新突破

奥林匹克专题讲座

新突破

主编 齐振东 薛 遒

AOLINPIKE

初中三年级

数学

海洋出版社

奥林匹克 专题讲座新突破

初中三年级数学

主　　编　齐振东　薛　道
本册主编　蔡勇军　郝建忠

海洋出版社

2002年·北京

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克专题讲座新突破．初中三年级数学/齐振东，薛遒主编．—北京：海洋出版社，2002.9

ISBN 7－5027－1113－9

Ⅰ．奥… Ⅱ．①齐… ②薛… Ⅲ．数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064986 号

责任编辑：李向义

责任校对：张丽萍

责任印制：严国晋

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京市燕山印刷厂印刷

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

开本：880×1230 1/32 印张：7.25

字数：181 千字 印数：1～8000 册

定价：9.00 元

前　言

为了帮助热爱数学学科的学生学好数学课程，夯实知识基础和提高综合素质，我们结合全国知名奥校、北京西城区教研中心、北京四中及徐州市部分重点学校的教学经验，将自己多年来讲课的讲义，按照奥赛的发展方向及要求，经过严格的教研论证，依据教育部新颁“教学大纲”和“竞赛大纲”，组织编写了《奥林匹克专题讲座新突破》丛书(初中数学)部分。本书按年级分册，与“大纲”同步，紧密配合本学科的教学进度，选择基础性强、针对性强、应用性广的重点教学内容作为专题，选题注重学生综合能力的培养，力求创新和突破，并注重广度和深度，例题讲解富有启发性。

本书内容由数学基本知识、典型例题解析、课后练习和答案与提示等部分组成。立足中考，着眼竞赛，在落实中考范围内的重点、难点、疑点知识的同时，更好地掌握竞赛提出的新内容、新要求。重点放在了带普遍性的思维训练上，着重分析解题思路，兼顾特殊的解题方法与技巧，提供了足够的自我训练材料。编者多年来一直在中学数学教学第一线，对教学和奥林匹克竞赛有着丰富的经验，相信对广大中学生学习数学、中考及奥林匹克竞赛取得好成绩会有所帮助。

由于水平所限，书中如有不妥之处，望读者不吝赐教。

编　者

2002 年 8 月

编 委 会

主　　编　齐振东　薛　遒

本册主编　蔡勇军　郝建忠

编　　委　董克林　徐宝计　沐爱勤
王浦红　齐文友

目　　次

代 数 部 分

第一讲 对 数

【基本知识】

1. $\log_a N$, $a>0$, $a\neq 1$, 为底数; $N>0$, 为真数

2. $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

3. $\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

4. 换底公式: $\log_a b=\dfrac{\lg b}{\lg a}$

5. 比较常用的对数:

$\log_{10} a$ 简记为 $\lg a$, 称为常用对数; $\log_e a$ 简记为 $\ln a$, 称为自然对数, 其中 e 约等于 2.71828.

6. 与指数之间的关系:

$\log_a N=b$, 则 $a^b=N$;

$\log_a M^n=n\log_a M$;

$e^{\ln a}=a$.

对数的计算问题是对数的最基本的问题, 解决各种对数计算问题要求我们熟练运用对数运算性质、运用指数式、对数式的相互转化、指对数恒等式、换底公式等知识.

【典型例题】

例 1. 设 $x=3-2\sqrt{2}$, 求 $A=(\frac{1}{2}\log_2 4^x-2x^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}$的值.

分析:这一类问题一般都是先化简,再代入.

解:$A=(a-2a^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}=[(a^{\frac{1}{2}}-1)^2]^{\frac{1}{2}}=|a^{\frac{1}{2}}-1|$

$=1-a^{\frac{1}{2}}=1-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

$=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}=1$

例 2. 若 $\log_8 a+\log_4 b^2=5$,而且 $\log_8 b+\log_4 a^2=7$,求 ab.

