深度和广度方面按照教育部《面向21世纪高等工程教育教学内容课程改革计划》的总体要求，根据原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》编写，较全面、系统地介绍了复变函数的基础知识. 在编写过程中，力求贯彻改革精神，使本教材能适应新世纪对工程技术人才的“数学素质”的培养要求，书写时力求叙述简洁，通俗易懂，便于读者自学，同时也尝试将数学软件的使用与教材相结合，让读者通过在计算机上完成一些复变函数的运算来“做数学”，使在学习数学知识的同时，学习数学的思想和探索数学的方法，在从困惑到发现之中，获得乐趣，进而激发读者今后学习的兴趣.

每章都配有较多的例题，并有适量习题和补充题供教师和读者选用，配置两类习题的目的：一

是为了便于教师从中选择合适的题目供教学使用;二是便于读者选用相关题目进行自我检查,从而对学习效果做出客观、真实的评价. 书末附有习题和补充题答案及提示. 有“ * ”号的内容供相关专业选用.

本书第 1、2、3 章由唐清干编写,第 4、5、6 章由唐生强编写,第 7 章由黄文韬编写,全书由唐生强统稿.

本书在编写过程中,得到重庆大学出版社的大力支持,丁宣浩教授审阅了书稿,并提出了宝贵的意见和建议,陈春明和贾登娟同志、刘翠玉同志给予了热情的帮助,为此,特致谢意.

由于编者水平有限,书中难免存在错误和不当之处,恳切希望大家批评指正.

编者

2001 年 2 月 12 日

目录

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复 数

有关复数的基本知识,在初等数学中已经讲授过了,为今后讨论方便起见,这里有必要给出系统的叙述和补充.

1.1.1 复数的概念

设 x,y 是任意两个实数,i 表示虚数单位$\sqrt{-1}$,称形如 $x+y\mathrm{i}$ 或 $x+\mathrm{i}y$ 的数为复数,记作:

$$z = x + \mathrm{i}y \text{ 或 } z = x + y\mathrm{i} \tag{1.1.1}$$

其中实数 x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为:

$$x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z \tag{1.1.2}$$

当 $x=0,y\neq0$ 时,复数 $z=y\mathrm{i}$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,复数 $z=x+\mathrm{i}\cdot0$ 可看做实数 x;例如,复数 $z=2+\mathrm{i}\cdot0$ 可看做实数 2. 当 $x=0,y=0$ 时,复数 $z=0$,显然数 0 既可看做实数也可看做纯虚数. 全体复数称为复数域,记作 **C**.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$

时,称 z_1 与 z_2 相等,记作 $z_1=z_2$.

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数,记作 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 例如,复数 $z=3+2\mathrm{i}$ 的共轭复数 $\bar{z}=\overline{3+2\mathrm{i}}=3-2\mathrm{i}$. 显然,若 z 是实数,那么 $\bar{z}=z$,对一切复数 z,有 $\bar{\bar{z}}=z$.

根据复数的上述定义,容易看到:全体实数只是全体复数的一部分,这就意味着复数域是实数域的扩充,并且一个复数完全由它的实部和虚部所确定.

复数与实数不同,一般来说,任意两个复数之间不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的四则运算定义如下:

加法:$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$ (1.1.3)

减法:$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$ (1.1.4)

乘法:z_1 与 z_2 相乘时,按多项式的乘法法则进行,只不过要把 i^2 换成为 -1,即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.1.5}$$

除法:z_1 与 z_2 相除时,先将它写成分数形式,然后分子分母都乘以分母的共轭复数,再进行简化,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0) \tag{1.1.6}$$

例如,设 $z_1=3+2\mathrm{i}$,$z_2=1-2\mathrm{i}$,那么 $z_1z_2=(3+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=3-6\mathrm{i}+2\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2=7-4\mathrm{i}$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{-1+8\mathrm{i}}{5}=-\frac{1}{5}+\mathrm{i}\,\frac{8}{5}.$$

根据上述定义的四则运算,容易证明加法、乘法满足交换律和结合律及加法对乘法的分配律,即:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3) \tag{1.1.7}$$

$$z_1z_2=z_2z_1,\ (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\ z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \tag{1.1.8}$$

又由 1.1.1 中共轭复数的定义,容易证明下列式子成立:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, (z_2 \neq 0)$$

$$z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2, z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z). \tag{1.1.9}$$

例 1　设 $z = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \overline{\left(\frac{2+\mathrm{i}}{-5\mathrm{i}}\right)}$ 求 $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}z$ 及 $\overline{zz}$.

