# 模糊(Fuzzy)数学及其应用

彭祖赠 孙韫玉 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊(Fuzzy)数学及其应用/彭祖赠,孙韫玉编著.—武汉:武汉大学出版社,2002.3

ISBN 7-307-03368-2

Ⅰ.模…　Ⅱ.①彭…　②孙…　Ⅲ.模糊数学　Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 36432 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:叶　效　　版式设计:支　笛

出版:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)
发行:新华书店湖北发行所
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本:850×1168　1/32　印张:15　字数:358 千字
版次:2002 年 3 月第 1 版　　2002 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03368-2/O·6　　定价:21.00 元

# 前　　言

在生产实践、科学实验乃至日常生活中，人们遇到的需要进行讨论研究的实际问题，大体上可分为确定性与不确定性两类。例如在某导线内电流与端电压之间；气体体积、压强、温度之间；物体的受力状态与其运动速度、加速度和运动方向之间都存在确定性关系，均属于确定性问题，常可用代数方程、微分方程等数学方法进行分析研究。但对于某确定对象的长度、面积、体积、重量的量测误差（即观测误差）的估计；由多种元件组成的产品的寿命的预测；工程、机械（或人体）某个部分出现“老化”、“病害”程度的评定；美与丑、高与低、好与差、大与小的划分等都未必有某种完全确定的结论，属于不确定性问题，不太能用代数方程、微分方程等作为主要数学工具进行分析研究。

对于不确定性的问题又可分为随机不确定性与模糊（Fuzzy）不确定性两类。所谓随机不确定性常指由因果律存在破缺所造成的不确定性。例如，上述的观测误差主要与观测手段（如观测仪器先进与否），观测环境（如气温、湿度、海拔高度等）等因素有关；多元件组成的产品的寿命与各元件的制作材料和工艺、操作技术、组合方式等诸多因素有关，且这些因素很难一一枚举，更难定量地说明各自对结果造成了多大影响。从而在因果律上存在破缺，属随机不确定性一类。对于美与丑、高与低、好与差、大与小的划分，通常并不通过因果关系获得所需要的、存在明显不确定性的结果。例如对某种服装，若式样新颖、别致，质地优良，价格低廉，就被列入好的一类；若式样陈旧，质地低劣，价格又贵，则被列入差的一类。然而，人们也常听某人对某服装作出的较好或较差的评价。这说明好与差之间还存在较好、较差等中间状态。又如我们常听

医生对某个病人病情作出诸如“重感冒”、“较重感冒”、“较轻感冒”、“轻感冒”等结论，这说明重、轻感冒之间，也有较重、较轻等中间状态。这些中间状态都使用了一些含混不清（较好、较差；较重、较轻）的词汇陈述，带有明显的不确定性。逻辑学中，把事物在同一时间，同一条件下，只具有某种性质或不具有某种性质（不存在中间状态）的规律称为排中律。因此，一类因中间状态的存在而引起的不确定性，起因于排中律存在破缺，称为模糊（Fuzzy）不确定性。

概率论与数理统计是研究随机不确定性问题的主要数学工具。概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科；数理统计的任务是研究怎样用有效的方法去收集和使用带随机性影响的数据。它们于 20 世纪初才被逐步引起重视，并被获得确有成效的应用。1965 年 L. A. Zadeh 的开创性论文“模糊集合”（Fuzzy Sets, Information and Controe）的发表，创造了讨论研究模糊不确定性问题的数学方法——模糊数学。30 多年来，模糊数学受到了各个方面的高度重视。在数学理论（如拓扑学、逻辑学、测度论等）、应用方法（如控制论、聚类分析、模式识别、综合评估等）和实际应用（如中长期气象预报、成矿预测、良种选择、故障诊断等）诸多方面都取得了很多很有意义的成果。还创办了国际杂志《Fuzzy Sets and Systems》，模糊（Fuzzy）意识正向各个领域渗透。

