

机器人动力学

赵锡芳 编著



上海交通大学出版社

机 器 人 动 力 学

赵锡芳 编 著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

沪新登字205号

内 容 提 要

本书比较系统地介绍了机器人动力学的研究方法和基本理论：包括应用牛顿—欧拉方程、拉格朗日方程、高斯最小约束原理、凯恩动力学方程建立和求解机器人动力学方程及计算机辅助算法，动力学模拟，静力分析，含弹性构件的机器人动力学，并附有习题和应用所述方法进行动力学设计的实例，以便于自学。

本书可供从事机器人技术研究的教师、科技人员、研究生和大学生参考。

机器人动力学

出 版：上海交通大学出版社
(淮海中路1984弄19号)

发 行：新华书店上海发行所

印 刷：上海交通大学印刷厂

开 本：787×1092(毫米)1/16

印 张：10.5

字 数：257000

版 次：1992年12月 第1版

印 次：1992年12月 第1次

印 数：1—1480

科 目：283—339

ISBN7—313—01128—8/TP·24

定价：3.10元

前 言

现代科学技术的发展和进步产生了机器人，机器人是机器进化和技术进步的必然结果，而机器人技术又促进了生产力的发展。近10多年来各种用途的机器人已得到了越来越广泛的应用，它们在国民经济、生产技术系统和科学研究中的地位 and 作用越来越显著，如国外工业机器人自60年代问世、70年代应用、80年代发展，至1988年末，世界机器人总数已达28万台，对工业生产的发展起了很大的作用。机器人已成为当代自动化生产技术的重要工具，提高生产率的强有力的手段。机器人技术是高技术产业发展的前沿之一。随着经济建设的发展和需要，国际上对它的竞争亦在加剧，我国机器人技术的发展必将为国民经济带来巨大的经济效益和社会效益。

随着机器人技术的迅速发展及在工业中有效、广泛地应用，有关机器人的理论及设计、制造和应用的新的技术学科——机器人学，作为一门正式被研究的学科，已逐渐形成，并越来越引起人们广泛的注意。机器人学是一门综合性很强的边缘学科，它涉及机械、电气工程，现代控制技术、传感技术、计算机系统和人工智能等多门学科。但又有其自身的系统性和专业性。它是一个新兴的科技领域，内容极为丰富、广泛。其中专业性比较强的有机器人运动学和动力学，机器人轨迹规划和运动控制，机器人的传感技术，机器人的编程语言，机器人的智能和任务规划等。机器人动力学是机器人学的重要组成部分，是机器人机构及控制系统的设计的基础。

本书是在近10年来为研究生讲授机器人动力学课程的教学实践的基础上，综合吸取了作者过去编写的机器人动力学校内教材以及国外近几年来出版的机器人动力学教材、专著和论文等有关内容；同时也反映了上海交通大学机器人研究所的部分研究工作。

本书作为机器人动力学的入门，主要介绍机器人动力学的基本内容。全书共分8章。第1章绪论。第2~7章主要介绍机器人机构动力学的研究方法和基本理论，计算机辅助建立和求解机器人动力学方程，机器人动力学设计和计算等，为解决机器人的设计、研究和试验中的主要动力学问题，打下一定的基础。第8章介绍应用哈密顿原理建立含弹性构件机器人的动力学模型及振动分析方法。附录A、B、C为习题和应用前几章所述方法进行动力学设计的实例，以便于自学。

本书第8章由孙巧同志编写。

本书可供从事机器人技术研究和设计工作的科技工作人员，研究生和高年级大学生参考。由于编者学识水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

于上海交通大学

1992年8月

目 录

1	绪论	
1.1	机器人动力学的特点	(1)
1.2	机器人动力学的研究方法	(2)
1.3	数学工具和力学原理	(3)
1.4	机器人动力学的研究动向	(3)
2	牛顿—欧拉方程法	
2.1	牛顿—欧拉方程	(5)
2.2	坐标系统和连杆参数及广义坐标	(8)
2.3	坐标变换	(9)
2.4	机构构形	(10)
2.5	运动关系	(11)
2.6	作用力和力矩	(11)
2.7	迭代算法	(13)
3	拉格朗日方程法	
3.1	拉格朗日方程	(15)
3.2	齐次坐标在刚体力学中的应用	(15)
3.3	动能	(17)
3.4	位能	(19)
3.5	4×4 矩阵形式的动力学方程	(20)
3.6	3×3 矩阵形式的动力学方程	(22)
4	高斯最小约束原理法	
4.1	高斯原理	(29)
4.2	速度矩阵和加速度矩阵及对加速度的约束条件	(31)
4.3	力矩阵	(36)
4.4	驱动元件和传动元件的惯性	(41)
4.5	动力学与数学规划	(46)
4.6	闭式动力学方程	(48)
4.7	有效惯量和耦合惯量及重力项的简化	(50)
5	凯恩方程法	
5.1	广义速率和偏速度及偏角速度	(55)
5.2	凯恩动力学方程	(58)
5.3	广义主动力	(58)
5.4	广义惯性力	(60)