解　$z = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \frac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\sqrt{-5\mathrm{i}}} = \frac{(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} - \frac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\mathrm{i}(-5)}$

$= \frac{11-2\mathrm{i}}{25} - \frac{(2-\mathrm{i})\mathrm{i}(-5)}{(\mathrm{i}5)\mathrm{i}(-5)} = \frac{11-2\mathrm{i}}{25} + \frac{5+10\mathrm{i}}{25}$

$= \frac{16}{25} + \frac{8}{25}\mathrm{i}$

因此, $\mathrm{Re}z = \frac{16}{25}$, $\mathrm{Im}z = \frac{8}{25}$

$$z\bar{z} = \left(\frac{16}{25} + \frac{8}{25}\mathrm{i}\right)\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{25}\mathrm{i}\right) = \frac{64}{125}$$

例 2　设 z_1 和 z_2 是任意的两个复数,证明:

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2).$$

证　由:

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = \overline{\bar{z}_1 z_2} + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$$

因此, $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2\mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2)$.

1.1.3　复数的几何表示、模与辐角

实数的几何表示是数轴上的点,那么复数的几何表示是什么呢?

由于复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与一对有序实数 (x, y) 有一一对应关系,在引入直角坐标系的平面上,一对有序实数 (x, y) 和平面上的点也有一一对应关系,因此能够建立平面上的点和全体复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 间一一对应关系,可以把平面上点 (x, y) 看做是复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一种几何表示法. 这种表示复数的方法通常称为点表示,并且常

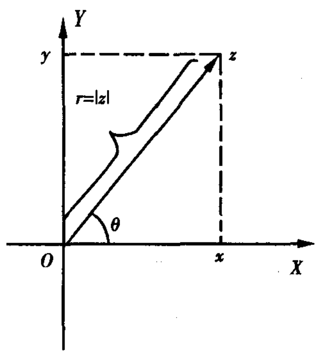

图 1.1.1

把点 z 作为"数 z"的同义词(图 1.1.1).

因实数 x 对应 x 轴上的点,所以称 x 轴为实轴;纯虚数 $\mathrm{i}y$ 对应于 y 轴上的点,所以称 y 轴为虚轴,这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用一向量表示,将 z 理解为起点在原点(0,0)终点在(x,y)的向量(图 1.1.1),特别,复数 0 对应着零向量 ,向量的长度称为 z 的模,记作$|z|$或 r,即

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.10}$$

显然,下列各式成立

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|,\ z\bar{z}=|z|^2 \tag{1.1.11}$$

由复数的向量表示法,易见复数的加减法法则与向量的加减法的平行四边形法则一致(图 1.1.2),这样力学、物理学中的向量如力、速度、加速度等物理量,都可以用复数来表示. 这说明复数不仅只是实数在形式上的扩充,而是具有很强的实际背景的.

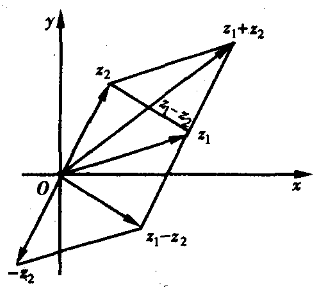

图 1.1.2

由于$|z|$表示向量 z 的长度,$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与 z_2 间的距离,易知下面两个不等式成立:

$$|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2|| \tag{1.1.12}$$

当 $z\neq0$ 时,表示复数 z 的向量与 x 轴正向的夹角 θ,称为复数 z 的辐角,记作 $\theta=\mathrm{Arg}z$,(图 1.1.1),并规定 θ 按逆时针方向取值

为正，顺时针方向取值为负. 如同极坐标系中点的极角一样，任意一个复数的辐角有无穷多个，彼此两个辐角之间相差 2π 的整数倍，其中有一个辐角在 $-\pi$ 与 π 之间，称为 z 的“辐角主值”，记作 $\arg z$，于是有：

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi \tag{1.1.13}$$

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.1.14}$$

由三角函数知识可知 $\arg z$ 与 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 有下列关系：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, (z \text{ 在第一象限}) \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, (z \text{ 在第二象限}) \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, (z \text{ 在第三象限}) \\ \arctan \dfrac{y}{x}, (z \text{ 在第四象限}) \end{cases} \tag{1.1.15}$$

当 $z=0$ 时，其模 $|0|=0$，但它的辐角无定义.