概念是反映对象的特征或本质（以及本质属性）的思维形式。概念的内涵是概念所反映的对象的特征或本质。概念的外延是概念反映的那一事物或那一类事物的总和，即概念所指对象的范围。经典数学中的概念是严格界定的，它们都有确定的内涵与外延。因此，对某个确定的数学概念，在某个给定的范围内，任取一个对象，要么符合这个概念，要么不符合这个概念，二者必居其一，也仅居其一。然而在日常的生产、工作和生活中人们遇到的概念未必都具有这样的特征。如上述的好服装与差服装，重感冒与轻感冒等都很难进行确切的描述和准确的判断。我们将这些很难进行确

切描述和准确判断的概念称为模糊(Fuzzy)概念。Zadeh 的“Fuzzy Sets”就是希望能用模糊集去刻画这类模糊概念。因此,人们认为模糊数学是讨论研究模糊概念的主要数学工具。

在使用概率论和数理统计方法研究随机不确定性问题时,常依据实际推断原理(小概率事件在一次试验(或观察)中是几乎不可能发生的)这一客观标准去检验所得结果,并作出一些使人信服的推断。但对模糊概念则很难作出确切描述和准确判断。不同概念之间不仅很难找到明确的界线,而且同一陈述(如好服装、重感冒等)在不同时间、地点还会有不同的理解,很难给出统一的、所有人都能接受的客观标准。因此在使用模糊数学方法时,怎样有效地进行运算,合理地作出推证,正确地用于实践等常常需要凭借经验作出主观选择。据此人们也认为模糊数学研究的主要对象是“主观”不确定性问题。

国内研究模糊(Fuzzy)数学起自于 20 世纪 70 年代,一开始就将“Fuzzy”一词译为“模糊”,为此曾引起过一些“争鸣”,如有人主张译为意、音兼顾的“泛晰”等,但现今除涉及拓扑方面(国内)的文献资料将“Fuzzy”译为“不分明”外,其他则或直接使用原文“Fuzzy”或使用译文“模糊”。考虑到“Fuzzy”一词含有(界限)不很清楚之意,使用“模糊”不能完全表达原意,本书在正文中都直接使用原文“Fuzzy”。

作者于 20 世纪 70 年代开始接触 Fuzzy 数学,并于 1984 年编写了《模糊数学简介》,简要地介绍了 Fuzzy 数学的内容,1986 年又进行了一次修改与补充,命名为《Fuzzy 数学及其应用》,且只在原武汉水利电力大学校内作为教材使用,未正式出版。本书是在原教材的基础上进行修改与补充后编写而成的。书中很大一部分内容是作者自己 20 多年来的研究成果,其中绝大部分已在国内外有关杂志或会议文集上发表。本书以工科研究生、数学专业本科生及工科专业本科生为主要阅读对象进行编排。内容选择上力求

实用，使阅读者经分析思考后即可把所学的知识用来解决某些实际问题。陈述方式上则力求简单易懂，只要有高等数学和线性代数的基础知识即可读懂全书除最后一章外的全部内容。

本书共分十章，第一、二两章介绍了 Fuzzy 数学的基础知识，第三～九章介绍了 Fuzzy 数学中较有实用价值的理论与方法，第十章则介绍了比较专门的 Fuzzy 测度及其扩张问题。与其他 Fuzzy 数学书籍比较，本书的主要特点是偏重于实际应用方法的介绍，且所有被介绍的方法都可进行实际操作并获得比较合理的结果。尤其其中很多方法是作者自己的研究成果，在其他书本中也是较难找到的。例如在基础理论中除介绍了一般的 t－模、余模与伪补外，还特别介绍了有补 t－模、余模及其主要性质，并在 Fuzzy 关系构造和 Fuzzy 命题演算等方面获得了较好的应用，克服了在逻辑演算中缺乏“还原性”的缺陷。在 Fuzzy 聚类方面，早就有人指出使用传递闭包（等价于最大树）聚类有“失真性”，本书则首先在 Fuzzy 图中介绍了最优树（近似）算法，并将它用于 Fuzzy 聚类，借此减少“失真性”。此外，有序样本 Fuzzy 聚类等也是作者给出的一类 Fuzzy 聚类方法。在综合评判方面，除介绍了 Saaty 的层次分析法外还特别介绍了变权法及在变权法中权数的确定方法。作者曾成功地使用 3 次样条插值函数改进了灰色模型（GM），使之能达到很好的拟合精度，相应的结果被编入第九章中。作者给出了由 Sugeno 定义的 Fuzzy 测度可被扩张的充要条件，特将它列入第十章中，供有兴趣的读者阅读。