5.5	应用凯恩方法建立机器人机构的动力学方程	(61)
6	机器人机构的动力学模拟	
6.1	动力学模拟的拉格朗日乘子法	(69)
6.2	操作运动的模拟	(85)
6.3	其他动力学特性参数的计算	(94)
6.4	控制综合及完整的动力学模型	(96)
7	静力分析	
7.1	与作用力等效的广义力	(102)
7.2	与操作力等效的广义力	(105)
7.3	静力分析举例	(109)
8	含弹性构件的机器人动力学	
8.1	机器人系统的弹性问题	(115)
8.2	单弹性臂机构的建模	(116)
8.3	考虑构件弹性的仿真计算	(128)
附 录		
附录 A	习题	(139)
附录 B	上海Ⅱ号机器人的动力学设计和典型操作任务	(141)
附录 C	上海Ⅰ号机器人机构动力学方程及动力学分析	(149)
参考文献		(160)

1 绪 论

机器人动力学主要是研究机器人机构的动力学。机器人机构包括机械结构和驱动装置，它是机器人的本体，也是机器人实现各种功能运动和操作任务的执行机构，亦是机器人系统中的被控对象。对机器人动力学的研究，应该说，在机器人一出现就已开始，且随机器人技术的发展而不断地加以丰富和积累。但比较系统和完整的机器人动力学，却是近几年才开始形成。况且机器人动力学的研究还远远跟不上机器人技术的发展。

本书主要介绍机器人动力学的基本理论和研究方法，为读者进一步研究机器人动力学打下一个良好的基础，以适应和促进机器人技术的应用。

1.1 机器人动力学的特点

机器人，它在用途上、功能上与一般传统的自动化机械不同，它具有万能性，有多种多样的广泛用途。这是因为机器人不仅有灵巧和发达的执行机构，还有逐渐接近于“人工智能”的感觉系统和控制系统。机器人的执行机构，在机构学上，是一个由多连杆、多自由度的开式运动链（或含局部闭式运动链）构成的，且每个自由度都有驱动的空间机构。在力学上，它是一个复杂的多体系统；在控制上，这个力学系统又是我们所要研究的控制对象，是一个多变量的非线性控制系统，一般也是计算机控制系统。

机器人动力学与其他一般力学、机构动力学比较，它与现代控制技术和计算技术更为密切相关。设计机器人的控制系统，以及实时控制机器人本身的过程中，不可避免的要运用现代计算技术，因此对于动力学的研究必须适应现代计算技术，并需要解决一系列新的问题。在一般力学中，特别是分析力学、多刚体力学，对动力学问题都有深入透彻的分析，可以用来对我们的力学系统以分析形式描述运动微分方程，并从原则上确定系统的某些动力特性。但不能完全解决我们这里的问题，这里所说的力学系统是指控制系统的控制对象，它与控制系统及工程技术更为密切相关。

一方面，在实时控制机器人的过程中，动力学的计算是在所控制的力学系统的运动过程中进行的，即要求实时计算，为此必须研究相应的算法。在研究和设计机器人执行机构时，显然很少要求实时计算，但也要求算法本身节省机器时间及保证一定的计算准确性。所以，从这一角度来说，我们要解决的是动力学的算法问题，或称之为计算动力学。诚然，由计算机自动建立机器人机构的运动微分方程而达到实时计算的动力学算法，目前还只是理论上的研究，很少真正应用于实际的控制，目前还只能应用来进行动力学的优化设计。

另一方面，机器人机构往往是用来完成各种各样具体的操作任务的，即实现具有某一实际要求的操作运动，或称之为功能性运动。所以，机器人动力学可以说又是操作动力学。这也与控制密切相关，与此相应的可称之为“动力控制”。