分析:两已知式中分别含 $\log_8 a$ 和 $\log_4 b^2$、$\log_8 b$、$\log_4 a^2$,利用对数性质可以得到 $\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$,再利用换底公式可化为同底的对数,问题可解.

解: 将两式相加得 $\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$

再由换底公式化简有:

$\frac{1}{3}\log_2 ab+\log_2 ab=12$ 即 $\log_2 ab=9$,有 $ab=2^9$,

所以 $ab=512$

注:对数计算中通常是化为同底对数再进行计算.

例 3. 计算

(1) $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$

(2) $\lg2\cdot\lg50+\lg20\cdot\lg5-\lg100\cdot\lg2\cdot\lg5$

分析:(1)由于 $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 与 $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的和与积均为有理数,因此可将其平方.

(2) 注意 $\lg2+\lg5=1$,$\lg50=1+\lg5$,再利用乘法公式可将问题简化.

解:(1) 原式 $=\frac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$=\frac{1}{2}\lg(3+\sqrt{5}+2\sqrt{9-5}+3-\sqrt{5})=\frac{1}{2}\lg10=\frac{1}{2}$

(2) 原式 $=(1+\lg5)(1-\lg5)+(1+\lg2)(1-\lg2)-2\lg2\lg5$

$=1-\lg^2 2+1-\lg^2 5-2\lg2\lg5$

$=2-(\lg2+\lg5)^2=2-1=1$

注: 当利用已知条件求值无法进行或计算量较大时,常利用特殊数之间的关系,如 $\log_{ab}a+\log_{ab}b=1$, $a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$ 的和与积均为有理数, $\sqrt{a}+c^2+|b|=0$ 成立的条件为 $a=b=c=0$ 等.此时只要对有关式子适当进行变形,即可较快求出所需要的值.

例 4. 已知 $y=c\sqrt{ax-b}+d\sqrt{b-ax}+ab,(a,b,c,d>0)$,求: $\log_b xy$.

解: 要使等式有意义,必须: $ax-b\geqslant0;b-ax\geqslant0$

从而有 $ax-b=0$,即 $b=ax,y=ab$

则 $\log_b xy=\log_b xab=\log_b b^2=2$

得 $\log_b xy=2$

例 5. 计算 $\log_3 8\log_2 49\log_7 25\log_5 27$

分析: 各对数的底不同时,一般考虑换底公式,换成同底后再应用对数的性质进行计算.

解: 原式 $=\frac{\lg8}{\lg3}\times\frac{\lg49}{\lg2}\times\frac{\lg25}{\lg7}\times\frac{\lg27}{\lg5}=\frac{\lg8}{\lg2}\times\frac{\lg49}{\lg7}\times\frac{\lg25}{\lg5}\times\frac{\lg21}{\lg3}$
$=3\times2\times2\times3=36$

注: 此题得到一个有意思的结论:

原式 $=\log_2 8\log_7 49\log_5 25\log_3 27$ 适当对换底公式作一推广:

设 $N_i>0,a_i>0,a_i\neq1(i=1,2,3,\cdots,n),b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一排列,则

$$\log_{a_1}N_1\log_{a_2}N_2\cdots\log_{a_n}N_n=\log_{b_1}N_1\log_{b_2}N_2\cdots\log_{b_n}N_n$$

证明: 因为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一排列,故有:

$\lg a_1\lg a_2\cdots\lg a_n=\lg b_1\lg b_2\cdots\lg b_n$

左 $=\frac{\lg N_1}{\lg a_1}\frac{\lg N_2}{\lg a_2}\Lambda\frac{\lg N_n}{\lg a_n}=\frac{\lg N_1}{\lg b_1}\frac{\lg N_2}{\lg b_2}\Lambda\frac{\lg N_n}{\lg b_n}=$ 右

所以原等式成立.

此公式表明,若干个对数相乘,任意交换其底数,其结果不变,这对于简化计算是很方便的.

