数学趣题与BASIC程序

电子计算机科学普及读物

胡久稔 编著

辽宁教育出版社

电子计算机科学普及读物

数学趣题与BASIC程序

胡久稔 编著

数学趣题与BASIC程序

胡 久 稔 编著

辽 宁 教 育 出 版 社 出 版 辽 宁 省 新 华 书 店 发 行
（沈阳市南京街6段1里2号） 朝 阳 新 华 印 刷 厂 印 刷

字数：166,000 开本：787×1092 1/32 印张：7 3/4
印数：1—4,300
1985年10月第 1 版 1985年10月第 1 次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：理 俞
封面设计：安今生

统一书号：7371·94 定价：1.10 元

前　言

近一二年，计算机特别是微型计算机已逐步普及到中学，越来越多的人对计算机的使用产生了浓厚的兴趣。

本书选择了一些有趣的数学问题，从数学与计算机程序的两个侧面加以阐述。书中从三角数、平方数谈起，进而引到勾股数、素数、斐波那契数、整边三角形与不定方程，最后一部分——棋盘上的数学更是妙趣横生，引人入胜。

书中的题目有难有易，前后的题目既独立又有联系，每题包括数学背景的说明、程序框图、程序、数学定理的引出与证明等内容，不同的读者可有选择地阅读，各有收益。

本书适于高中学生、中学教师阅读，对数学爱好者、计算机程序爱好者及大学低年级学生可做课外的学习与参考。

书中的程序是用BASIC语言编写的，但其算法框图也适用于其它计算机语言。书中的程序已全部在机器上运行通过，多数题目是在TRS—80机上运行的，有的在IBM PC—XT及NORD—100计算机上运行通过。

在此，应当感谢北京师范大学数学系王世强教授，他审阅了书中数学部分的手稿，并给予热情的鼓励；还要感谢中国科学院计算技术研究所王庆元副研究员，沈阳计算所李木副研究员以及吴永化同志，他们都先后和作者进行过有益的讨论。

由于水平有限，错误与不当之处望读者批评指正。

作　者

1985年1月于中国科学院沈阳

计算技术研究所

目　录

一、二次三项式与一元二次方程

1·1 求方程的根

1. 问题的提出

我们从一个比较容易的问题入手，来了解对一个数学问题的处理，其中包括程序框图、程序及其运行.

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，叫做一元二次方程.我们知道，方程的根是唯一的由它的系数决定的，它的求解公式是：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

以及判别式Δ：

$$\Delta=b^2-4ac$$

当 $\Delta\geqslant0$时，方程有实根，而当 $\Delta<0$ 时，方程没有实根.

怎样求方程的实根呢？特别是给了几组不同的系数，怎样判定方程是有实根还是无实根，并在有实根的情况下怎样求出实根呢？

2. 程序思想

这个程序是简单的，但它告诉我们几个重要语句的应用，它们是：

赋值语句，READ 语句，DATA 语句，GOSUB语句，RETURN语句等.这里特别注意的是GOSUB语句与RETURN语句在实现主程序向子程序调用后，返回时将到 GOSUB 的