所以机器人动力学的研究所要解决的问题主要有二，其一，是如上所述的解决与控制系

统的联系问题；其二，是在一定程度上达到机器人机构最优设计的自动化问题。第二个问题，只是近几年来才提出来的，且对它越来越引起人们的注意。目前，在机器人机构的设计中，如运动系统各种参数（尺寸、质量、惯量等），以及执行驱动元件的选择常常是基于经验，而缺乏系统的设计方法。因此，对于实际应用的机器人机构，很多参数的选择及马达功率的确定往往是过大的，这从能量损耗和操作速度的观点看来不是最优的。因此，研究对于机器人机构最优的准则也是十分重要的。

1.2 机器人动力学研究方法

目前，研究机器人动力学的主要方法是用计算机辅助方法建立和求解机器人机构的动力学模型。所谓动力学模型指的是一组动力学方程，亦即运动微分方程，把这样的模型作为研究力学和模拟运动的有效工具。

由执行系统的特点可知，机器人机构，它在机构学上是一个复杂的多驱动的空间机构，又是一个多变量的非线性系统，描述它们的运动学、动力学方程组必然是很复杂、很庞大、很冗繁的。推导这样的方程组，需要作很大的努力，且可能产生错误，把这工作交由计算机完成，这就大大地减少了产生错误的可能性。

在结构上，机器人机构构形可能的方案是各不相同的，是多种多样的。我们在设计时，不可能一下子选择好一个极好的机器人的结构方案，为了选择一个我们所需要的满足一定要求的结构方案，需要经常研究各种各样的结构型式，而为每种结构型式分析推导出运动微分方程，这是不可想象的，也只有通过计算机方法建立数学模型，才有可能进行结构方案的选择。

另外，这些机构与驱动元件，以及控制系统一起工作，以保证执行机构朝目标方向运动或进行某一操作作业，这也需要用计算机建立的数学模型来模拟可控运动和研究控制规律。

由此可见，用计算机建立的数学模型应解决上述各方面的问题。这样的模型，在结构上，能把各种各样可能的结构类型及组成情况都包括进去，即应具有任意空间结构的结构模型。这样，当机构有些结构上的改变，甚至运动系统图有些改变时，只要更换某些数据就行。它能自动调整算法。这样的模型就能适用于大多数各种各样的结构方案。在动力学、运动学关系上，这个模型仅仅由基本力学定律组成，能自动建立复杂的运动链的微分方程或自动建立起能够反映出它们的运动学、动力学关系的方程式。只有当引入有关具体结构的运动系统图和结构参数，以及某些特性后，才描述一个特定的具体机构，若再结合外加的特殊条件，就能得到动力学方程组的解。在模拟运动方面，所建立的模型能够用来按已知结构的构形（运动系统图、结构参数）和控制规律来模拟运动，即把指定的控制信号作为输入量，它就能将空间机构的运动轨迹输出来。这样就能解决有操作功能的系统的运动模拟问题和控制问题。运用这样的模型来研究机构合理的运动系统图，藉以进行运动学设计，进行机构的优化设计，研究有效的控制算法，解决机器人初步设计、研究、试验阶段及运动过程中出现的问题，以及研究构件弹性的影响，力控制等其他与动力学有关的问题。实际上需要研究和解决的动力学问题很多，但基本上主要解决二类动力学问题，第一类问题是动力学的力分析，或称之为动力学的正问题（direct problem）。已知系统必要的运动（拟定机器人所要做的动作后确定下来的系统的运动），通过运动学分析，计算与已知运动有关的运动链各连杆

的位移、速度和加速度,求得各关节的驱动力或反力。第二类问题是动力学的运动分析,或称之为动力学的逆问题(inverse problem)。已知作用在机构上的外力和各关节上的驱动力,计算各关节(或连杆)运动的加速度和反力,对加速度进行积分求得所需要的速度和位移。这也就是模拟机器人的可控运动的问题。

对于动力学的正问题,可用下式表示:

$$Q=f_0(q,\dot{q},\ddot{q},\text{机构构形}) \quad (1.1)$$

对于动力学的逆问题,可用下式表示:

$$\ddot{q}=f_q(q,\dot{q},Q,\text{机构构形}) \quad (1.2)$$

上二式中: q 是一组确定机构位置的独立变量,即广义坐标; Q 是作用在机构关节中的驱动力(或力矩)矢量; $\dot{q}$ 、 $\ddot{q}$ 是广义坐标的速度矢量和加速度矢量。