限于我们的水平，本书中谬误之处恐所难免，请国内同行和广大读者批评指正。

胡宝清教授审阅了全文，并提出了许多宝贵的意见，特此致谢。

**彭祖赠　孙韫玉**

**2000 年 3 月于武昌**

# 目　　录

# 第一章 集与 Fuzzy 集

19 世纪末,Cantor 首创集合论,并迅速渗透到各个数学分支,成为基础数学。1965 年美国控制论专家 Zadeh 第一次提出了 Fuzzy 集概念,给 Cantor 集合理论作了有益的推广,受到广泛重视,迄今已形成一个较为完善的数学分支,且在很多领域中获得了卓有成效的应用。本章先介绍 Cantor 集合的基本知识,然后介绍 Fuzzy 集理论。

## §1.1 集合及其特征函数

Cantor 对"集"作了如下描述:"把一定的并且彼此可以明确识别的东西——东西可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起叫做集"。例如,全体人是集,因为张三、李四是可以明确识别的。全体整数、全体有理数、全体实数都是集。又如若用$[a,b]$表示所有大于或等于 $a$,小于或等于 $b$ 的实数全体,则$[a,b]$是集。函数 $y=\sin x$ 的值域$[-1,1]$是集,定义域$(-\infty,+\infty)$也是集。

以下用 $X$、$Y$、$Z$ 或 $A$、$B$、$C$ 等大写字母表示集。设 $A$ 是集,$A$ 中的一个具体对象(成员)称为 $A$ 的元素,常用小写字母 $x$、$y$、$z$ 或 $a$、$b$、$c$ 等表示。例如,设 $A$ 是全体人的集,则张三是 $A$ 的成员,用 $a$ 表示张三,则 $a$ 是 $A$ 的元素。若 $A$ 是集,$a$ 是 $A$ 的元素,则记 $a\in A$,读作 $a$ 属于 $A$。若 $A$ 是集,$a$ 是某个具体对象,但 $a$ 不是 $A$ 的元素,则记作 $a\overline{\in} A$,读作 $a$ 不属于 $A$。没有元素的集称为空集,用 $\varnothing$ 表示空集。因此,对空集 $\varnothing$,任给对象 $x$,都有 $x\overline{\in}\varnothing$。

集合常用以下两种方法表示：

1. 穷举法：将集中的所有元素一一列出，再加上一对花括号$\{\ \}$来表示。例如，若 $A$ 是由 $a,b,c$ 三个元素组成，则记 $A=\{a,b,c\}$。又如全体自然数的集 $N$ 可记作 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$等。

2. 特性描述法：以 $x,y$ 等符号作为集中的代表元素，然后在其后加一竖“|”，竖线的后面写出元素 $x$、$y$ 等所具有的特性或应满足的条件，再加上花括号来表示。例如，$A=\{x\mid |x|<1$ 且 $x$ 为实数$\}$表示 $A$ 是所有绝对值小于 1 的实数的全体，即 $A=(-1,1)$；又如 $B=\{x\mid x^2=1,x$ 是实数$\}$即 $B=\{-1,1\}$等。