例 6. 如果 $a>0,a\neq1$ 并且 $\log_2 a=x,\log_5 a=y$,

$\log_{10}a=z$，求 x、y、z 应满足的关系.

分析：由于三个已知式中真数均为 a 且 $a>0$，$a\neq1$，故可考虑换成以 a 为底的对数，再利用 2、5、10 之间的关系找 x、y、z 之间的关系.

解：因 $\log_2 a=x$，　$\log_5 a=y$，　$\log_{10}a=z$

故 $\dfrac{1}{\log_a 2}=x$，　$\dfrac{1}{\log_a 5}=y$，　$\dfrac{1}{\log_a 10}=z$

故 $\log_a 2=\dfrac{1}{x}$，　$\log_a 5=\dfrac{1}{y}$，　$\log_a 10=\dfrac{1}{z}$

又因 $\log_a 2+\log_a 5=\log_a 10$

故 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$

故 x、y、z 应满足的关系为：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$

例 7. 已知 x、y、z 都是正数，且 $2^x=3^y=6^z$，求 $\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}$ 的值.

分析：由于 x、y、z 均为指数，故考虑取对数，分别求出 $\dfrac{z}{x}$、$\dfrac{z}{y}$，再求和.

解：因 $2^x=3^y=6^z$，故 $x\lg2=y\lg3=z\lg6$

故 $\dfrac{z}{x}=\dfrac{\lg2}{\lg6}$，　$\dfrac{z}{y}=\dfrac{\lg3}{\lg6}$

故 $\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{\lg2+\lg3}{\lg6}=1$

例 8. 已知 $a^xb^yc^z=a^yb^zc^x=a^zb^xc^y=1(a,b,c>1)$. 求证：$x+y+z=0$.

分析：如果对已知式两边取对数，则使指数不含字母，而同时要证明的式子左边各项的关系也可表示出来.

证明：设 $\lg a=A$，$\lg b=B$，$\lg c=C$

因 $a,b,c>1$，故 $A>0$，$B>0$，$C>0$

故 $\lg(a^xb^yc^z)=\lg(a^yb^zc^x)=\lg(a^zb^xc^y)=0$

故 $Ax+By+Cz=0$

故 $Ay+Bz+Cx=0$

故 $Az+Bx+Cy=0$

将上面三式相加得：$(A+B+C)(x+y+z)=0$

因 $A>0, B>0, C>0$

故 $x+y+z=0$

例 9. 已知 $a>4$，求证：$\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}$.

分析： 此题最直接的证明方法为“左减右”，并通过计算证明其大于 0.

解： $\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}=\left[\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-1\right]-\left[\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}-1\right]$

$$=\frac{\lg a-\lg 4}{\lg 4-\lg 3}-\frac{\lg\dfrac{(a-2)}{2}}{\lg 2}$$

因 $\lg 4-\lg 3<\lg\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\lg 2$

故 $\dfrac{\lg a-\lg 4}{\lg 4-\lg 3}-\dfrac{\lg\dfrac{(a-2)}{2}}{\lg 2}>\dfrac{\lg a-\lg 4}{\dfrac{1}{2}\lg 2}-\dfrac{\lg\dfrac{a-2}{2}}{\lg 2}=\dfrac{\lg(\dfrac{a}{4})^2-\lg\dfrac{a-2}{2}}{\lg 2}$

又因 $a>4$，故 $a^2-8a+16>0$

故 $a^2>8a-16$

即 $(\dfrac{a}{4})^2>\dfrac{a-2}{2}>0$，$\lg(\dfrac{a}{4})^2>\lg\dfrac{a-2}{2}$

即 $\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}>0$

故 $\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}$

注： 我们也可以从 $a>4$ 出发，导出 $a^2>8a-16$

从而得到 $\lg(\dfrac{a}{4})^2>\lg\dfrac{a-2}{2}$，再依次得出结论.