函数 f_0 、 f_q 不是已规定的或已导出的显式函数,它们代表一整套算法, f_0 代表已知 q 、 $\dot{q}$ 、 $\ddot{q}$ 和构形及初始状态求 Q ,而 f_q 代表已知 q 、 $\dot{q}$ 、构形及初始状态求 $\ddot{q}$ 。

1.3 数学工具和力学原理

我们把机器人的机构一次近似地看作为一组刚体,且机器人的工作对象:如机械加工、装配过程中被机器人移动的各种零部件等,也可看作为刚体。研究机器人机构的运动学和动力学时,就需要一定的数学工具来描述各个刚体,以及这些刚体组成的系统的位移、速度、加速度和动力学特性等。可以用来描述机器人运动的数学工具很多,如矢量计算的方法,张量计算的方法,旋量方法及各种矩阵的方法,这些方法都可以用来解决这里的问题。当然其繁复的程度是各不相同的,终究选择那种方法最好,至今还没有一个统一的见解。本书应用常用的矩阵法和矢量法。

为了建立机器人机构的动力学模型,可以应用各种力学原理。就目前所看到的有:能量守恒定律,达朗培尔原理与虚功原理相结合的动静法、拉格朗日方程、牛顿方程、动量矩定理、哈密顿原理、牛顿-欧拉方程、高斯最小“拘束”原理、阿沛耳方程、凯恩方程等。而且对同一机构应用同一原理所得到的模型也往往因为所用的数学工具不同而不一样,可见建立机器人动力学模型的方法之多。对于各种方法所建立的模型,原则上可从是否适合于一般化的构形,如既有转动副,又有移动副;运动方程是否是简明,是否适合于反复迭代计算;是否适合于计算机;是否要求偏导;计算时间是否最少等方面予以评价,但对如此繁多的动力学模型予以一一详细介绍,并作出确切的综合性评价是比较困难的。为此,本书将对几种常用的方法:如牛顿-欧拉法、拉格朗日法、高斯最小“拘束”原理法、凯恩方法、哈密顿原理法作适当的介绍,以便相互比较。从中也不难看出各自的优缺点。

1.4 机器人动力学的研究动向

目前机器人动力学研究的动向,其最大的特点是与机器人的实际应用密切结合。矛盾的现象是:一方面,在工业中广泛应用的各种类型的机器人及机械手得到迅速的发展;另一方面,虽然机器人及机械手的理论在很多大学和研究中心作了研究,但通常在实际的机械手和

机器人的制造和设计中没有发挥任何显著的作用。可见在实际应用与学院式的理论研究之间存在着相当大的差距。

近年来,由于国民经济的建设需要最合理的工业机器人和最好的控制语言,以及为了发展更好的机器人,因此,研究工作向着直接有益于应用方面发展。在机器人动力学的研究方面更是这样。就目前所了解的,机器人动力学研究主要向下面所述的几个方面深入发展。

(1) 切实可行的设计和评价机器人的动力学方法。从机器人动力学观点来评价机器人。在设计中就考虑如何提高和改善机器人机构的动力特性和可控性能,合理选择构形的动力学优化设计。由于考虑到实际应用,动力学的设计将更多的涉及具体的操作任务,以致发展所谓操作动力学。

(2) 为了适应机器人的实时计算,减少动力学的计算时间,提高计算效率,目前多从改进动力学模型和计算程序等方面着手。在这方面,很多研究者以计算第一类动力学问题的计算效率作为一个重要的衡量标准。

提高计算效率问题随着机器人速度的提高而显得特别突出。因为在低速时,实现实时计算可以通过下列办法来达到:一是计算时忽略哥氏力和离心力,而通过反馈来校正误差;二是按状态空间,用表格表示部分解,以减少实时计算。而高速时,哥氏力和离心力影响较大,它的忽略不能用反馈来校正,这时不得不对动力学作更深入的研究。

(3) 从机器人的控制综合提高机器人的控制性能方面研究动力学问题,解决控制系统的反馈、稳定及解耦等方面的问题。

(4) 随着机器人向高速、高精度发展,考虑构件弹性及振动影响的动力学研究,已成为不少研究工作者感兴趣和重视研究的课题。

(5) 随着带多传感器的高性能机器人的发展和机器人应用领域的扩大,以及特种机器人的发展,可考虑:新颖或复杂的机械结构形式;含多环闭式运动链及作业过程中从开式链变成闭式链;力控制及柔顺性等来研究动力学问题。