下一条，而设立子程序的目的往往是为了共享这一资源。

GOSUB与RETURN 的关系，可用图1·1—1表示：

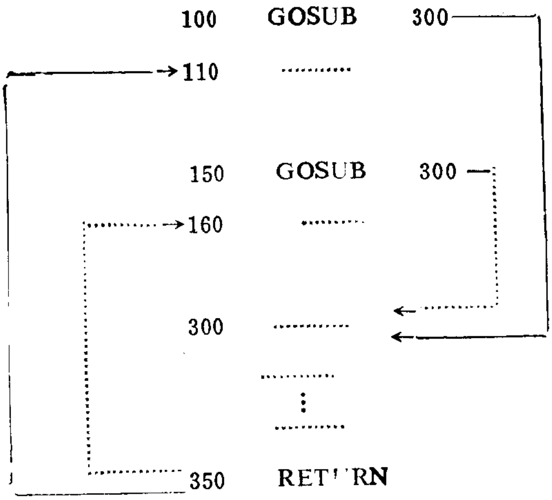

图 1·1—1

3．框图与程序

图1·1—2给出这个程序的框图。

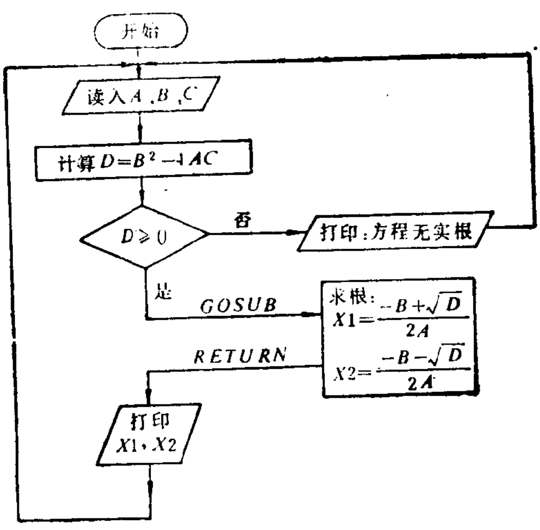

图 1·1—2

对于程序的三组输入：

A＝2，B＝12，C＝3

A＝1，B＝1，C＝1

A＝1，B＝－1，C＝－1

其中第一、三组有解，给出了实根，而第二组没有解，打印出“这个方程无实根”：

THE EQUATION HAS'T REAL ROOTS

对三组数据输入，程序运行产生的两组根是：

$X_1=-0.261387$，$X_2=-5.73861$

以及 $X_1=1.61803$，$X_2=-0.618034$

下面是程序及其运行.

```
10  REM ROOTS OF A QUADRATIC EQUATION
20  READ A,B,C
30  D=B*B—4*A*C
40  IF D>=0 THEN 60
50  LPRINT "THE EQUATION HAS'T REAL RO-
    OTS"
55  GOTO 20
60  GOSUB 100
70  LPRINT "X1=";X1,"X2="; X2
75  GOTO 20
100  X1=(-B+SQR(D))/(2*A)
110  X2=(-B-SQR(D))/(2*A)
120  RETURN
130  DATA 2,12,3,1,1,1,1,-1,-1
X1=-.261387      X2=-5.73861
THE EQUATION HAS'T REAL ROOTS
```

X1 = 1.61803　　X2 = − .618034

1·2　素数多项式

1. 问题的提出

素数又名质数，是很重要的一种数。在大于1的整数中，除1外不能用比它小的数整除的数，叫做素数。

素数常见的有2，3，5，7，…等等，还有一些有趣的素数，如：

1234567891，111…1（共19个）

从古希腊时代，人们就开始研究素数了。人们知道关于素数的第一个定理是欧几里得发现的，他证明了素数是无穷的。还有一个叫爱拉托斯散的人，发现了求素数的一个方法，叫筛法（数学上也称之为算法，见6·2节）。它形象地比喻，把自然数放在一个大筛子里筛，不是素数的都筛掉了，剩下来的全是素数。后来，人们很想用一个多项式来枚举素数，法国一个数学家费尔马（Fermat，1601—1665）声称，$2^{2^n}+1$对$n=0,1,2,3,\cdots$都是素数。对$n=0,1,2,3,4$的五个数是3，5，17，257，65537，确实都是素数。而当继续验证时，后来的年轻数学家欧拉指出，费尔马的断言是错误的，当$n=5$时，有：

$$4294967297 = 641\times6700417$$

已不再是个素数。特别有趣的是，人们再也没有发现这样的费尔马素数，相反，如今

$$F(n) = 2^{2^n}+1$$

人们猜测，当$n\geqslant5$时，$F(n)$都是合数。电子计算机的出现，更加深了对这后一猜想的可信度，一个惊奇的事件是，借助于计算机已判定$F(73)$是一个合数！

有人发现，$2x^2+29$对$x=0,1,\cdots,28$给出29个素数，而x^2+x+41 对 $x=0,1,\cdots,39$给出40个素数．更有人发现，$x^2-79x+1601$对$x=0,1,2,\cdots,79$给出80个素数！

现在，我们用程序计算多项式

$$x^2-x+41 \quad 对 \quad x=0,1,\cdots,40$$

给出41个素数（对$x=0$和 $x=1$相同）．

2．程序思想

这是一个计算多项式值的简单程序，这里要说明的是，当计算一般高次多项式时，进行一个极简单的变换是有好处的，它可以缩短计算时间．

例如，计算：

$$f(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$$

对给定一个 x 值，计算$f(x)$，在不变形的情况下，需要

乘法：$5+4+3+2+1=15$（次）；

加法：5 次．

对$f(x)$稍加变化，即：

$f(x)=((((a_0x+a_1)x+a_2)x+a_3)x+a_4)x+a_5$，这样，乘法用 5 次，加法用 5 次．表面上看来，对于每秒运算上百万次的计算机来说，减少10次乘法运算是微不足道的，然而，如果这一段程序出现在循环中，而循环的次数又是相当大时，就不容忽视了．