以后总用$\mathbb{N}$表示全体自然数的集，用$\mathbb{Q}$表示全体有理数的集，用$\mathbb{R}$表示全体实数的集，且不再作一一说明。

设 $A,B$ 都是集，且对任意 $x\in A$，必有 $x\in B$，称 $A$ 是$B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作 $A$ 包含于$B$。约定空集 $\varnothing$ 是任意集$A$ 的子集。即对任意集 $A$，都有 $\varnothing\subseteq A$。

设 $A,B$ 都是集，且 $A\subseteq B,B\subseteq A$，则记 $A=B$。显然 $A=B$ 意味着$A$ 与 $B$ 的所有元素完全相同。

通常将所讨论的对象限制在一定范围内，并称所讨论的对象的全体为论域。论域常用 $U$ 或$X,Y,Z$ 等大写字母表示。例如，若只讨论全体自然数，则论域 $U=N$。以后凡提到论域总假定它是非空的。

设 $U$ 是论域，$U$ 的所有子集所组成的集称为 $U$ 的幂集，记作 $P(U)$。例如，设 $U=\{a,b,c\}$，则

$$P(U)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

需要指出的是：若字母 $a$ 用来表示集合$A$ 的元素(即 $a\in A$)，则$\{a\}$表示由一个元素 $a$ 组成的集合(称为单点集)，且$\{a\}$是 $A$ 的子集(即$\{a\}\subseteq A$)。因此，$a$ 与$\{a\}$是有区别的。

设 $A,B$ 是集，符号 $A\cup B,A\cap B,A-B,A\ominus B$ 表示由$A$ 与

$B$ 所确定的集,分别定义如下:

$A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为 $A$ 与 $B$ 的并集;

$A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为 $A$ 与 $B$ 的交集;

$A-B\triangleq\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$,称为 $A$ 与 $B$ 的差集;

$A\ominus B\triangleq\{x\mid$"$x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$"或"$x\in B$ 且 $x\overline{\in}A$"$\}$,称为 $A$ 与 $B$ 的中心差集。

以上各式中的符号"$\triangleq$"表示"被定义为"。

由以上定义可以看出

$$A\ominus B=(A-B)\cup(B-A)$$

特别地,设 $U$ 是论域,$A\subseteq U$,称 $U-A$ 为 $A$ 对 $U$ 的补集,记作 $A^C$。

**定理 1.1** 设 $U$ 是论域,$A,B,C$ 都是 $U$ 的子集。则 $\cup,\cap,\cdot^C$ 具有以下运算规律:

1. 交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$;
2. 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
   $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
3. 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A,\ A\cap(A\cup B)=A$;
4. 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;
5. 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
6. 复原律 $(A^C)^C=A$;
7. 互补律 $A\cup A^C=U,\ A\cap A^C=\varnothing$;
8. 0-1 律 $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$;
   $A\cup U=U,\ A\cap U=A$;
9. De·Morgan 律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$。

**证** 仅证分配律,其余留作习题。

任取 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$。若 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;若 $x\in B$

$\cap C$,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,从而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,也有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,即 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。任取 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,从而或 $x\in A$,或 $x\in B\cap C$,故 $x\in A\cup(B\cap C)$,即 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。由集合相等的定义得:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad \#$$

因为 $\cup$, $\cap$ 满足结合律,故可记

$(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$, $(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$。

更一般地,设 $\Lambda$ 是集,$\lambda$ 是 $\Lambda$ 的元素,则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\triangleq\{x\mid\exists\lambda\in\Lambda,\text{使得 }x\in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\triangleq\{x\mid\forall\lambda\in\Lambda,\text{都有 }x\in A_\lambda\}。$$

式中"$\exists$"表示"存在(Exist)","$\exists\lambda\in\Lambda$,使得 $x\in A_\lambda$"即"存在 $\lambda\in\Lambda$,使得 $x\in A_\lambda$";"$\forall$"表示"全部(All)"$\forall\lambda\in\Lambda$,都有 $x\in A_\lambda$,即"对全部 $\lambda\in\Lambda$,都有 $x\in A_\lambda$";式中 $\Lambda$ 称为指标集,当 $\Lambda=N$ 时,$\bigcup\limits_{n\in N}A_n$ 常记作 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,$\bigcap\limits_{n\in N}A_n$ 常记作 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