(6) 改进和完善动力学建模方法。通常用计算机进行动力学建模,一般有数字法、全符号法和数字-符号法三种。研究工作者们力图从计算效率高、方程结构性好、各项物理意义明确等要求出发进行改进和完善,并开发动力建模的通用、实用软件。

2 牛顿—欧拉方程

据理论力学可知,动力学普遍定理有三个:动量定理、动量矩定理、动能定理^[18]。应用动力学普遍定理来建立机器人机构动力学方程的方法,是对每个刚体(构件)应用由动量定理得出的质心运动定理,以及相对于质心的动量矩定理来建立起刚体动态的变化与作用力之间的关系,即刚体与其质心一起的平动规律决定于刚体上作用力的主矢,而刚体相对于质心的转动规律决定于刚体作用力对质心的主矩。应用牛顿—欧拉方程来建立机器人机构的动力学方程,是指对质心的运动用牛顿方程,相对于质心的转动用欧拉方程。它们建立方程的过程有很多相似之处。另一方面,同是应用动力学普遍定理或牛顿—欧拉方程,但由于运动学的表示方法及具体推导、演算的处理上不同,而有各种不同的表达形式。如文献[3]中叙述了应用动力学普遍定理、块矩阵、牛顿—欧拉方程以及欧拉角诸方法,有的是比较适合于计算机计算的递推式,有的是比较紧凑的矩阵形式。本节只介绍应用牛顿—欧拉方程的一种方法。掌握此法后,在应用动力学普遍定理的方法、达朗贝尔原理的动静法等类似的其他方法时就容易理解。

2.1 牛顿—欧拉方程

我们把机器人机构的每个连杆(或称构件)看作为一个刚体。如果已知连杆的质心的位置和表征质量分布的惯量张量,那末,为了使连杆运动,必需使它加速或减速,这时所需的力和力矩是期望加速度和连杆质量及其分布的函数。牛顿—欧拉方程就表明力、力矩、惯性和加速度之间的相互关系。

若刚体的质量为 m ,质心在 c 点,为使质心得到加速度 w_c 。所必须的作用在质心的力为 F (如图2.1),则按牛顿方程有

$$F = mw_c \quad (2.1)$$

式中, F 、 w_c 均为三维矢量。

为使刚体得到角速度 ω ,角加速度 $\dot{\omega} = \varepsilon$ 的转动,必须在刚体上作用一力矩 M (如图2.2),则按欧拉方程为

$$M = I\varepsilon + \omega \times I\omega \quad (2.2)$$

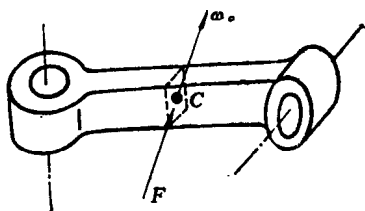


图 2.1

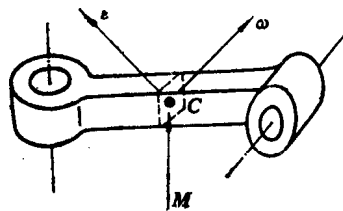


图 2.2

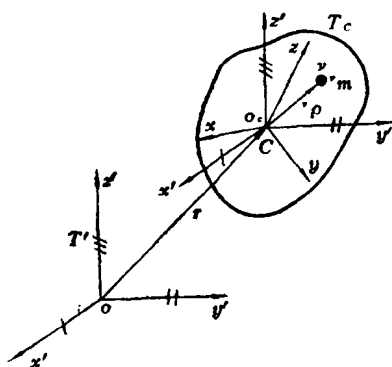


图 2.3

式中: M, ε, ω 都是三维矢量; cI 为刚体相对于原点通过质心 c 并与刚体固结的刚体坐标系的惯量张量。

设 o_cxyz 坐标系为原点与质心 c 重合的刚体坐标系 T_c (如图2.3), 则相对于这一坐标系的惯量张量 cI 由六个量组成, 可用 3×3 对称矩阵表示为

$${}^cI = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

式中: I_x, I_y, I_z 分别为刚体对 x, y, z 轴的转动惯量 (或称惯量矩、惯矩); I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} 为离心转动惯量 (或称惯量积、惯积), 有