3．程序

下面给出了程序及其运行结果．

```
10  REM PRIME POLYNOMIAL
20  LPRINT"PRIME NUMBERS"
30  FOR X=1 TO 40
40  P=X*X-X+41
```

```
50  LPRINT P,
60  NEXT X
70  END
PRINME NUMBERS
```

41	43	47	53	61
71	83	97		
113	131	151	173	197
223	251	281		
313	347	383	421	461
503	547	593		
641	691	743	797	853
911	971	1033		
1097	1163	1231	1301	1373
1447	1523	1601		

1·3 判别式与方程

1. 问题的提出

给了一个整系数一元二次方程：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

假定它有实根，则其判别式

$$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$$

自然，Δ也是一个整数．十分清楚，方程一定，其判别式是一个确定的值，但反过来则不然．同一个判别式的值可能会对应许多不同的方程式．例如，判别式为1的整系数方程可不费气力地列出如下三个：

$$4x^2+9x+5=0$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$2x^2+5x+3=0$$

如把系数a、c对调，判别式的值不变，又可得到三个方程。

必须指出，并非任给一个正整数的判别式的值，它的整系数一元二次方程必存在。例如，容易证明，不存在一个整系数一元二次方程，它的判别式是1983。如若不然，令：

$$b^2-4ac=1983$$

由于1983为奇数，$4ac$ 为偶数，所以 b^2为奇数，即 b 必为奇数。令 $b=2m+1(m=0,1,\cdots)$，实际上m得相当大，于是有：

$$(2m+1)^2-4ac=1983$$

$$4m^2+4m-4ac=1982$$

$$\therefore\quad 2M=991\qquad(\text{其中}\ M=m^2+m-ac)$$

导出偶数与奇数相等，这是不可能的。得证。

为简明起见，我们仅考虑找出判别式为 1 的整系数一元二次方程，又由于a、c的对称性，我们限定$a\leqslant c$，且系数均是正的．容易看出有无穷多这样的方程，用计算机枚举出一些是很方便的。

2．程序思想

由判别式为 1，有：

$$b^2-4ac=1$$

$$\therefore\quad b^2=4ac+1$$

显然，不能有$a=c$，因为这时 b 不能取整数，于是在循环时 c 从 $a+1$到 n。该程序是找出 a 的系数从 1 到 n 的总的方程，同时限定$c\leqslant n+1$．此外，这一程序还暗示了，对$4k+1$ $(k=1,2,\cdots)$型的平方数是无穷的，给出有限步的验证。

3．框图与程序

本程序对 $n=20$，枚举出各组方程的系数．其框图与程序如下：

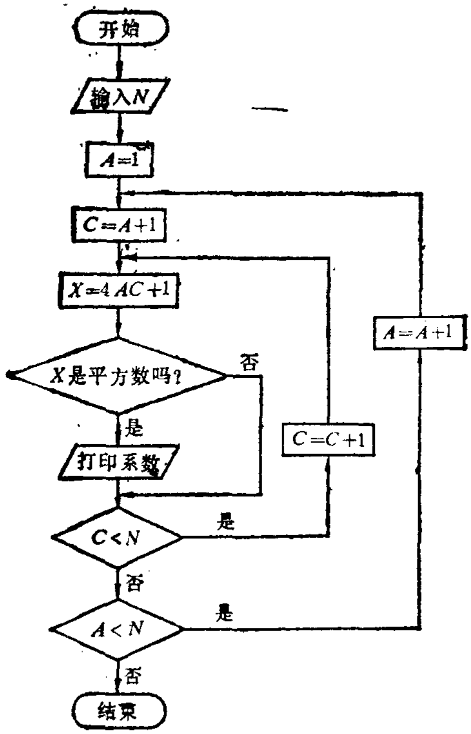

图 1·3—1

程序及运行输出是：

```
10  REM NUMBER OF QUADRATIC EQUATION
20  INPUT"N=";N
30  LPRINT"N=";N
40  FOR A=1 TO N
50  FOR C=A+1 TO N
60  X=4*A*C+1
70  M=INT(SQR(X)+0.5)
```

```
80  IF X-M*M=0 THEN 100
90  GOTO 110
100  LPRINT A,M,C
110  NEXT C
120  NEXT A
130  END
```

N=20

1	3	2
1	5	6
1	7	12
1	9	20
2	5	3
2	7	6
2	9	10
2	11	15
3	7	4
3	11	10
3	13	14
4	9	5
4	15	14
4	17	18
5	11	6
5	19	18
6	13	7
6	17	12

6	19	15
7	15	8
8	17	9
9	19	10
10	21	11
11	23	12
12	25	13
12	31	20
13	27	14
14	29	15
15	31	16
16	33	17
17	35	18
18	37	19
19	39	20
20	41	21