由上所述，复数 $z=x+iy$ 的实部、虚部、模与辐角有下列关系式：

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \tag{1.1.16}$$

因此，复数可表示为下面的形式：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.1.17}$$

(1.1.17)称为复数的三角表示式.

根据欧拉(Euler)公式，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，复数 z 又有指数形式的表示式：

$$z = re^{i\theta} \tag{1.1.18}$$

(1.1.18)称为复数 z 的指数表示式.

复数的各种表示法可以相互转化，根据讨论问题的需要而选择.

例 1　求复数 $z = -2\sqrt{3} + 2i$ 的三角表示式与指数表示式.

解 $r=|z|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$$\arctan\frac{y}{x}=\arctan(2/-2\sqrt{3})=-\frac{\pi}{6}$$

$$\arg z=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$$

于是，$z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

例 2 证明$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明它的几何意义.

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$$

两式相加得：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

几何意义：平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和.

例 3 假定 z_1、z_2、z_3 三点适合下列条件：

$z_1+z_2+z_3=0$，与$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 试证：z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆的一个等边三角形的顶点.

证 由例 2 知：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

因为 $z_1+z_2+z_3=0$，故 $z_1+z_2=-z_3$，因此有$|z_1+z_2|=|z_3|$，从而

$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_1+z_2|^2=2(1+1)-1=3$

同理可证$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_3|^2=3$

所以$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$因此 z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆的一个等边三角形的顶点.

例 4 证明复平面上的直线方程可写成：

$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=c$ （$\alpha\neq0$ 为复常数，c 为实常数）.

证 平面上直线方程为：

$Ax+By+D=0$ ①

由于 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$，将其代入①得：

$\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}B)\bar{z}+\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)z+D=0$，令 $\alpha=\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}B)$，$C=-D$，则有 $\alpha\bar{z}+\alpha\bar{z}=c$.

例 5　求下列方程表示的曲线：

①$|z+\mathrm{i}|=2$；　　②$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$；

③$(1+\mathrm{i})\bar{z}+(1-\mathrm{i})z=-1$.

解　①由几何上可以看出，方程 $|z+\mathrm{i}|=2$ 是中心在点 $-\mathrm{i}$，半径为 2 的圆（图1.1.3），下面用代数的方法求出该圆的直角坐标方程.

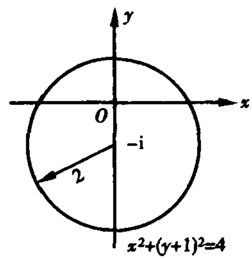

图 1.1.3

设 $z=x+\mathrm{i}y$，方程变为：

$|x+\mathrm{i}(y+1)|=2$ 即

$$x^2+(y+1)^2=4$$

②几何上，该方程表示到点 $2\mathrm{i}$ 和 -2 距离相等的点的轨迹，因此该方程表示的曲线是连接 $2\mathrm{i}$ 和 -2 的线段的垂直平分线（图 1.1.4）. 事实上设 $z=x+\mathrm{i}y$ 有

$|x+\mathrm{i}(y-2)|=|(x+2)+\mathrm{i}y|$，即 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ 亦即 $x+y=0$.

③设 $z=x+\mathrm{i}y$，则该方程为：

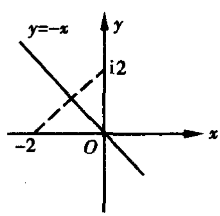

图 1.1.4

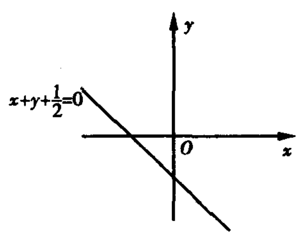

图 1.1.5

$(1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y)+(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)=-1$ 化简得：$x+y+\dfrac{1}{2}=0$（图 1.1.5）.