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_v m({}^v\rho_2^2 + {}^v\rho_3^2) \\ I_y &= \sum_v m({}^v\rho_1^2 + {}^v\rho_3^2) \\ I_z &= \sum_v m({}^v\rho_1^2 + {}^v\rho_2^2) \\ I_{xy} &= I_{yx} = \sum_v m {}^v\rho_1 {}^v\rho_2 \\ I_{xz} &= I_{zx} = \sum_v m {}^v\rho_1 {}^v\rho_3 \\ I_{yz} &= I_{zy} = \sum_v m {}^v\rho_3 {}^v\rho_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中: ${}^v\rho$ 为刚体上 v 点对于质心 c 点的径矢。

$${}^v\rho = ({}^v\rho_1 {}^v\rho_2 {}^v\rho_3)^T$$

${}^v\rho_1, {}^v\rho_2, {}^v\rho_3$ 分别为 ${}^v\rho$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上相应的分量。

vm 为刚体上 v 点的质量。

应该指出, 惯量张量可以相对于任何一个坐标定义。上述给出的相对于刚体坐标系 T_c 的惯量张量是最常用的, 因它不随刚体运动而变化。这里以左上标字母来表示其相对于哪一坐标系的惯量张量。

由已知的相对于某一坐标系的惯量张量, 求相对于另一坐标系的惯量张量, 可根据平行轴定理及相似变换来求得。设通过同一原点的另一坐标系为 T' , 即 $o_cx'y'z'$ (见图2.3), R 为 T' 系与 T_c 系之间的 3×3 转动变换矩阵, 或称之为 T_c 相对于 T' 的相对姿态矩阵, (R 的具体意义见2.2节), 则相对于 T' 坐标系的惯量张量为

$${}^{c'}I' = R {}^cI R^T \quad (2.5)$$

当两坐标系之间有平行移动时 (如图2.3) 则有

$$\left. \begin{aligned} {}^{c'}I_{x'x'} &= {}^cI_{xx} + m(r_1^2 + r_2^2) \\ {}^{c'}I_{y'y'} &= {}^cI_{yy} + m(r_1^2 + r_3^2) \\ {}^{c'}I_{x'z'} &= {}^cI_{xz} + m(r_2^2 + r_3^2) \\ {}^{c'}I_{x'y'} &= {}^cI_{xy} + mr_1 r_2 \\ {}^{c'}I_{y'z'} &= {}^cI_{yz} + mr_3 r_2 \\ {}^{c'}I_{x'z'} &= {}^cI_{xz} + mr_1 r_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中: $r=[r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ 是 T' 坐标系中表示原点 O 到 T 。坐标系原点 O_c 的径矢。

其他任意的情况, 可由上述两种情况组合而成。

惯量张量有如下性质:

- (1) 对于有对称面的刚体, 带有与对称面垂直轴的下标的惯量积为零。
- (2) 转动惯量总是正的, 惯积可能有正或负。
- (3) 当刚体坐标系相对于刚体的方位改变时, 三个转动惯量的和是一个不变量。
- (4) 惯量张量的三个特征值是刚体的三个主惯量, 相应的特征向量即为其惯量主轴。

对于机器人机构的连杆, 其几何形状及组成都较复杂, 计算每个连杆的惯矩是很困难的, 比较实用的是用惯量摆等仪器实测。

欧拉方程式(2.2)可由动量矩定理推得, 设 xyz 为固连在刚体上的刚体坐标系, 下面所涉及到的动量矩 H , 角速度 ω , 角加速度 ε , 作用力对质心 c 点的矩 M , 径矢 ${}^c\rho$ 等都是 在刚体坐标系上表示的。 i, j, k 分别为 x, y, z 轴上的单位矢量, 则

$${}^c\rho = {}^c\rho_1 i + {}^c\rho_2 j + {}^c\rho_3 k, \quad \omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k, \quad H = H_1 i + H_2 j + H_3 k, \\ M = M_1 i + M_2 j + M_3 k$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_1 i + \dot{\omega}_2 j + \dot{\omega}_3 k$$

刚体对于质心的动量矩为

$$H = \sum_j m [{}^c\rho \times (\omega \times {}^c\rho)] = \sum_j m [|{}^c\rho|^2 \omega - ({}^c\rho \cdot \omega) {}^c\rho] \\ = (I_x \omega_1 - I_{xy} \omega_2 - I_{xz} \omega_3) i + (-I_{yx} \omega_1 \\ + I_{yy} \omega_2 - I_{yz} \omega_3) j + (-I_{zx} \omega_1 - I_{zy} \omega_2 + I_{zz} \omega_3) k$$