证明不等式的常用方法：从已知不等式出发，利用不等式性质逐步变形为要证明的不等式；用左边式子减右边式子，比较其差与 0 之间的大小关系（对数式中常用）；或求两式之比，比较其商与 1 之间的大小关

系(指数式中或乘积式中常用).

例 10. 已知常用对数 $\lg x, \lg\frac{10}{x}$的首数分别是a、b,试求 a^2-2b^2的最大值.

分析:既然给出了首数,如果我们再设出他们的尾数分别为 α、β,则 $\lg x = a+\alpha, \lg\frac{10}{x}=b+\beta$,再结合 $\lg x+\lg\frac{10}{x}=1$,问题可解.

解:设 $\lg x, \lg\frac{10}{x}$的尾数分别为α, β

则 $\lg x = a+\alpha, \lg\frac{10}{x}=b+\beta$,其中$(0\leqslant\alpha,\beta<1)$

相加得:$\lg x+\lg\frac{10}{x}=a+\alpha+b+\beta=1$

得:$1-(a+b)=\alpha+\beta$ ①

①式的左端 $1-(a+b)$为整数,而右端 $\alpha+\beta$ 为两个非负纯小数之和,且 $0\leqslant\alpha+\beta<2$,

故 $\alpha+\beta=0$ 或 $\alpha+\beta=1$

当 $\alpha+\beta=0$ 时,由①得 $b=1-a$

故 $a^2-2b^2=a^2-2(1-a)^2=-(a-2)^2+2$

故当 $a=2$ 时,a^2-2b^2 有最大值 2

当 $\alpha+\beta=1$ 时,由①得 $b=-a$

故 $a^2-2b^2=a^2-2(-a^2)=-a^2$

故当 $a=0$ 时,a^2-2b^2 有最大值 0

综上所述有:当 $a=2$ 时,即 $\lg x=2, x=100$ 时 a^2-2b^2 有最大值 2.

【训练与练习】

1. 计算:$\log_2\frac{1}{125}\log_3\frac{1}{16}\log_5\frac{1}{9}$

2. 已知 A 为锐角,$\lg(1+\sin A)=m, \lg\frac{1}{1-\sin A}=n$,求$\lg\cos A$的值.

3. 对于一切不等于 1 的正数 x，证明：$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_6 x}=\frac{1}{\log_{720} x}$.

4. 若 $\log_a b$ 的尾数为 0，证明：$\log_a\frac{1}{b}>\log_a\sqrt{b}>\log_b a^2$ 与 $\frac{1}{b}>\sqrt{b}>a^2$ 不可能同时成立.

5. 化简：$\log_4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)+\log_4(\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)$

6. 已知 a，b 是正数，且 $a^2+b^2=7ab$，求证：$\log_3(a+b)=\frac{1}{2}(\log_3 a+\log_3 b)+1$.

7. 已知 $A=6\lg p+\lg q$，其中 p，q 为质数，且满足 $q-p=29$，求证：$3<A<4$.

8. 有甲，乙两个四位数，乙数的常用对数是 $A+\lg B(A,B\in N)$，甲数的千位数字与百位数字之和等于 $5B$，乙数比甲数大 9. 求甲，乙两数.

【答案与提示】

1. -24

2. $\frac{1}{2}(m-n)$

3. 应用换底公式就可得到

4. 设 $\log_a b=n$（n 为整数），则 $b=a^n$，若不等式 $\log_a\frac{1}{b}>\log_a\sqrt{b}>\log_b a^2$ 成立，则有：$-n>\frac{n}{2}>\frac{2}{n}$，从而有 $-n^2<\frac{1}{2}n^2<2$. 可解出 $n=0,\pm1$，但当 $n=0$ 时，$b=1$，这与 b 作底数矛盾；当 $n=1$ 时与 $-n>\frac{n}{2}$ 矛盾，故：$n=-1$.