依据上述 $\cup$, $\cap$ 的一般性定义,集合运算中的分配律与 De·Morgen 律也有更一般的形式。即

$$A\cup(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup A_\lambda),\qquad A\cap(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap A_\lambda),$$

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C,\qquad (\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C。$$

设 $X$, $Y$ 是集,$f$ 是由 $X$ 到 $Y$ 的对应关系,即对任意 $x\in X$,都有 $y=f(x)\in Y$ 与之对应,称 $f$ 是映 $X$ 入 $Y$ 的映射,记作 $f:X\to Y$,读作 $f$ 映 $X$ 入 $Y$。

若 $f:X\to Y$,且对任意 $x_1,x_2\in X$,若 $x_1\neq x_2$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$,称 $f$ 为单射,也称 $f$ 为一一的。

若 $f:X\to Y$,且对任意 $y\in Y$,都有 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$,称 $f$ 为满射,也称 $f$ 映 $X$ 到 $Y$ 上(映上)。

若 $f:X\to Y$ 是一一的满射，称 $f$ 为双射，双射也称为一一对应。

若 $f:X\to Y$，令

$$f(X)=\{y\mid \exists x\in X,\text{使得 } y=f(x)\}$$

则 $f(X)$是 $f$ 的值域。

显然，若 $f:X\to Y$，且 $f(X)=Y$，则 $f$ 是满射，若 $f$ 还是一一的，则 $f$ 是双射。

**例 1** 设 $f:[0,1]\to[0,2]$，且 $f(x)=x^2$，则 $f$ 是一一的，但不是映上而是映入；设 $f:[-1,1]\to[0,1]$且 $f(x)=x^2$，则 $f$ 是映上的，但不是一一的；设 $f:[0,1]\to[0,1]$，且 $f(x)=x^2$ 则 $f$ 是一一的满射（双射）。

设 $U$ 是论域，$\chi:U\to\{0,1\}$，$\chi$ 称为 $U$ 上的特征函数。$U$ 上特征函数的全体记作 CH($U$)。

设 $a,b\in[0,1]$，定义：

$$a\vee b=\max\{a,b\},\qquad a\wedge b=\min\{a,b\}$$

容易看出，对任意 $a,b\in[0,1]$，$a\vee b$、$a\wedge b\in[0,1]$，又对任意 $a,b\in\{0,1\}$，$a\vee b$、$a\wedge b\in\{0,1\}$。

设 $\chi_1,\chi_2$ 和 $\chi$ 都是论域 $U$ 上的特征函数，则：

1. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_1(x)\leqslant\chi_2(x)$，则记 $\chi_1\leqslant\chi_2$；
2. 若 $\chi_1\leqslant\chi_2$，且 $\chi_2\leqslant\chi_1$，则记 $\chi_1=\chi_2$；
3. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\vee\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\vee\chi_2$；
4. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\wedge\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\wedge\chi_2$；
5. 若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_2(x)=1-\chi_1(x)$，则记 $\chi_2=\overline{\chi_1}$。

显然，$\chi_1=\chi_2$ 当且仅当 $\forall x\in U$，$\chi_1(x)=\chi_2(x)$。

**定理 1.2** 若 $U\neq\varnothing$，则 $U$ 的幂集 P($U$)与 $U$ 的全体特征函数的集 CH($U$)之间，存在一一的满射。

**证** 任取 $A\in \mathrm{P}(U)$，$\forall x\in U$，令

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} A \text{ 时}\end{cases}$$

则 $\chi_A\in \mathrm{CH}(U)$，即对任意 $A\in P(U)$，有 $\chi_A\in \mathrm{CH}(U)$与之对应，若记 $\chi_A=f(A)$，则