所以

$$H_1 = I_x \omega_1 - I_{xy} \omega_2 - I_{xz} \omega_3 \\ H_2 = -I_{yx} \omega_1 + I_{yy} \omega_2 - I_{yz} \omega_3 \\ H_3 = -I_{zx} \omega_1 - I_{zy} \omega_2 + I_{zz} \omega_3$$

以矩阵形式表示, 则为

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = {}^c I \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

即

$$H = {}^c I \omega$$

由动量矩定理得

$$M = \frac{dH}{dt} = \left(\frac{dH_1}{dt} \right) i + \left(\frac{dH_2}{dt} \right) j + \left(\frac{dH_3}{dt} \right) k + H_1 \left(\frac{di}{dt} \right) \\ + H_2 \left(\frac{dj}{dt} \right) + H_3 \left(\frac{dk}{dt} \right)$$

上式等号右边的前三项是动量矩的相对变化率, 可在刚体坐标系上测量出, 后三项是动量矩的牵连变化率。对各项求导后可得

$$M = (I_x \dot{\omega}_1 - I_{xy} \dot{\omega}_2 - I_{xz} \dot{\omega}_3) i + (-I_{yx} \dot{\omega}_1 + I_{yy} \dot{\omega}_2 - I_{yz} \dot{\omega}_3) j \\ + (-I_{zx} \dot{\omega}_1 - I_{zy} \dot{\omega}_2 + I_{zz} \dot{\omega}_3) k + H_1 \omega \times i + H_2 \omega \times j + H_3 \omega \times k \\ = {}^c I \varepsilon + \omega \times H = {}^c I \varepsilon + \omega \times ({}^c I \omega)$$

此式即为欧拉方程(2.2)式。

2.2 坐标系统和连杆参数及广义坐标

为了描述机构各连杆的特性参数及相互间的运动关系,需要引入相应的参考坐标系。设与机器人的基座相固连的坐标系 $o_0x_0y_0z_0$ 为基座坐标系,一般取 z_0 轴为垂直向上。与地球相固连的惯性坐标系为 $oxyz$ 。当基座固定时,一般就取基座坐标系为惯性坐标系。每个连杆上固连一个坐标系,即动坐标系,或称刚体坐标系,如在 i 连杆上固连 $o_ix_iz_i$ 坐标系。对刚体坐标系的取法,这里采用机器人机构理论中常用的 Denavit-Hartenberg 运动学表示法。此法的优点是:描述坐标系统间变换关系的参数数目最少,形式比较自然,对旋转运动副和直线运动副的表示形式统一。若把旋转运动副的旋转轴、直线移动运动副的移动轴称为运动副的轴,则取 i 刚体坐标系的 z_i 轴与关节 J_{i+1} 的运动副的轴重合,并任意取定某一方向。取 x_i 轴为 z_{i-1} 轴与 z_i 轴的公法线(公垂线),方向由此公垂线与 z_{i-1} 轴的垂足指向与 z_i 的垂足。 y_i 轴按右手规则确定(如图2.4)。

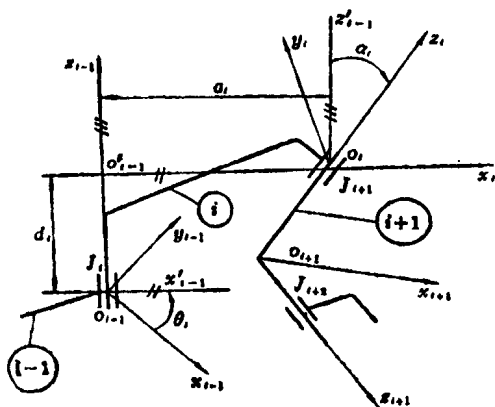


图 2.4

运动链的末杆,即连杆 n 的坐标系,因它的一端与 $n-1$ 连杆有运动副连系,而另一端是自由的,不再与其他连杆形成运动副,此时 z_n 轴可根据机器人的作业类型而确定。如对于装配、上下料的作业,以抓取工件为主,此时可把 z_n 轴取为手指的行进方向,对于焊接、喷涂作业,可把 z_n 轴取为焊枪送丝方向和喷嘴喷射的方向等。