当 $a>1$ 时，有 $\frac{1}{b}>\sqrt{b}$、$\sqrt{b}<1<a^2$，故 $\frac{1}{b}>\sqrt{b}>a^2$ 不成立

当 $0<a<1$ 时，有 $\frac{1}{b}<\sqrt{b}$，故 $\frac{1}{b}>\sqrt{b}>a^2$ 不成立

综上所述有:两不等式不可能同时成立.

5. $\frac{3}{4}$

6. 利用$(a+b)^2=9ab$

7. 证明:由 $q-p=29$ 可知 p,q 为一奇一偶,又 p,q 为质数,故得出 $p=2,q=31$

从而 $A=6\lg p+\lg q=6\lg 2+\lg 31=\lg 1984$

因 $10^3<1984<10^4$,故 $\lg 10^3<A<\lg 10^4$

即 $3<A<4$

8. 设甲数为 x,乙数为 y,则 $\lg y=A+\lg B$

有:$y=B\times 10^A$,因为任意两数字之和不超过 18,所以

$5B\leqslant 18$,$(B\in N)$所以 $B=1,2,3$

又因为 y 是四位数,所以 $A=3$,即 $y=B\times 1000$

由于 $y>x$,$x\geqslant 1000$,所以 $B\neq 1$

又因为 $y-x=9$,所以 $B\neq 3$

否则 $B=3y=3000$,$x=2991$,此时 $2+9=11\neq 5B$

故 $B=2$,即 $x=1991$,$y=2000$

第二讲　函　数

【基本知识】

一、一次函数

1. 定义：

函数 $y=kx+b(k\neq0,k,b$ 为常数)叫一次函数.特别的，当 $b=0$ 时，函数称为正比例函数.

2. 图像：

一次函数 $y=kx+b$ 的图像是过 $(0,b)$，$(-\frac{b}{k},0)$ 两点的一条直线.一次函数 $y=kx+b$ 的图像叫做直线 $y=kx+b$，其中 b 称为直线在 y 轴上的截距.

3. 性质：

(1) 当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

(2) $b>0$ 时，直线与 y 轴交于正半轴上一点；$b=0$ 时，直线与 y 轴交于原点；$b<0$ 时，直线与 y 轴交于负半轴上一点.

二、二次函数

1. 二次函数的图像和性质

(1) 定义：形如 $y=ax^2+bx+c$(其中 a,b,c 为常数，且 $a\neq0$)的函数称为二次函数.

(2) 二次函数的解析式

① 一般式：$y=ax^2+bx+c$；

② 顶点式：$y=a(x+h)^2+k$；

③ 两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(3) 图像

① 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像是一条对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 的抛物线，常数 a 决定抛物线的开口方向。

② 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的作图法常用的有描点法、平移法. 下面我们重点回忆一下平移法.

$$y=ax^2\xrightarrow[m<0,\text{向右平移 } m \text{ 个单位}]{m>0,\text{向左平移 } m \text{ 个单位}}y=a(x+m)^2$$
$$\xrightarrow[n<0,\text{向右平移 } n \text{ 个单位}]{n>0,\text{向左平移 } n \text{ 个单位}}y=a(x+m)^2+n$$

总结起来可以用下面一句话概括："左加右减，上加下减". 即向左平移 k 个单位，则自变量 x 加上 k，向右平移 k 个单位，则自变量 x 减去 k；上下平移相类似只不过是因变量 y 变大或变小.

(4) 性质

① 增减性：若 $a>0$，则当 $x\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x\geqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大. 若 $a<0$，则当 $x\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x\geqslant -\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小.

② 最值：若 $a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；若 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 最值问题

若 $a>0$，二次函数有最小值 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此时 $x=-\dfrac{b}{2a}$；若 $a<0$，二次函数有最大值 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此时 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

3. 二次函数的综合问题

一元二次不等式的解集与二次函数、一元二次方程之间的关系如下：