$$f:P(U)\to \mathrm{CH}(U)$$

任取 $A,B\in P(U)$，且 $A\neq B$，不失一般性，设有 $x_0\in A$，但 $x_0\overline{\in} B$，从而，$\chi_A(x_0)\neq\chi_B(x_0)$，即 $f(A)=\chi_A\neq\chi_B=f(B)$。故 $f$ 是一一的。任取 $\chi\in \mathrm{CH}(U)$，令

$$A_\chi=\{x\mid \chi(x)=1,x\in U\}$$

则 $A_\chi\in P(U)$，且 $f(A_\chi)=\chi$。即 $f$ 为满射。 #

今后，对任意 $A\in P(U)$总用 $\chi_A$ 表示 $A$ 的特征函数。特别地用 1 和 0 分别表示 $U$ 和 $\varnothing$ 的特征函数，如是：

$$1(x)\equiv 1,\quad \forall x\in U;\quad 0(x)\equiv 0,\quad \forall x\in U。$$

**定理 1.3** 若 $A,B\in P(U)$，则 $\chi_A\vee\chi_B,\chi_A\wedge\chi_B,\overline{\chi_A}$分别是 $A\cup B,A\cap B,A^C$ 的特征函数。

**证** 任取 $x\in A\cup B$，则或 $x\in A$，或 $x\in B$，从而或有 $\chi_A(x)=1$，或 $\chi_B(x)=1$，故$(\chi_A\vee\chi_B)(x)=1$；又若取 $x\overline{\in} A\cup B$，则 $x\overline{\in} A$，且 $x\overline{\in} B$，从而 $\chi_A(x)=\chi_B(x)=0$，因此$(\chi_A\vee\chi_B)(x)=0$。这就证明了 $\chi_A\vee\chi_B$ 是 $A\cup B$ 的特征函数。类似地证明其他。 #

由定理 1.2 可知，对给定的论域 $U$，$U$ 的一切子集的集$\mathrm{P}(U)$中的元素与 $U$ 的一切特征函数的集 $\mathrm{CH}(U)$中的元素是一一对应的。定理 1.3 则进一步说明对 $P(U)$中元素进行$\cup,\cap,\cdot^C$ 运算，相当于对 $\mathrm{CH}(U)$中元素进行$\vee,\wedge,\bar{\cdot}$运算。这说明 $A,A\cup B,A\cap B,A^C$ 与 $\chi_A,\chi_A\vee\chi_B,\chi_A\wedge\chi_B,\overline{\chi_A}$是“等效”的。单就这种“等效”意义可以对 $A$ 与 $\chi_A$，$\cup$与$\vee$，$\cap$与$\wedge$，$\cdot^C$ 与$\bar{\cdot}$不加区分。从这一观念出发，可以使我们很方便地引入 Fuzzy 集概念与 Fuzzy 集运算。

## §1.2 隶属函数与 Fuzzy 集

在数学上，概念的外延可以通过“集合”来表达。然而，日常生活中涉及的众多的概念常有内涵的“模糊(Fuzzy)性”，这必然导致外延的“不清晰性”。例如，对于“高个子男人”这个概念，如果说 1.80 m 以上的男人都算高个子，那么 1.79 m 的男人就不算高个子了，但是 1.80 m 与 1.79 m 仅 1 cm 之差，肉眼是很难辨别的。因此，“高个子男人”的外延不应有清晰的边界。然而(Cantor 提出的)“经典集合”必定是“清晰的”，即对集合 $A$ 和某具体对象 $a$，$a \in A$ 与 $a \,\overline{\in}\, A$ 有一个也仅有一个成立。这说明不能用经典集合去刻画模糊(Fuzzy)概念的外延，从而 Zadeh 提出了 Fuzzy 集概念。