例 4、例 5 说明平面上曲线可用复数 z 的等式来表达. 反之亦然.

1.1.4 复数的乘幂与方根

定理 **①两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，其辐角等于它们的辐角之和；**

②两个复数商的模等于它们的模的商，其辐角等于被除数辐角与除数的辐角之差，即有：

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|;\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2; \tag{1.1.19}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2. \tag{1.1.20}$$

证 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

因此：

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\ &=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\end{aligned}$$

因此有：

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{r_1}{r_2},\ \mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

上述定理可用复数指数形式表述如下：

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

设 $z_k=r_ke^{i\theta_k}$　$(k=1,2,\cdots,n)$ 由上述定理可推得：$z_1\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)}$，于是得到：

推论　$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2\cdots z_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Arg}z_k$　(1.1.21)

对两个复数的积 z_1z_2 相当于将表示复数 z_1 的向量旋转 $\mathrm{Arg}z_2$，然后将其伸长(或缩短)到 $|z_2|$ 倍(图 1.1.6).

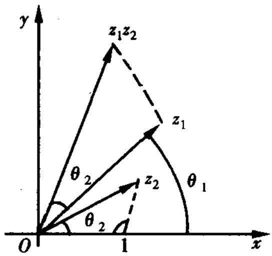

图 1.1.6

下面来介绍复数的乘幂与方根.

定义　**n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即**

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n个}\qquad(1.1.22)$$

如果在(1.1.21)中令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=re^{i\theta}$，那么对于任何的正整数 n，有

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\qquad(1.1.23)$$

如果规定 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，那么当 n 为负整数时上式也成立.

特别取 $|z|=1$，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$　由(1.1.23)式有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\qquad(1.1.24)$$

这就是著名的棣莫佛(De. Moivre)公式.

定义　**若 $\omega^n=z$，则称 $\omega=\rho e^{i\theta}$ 是复数 $z=re^{i\theta}$ 的 n 次方根，记为 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$.**

根据公式(1.1.23)

有 $(\rho e^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}=r^ne^{i\theta}$

因此，$\rho^n=r$，$n\varphi=\theta+2k\pi$　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

于是得到 z 的 n 次方根有 n 个，且：

$\omega_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

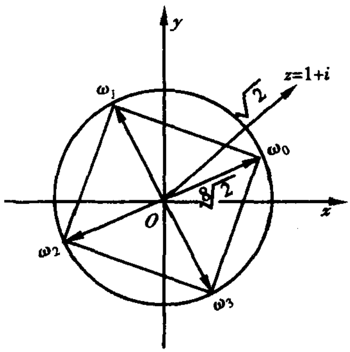

图 1.1.7

$\omega_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$分布在圆周$\sqrt[n]{|z|}=|\omega|$上，且是圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1 求$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的值.

解 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}\quad(k=0,1,2,3,\cdots)$

$\omega_0=2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}},\omega_1=2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)},\omega_2=2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)},\omega_3=2^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}$

1.2 复平面上的点集

1.2.1 平面点集的基本概念

设 z_0 是复平面上的一点，由不等式$|z-z_0|<\delta\quad(\delta>0)$确定的点集，称为点 z_0 的δ邻域，或点 z_0 的邻域. 点 z_0 的 δ 邻域是圆周$|z-z_0|=\delta$的内部. 由不等式$0<|z-z_0|<\delta$确定的点集，称为点 z_0 的去心邻域.

对于平面点集 G，若存在点 z_0 的某个邻域包含于 G 中，称 z_0 是 G 的内点；若 G 的每个点都是 G 的内点，称 G 为开集.

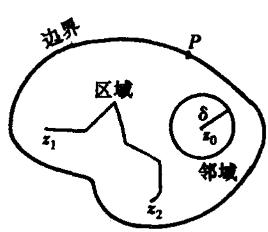

图 1.2.1

设 G 是一平面点集，P 是平面上的一点（可以属于 G 也可以不属于 G），若 P 的一切邻域都含有 G 的无穷多个点，称 P 为 G 的聚点；若 P 的一切邻域既有属于 G 的点又有不属于 G 的点，称 P 为 G 的边界点. G 的全部边界点组成的集称为 G 的边界（图 1.2.1）.

平面点集 G 称为有界集，若存在正数 M，使得对于 G 中的一