设 $U$ 是论域，所谓 $U$ 上的“Fuzzy 集”$A$，是指对任意 $x \in U$，$x$ 常以某个程度 $\mu$($\mu \in [0,1]$)属于 $A$，而非 $x \in A$ 或 $x \,\overline{\in}\, A$。例如，若确定 1.80 m 以上的男人都是“高个”(即以 1 = 100% 的程度属于“高个”)，而 1.79 m 的男人则可以略低于 1(例如 0.99 即 99%)的程度属于“高个”。

在上节中已经说明，若 $U$ 是论域，则 $P(U)$ 与 $CH(U)$ 一一对应，且 $P(U)$ 与 $CH(U)$ 中的元素 $A$ 与 $\chi_A$ 可不加区分，$P(U)$ 与 $CH(U)$ 中的运算：$\cup$ 与 $\vee$，$\cap$ 与 $\wedge$，$\cdot^C$ 与 $\bar{\cdot}$ 也可以不加区分。据此，Zadeh 引入了隶属函数，并让 $U$ 上的隶属函数全体与 $U$ 上的 Fuzzy 集全体一一对应，以此建立 Fuzzy 集概念。即：

设 $U$ 是论域，$\mu: U \to [0,1]$，称 $\mu$ 是 $U$ 上的隶属函数，记 $U$ 上隶属函数的全体为 $SH(U)$。又记 $U$ 上的 Fuzzy 集的全体为 $F(U)$，令 $SH(U)$ 与 $F(U)$ 一一对应。于是，对任意 $\mu \in SH(U)$，有惟一 $U$ 上的 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A} \in F(U)$ 与之对应。记此 $\mu$ 为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$，称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数；对任意 $x \in U$，称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为 $x$ 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。

**例 1** 用 $\underset{\sim}{A}$ 表示"高个子男人"的集,并认为身高 1.80 m 以上的男人必为高个,而身高 1.60 m 以下的男人都不是高个。用 $x$ 表示某男人的身高,并给出 $\mu$ 的隶属函数如下:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0, & x<1.60\\ 2\left(\dfrac{x-1.60}{0.2}\right)^2, & 1.60\leqslant x<1.70\\ 1-2\left(\dfrac{x-1.80}{0.2}\right)^2, & 1.70\leqslant x<1.80\\ 1, & 1.80\leqslant x\end{cases}$$

取 $x$ 分别等于 1.65,1.70,1.75 则 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 分别等于 0.125,0.50,0.875,即身高 1.65 m,1.70 m,1.75 m 的男人,分别以 0.125,0.5,0.875 的程度属于高个子男人 $\underset{\sim}{A}$ 是"高个子男人"对应的 Fuzzy 集。

因为 $\{0,1\}\subseteq[0,1]$,而经典集 $A$ 的特征函数 $\chi_A:U\to\{0,1\}$,故 $\chi_A$ 也是隶属函数,从而经典集 $A$ 也可视为 Fuzzy 集。也就是说:经典集 $A$ 与特征函数 $\chi_A$ 分别是 Fuzzy 集与隶属函数的特例;而 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$ 与隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 分别是经典集与特征函数的推广。为了印刷及书写上的方便,后面将省去 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$ 下面的"～"而简写成 $A$,且对任意 Fuzzy 集 $A$,总认定其隶属函数为 $\mu_A$,不再一一说明。

仿照经典集的 $\cup,\cap,\cdot^C$ 运算定义,可给出 Fuzzy 集的 $\cup,\cap,\cdot^C$ 运算如下:

设 $U\neq\varnothing,A,B,C\in\mathrm{F}(U)$,则

1. 若 $\forall x\in U$,都有 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$,则记 $A\subseteq B$,读作 $A$ 包含于 $B$;

2. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则记 $A=B$。显然,$A=B$,当且仅当 $\forall x\in U,\mu_A(x)=\mu_B(x)$;

3. 若 $\forall x\in U$,都有 $\mu_C(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$,则记 $C=A\cup$