两相邻刚体坐标系之间的关系,即由 o_{i-1} 坐标系变换到 o_i 坐标系的变换关系,可由下面四步基本变换来表示。

(1) o_{i-1} 坐标绕 z_{i-1} 轴转动 θ_i , 使转动后的 x'_{i-1} 轴(即 x'_{i-1} 轴)与 x_i 轴平行,称 θ_i 为连杆的相对转角。

(2) 沿 z_{i-1} 轴移动 d_i , 使移动后的 x'_{i-1} 轴与 x_i 轴重合,称 d_i 为连杆偏距。此时 o_{i-1} 移动到 o'_{i-1} 。

(3) 沿 x_i 轴移动 a_i , 使移动后的 o'_{i-1} 与 o_i 重合,称 a_i 为连杆长度。此时 z_{i-1} 轴移动到 z'_{i-1} 轴。

(4) 再绕 x_i 轴转动 α_i 角,使转动后的 z'_{i-1} 与 z_i 轴重合,称 α_i 为连杆的扭曲角。

上述四种基本变换的 4 个参数 $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ 中, a_i, α_i 是由 i 连杆的结构决定的,是连杆的结构参数(或设计参数),在设计机构时就确定了。 θ_i, d_i 两者之一是运动变量,根据运动副的类型而定。对于转动副, θ_i 是运动变量,表示 i 构件相对于 $i-1$ 构件的相对转角,而 d_i 是常数,此时 d_i 也是结构参数。对于移动副,则 d_i 是运动变量,而 θ_i 是常数。通常称 a_i, d_i, α_i (移动副时,则为 a_i, θ_i, α_i) 为 i 连杆的连杆参数。

在机器人机构中各关节通常都是主动关节,所以常把运动变量 θ_i 或 d_i 取为机构的广义坐标组,记为 $q_i, i=1, \dots, n$, 或用广义坐标矢量,即

$$q=[q_1, \dots, q_n]^T$$

2.3 坐标变换

从 $i-1$ 坐标系到 i 坐标系的变换关系, 由上节四个基本变换可知, 是由两部分组成的, 一部分是转动变换, 一部分是移动变换。以 3×3 矩阵 $R_{i-1,i}$ 表示这一转动变换, 它是由 a 和 d 两个基本变换合成的, 相应于 a 步的变换为

$$R_{i-1,i}^{(a)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相应于 d 步的变换为

$$R_{i-1,i}^{(d)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} R_{i-1,i} &= R_{i-1,i}^{(a)} R_{i-1,i}^{(d)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

可称 $R_{i-1,i}$ 为 i 相对于 $i-1$ 的转动变换矩阵, 或称之为 i 连杆相对于 $i-1$ 连杆的相对姿态矩阵。用 o_{i-1} 到 o_i 的移动矢量 $l_{i-1,i}$ 来表示移动变换, 它是由 b 和 c 两步基本变换合成的, 在 $i-1$ 坐标系中表示为

$${}^{i-1}l_{i-1,i} = [a_i \cos \theta_i, a_i \sin \theta_i, d_i]^T \quad (2.8)$$

由于系统的正交性, 所以有

$$R_{i-1,i}^{-1} = R_{i-1,i}^T = R_{i,i-1}^T$$

i 坐标系中的矢量 ${}^i b_i$ 在 $i-1$ 坐标系中可表示为

$${}^{i-1}b_i = R_{i-1,i} {}^i b_i \quad (2.9)$$

若某一点 v , 在 i 坐标系中的坐标为 ${}^i \rho_{v1}$ 、 ${}^i \rho_{v2}$ 、 ${}^i \rho_{v3}$ 或用列阵表示为

$${}^i \rho_v = [{}^i \rho_{v1} \quad {}^i \rho_{v2} \quad {}^i \rho_{v3}]^T$$

变换到 $i-1$ 坐标系上, 即同一 v 点在 $i-1$ 坐标系上的坐标为 ${}^{i-1}h_{v1}$ 、 ${}^{i-1}h_{v2}$ 、 ${}^{i-1}h_{v3}$, 或用列阵表示为

$${}^{i-1}h_v = [{}^{i-1}h_{v1} \quad {}^{i-1}h_{v2} \quad {}^{i-1}h_{v3}]^T$$

则有

$$\begin{pmatrix} {}^{i-1}h_{v1} \\ {}^{i-1}h_{v2} \\ {}^{i-1}h_{v3} \end{pmatrix} = R_{i-1,i} \begin{pmatrix} {}^i \rho_{v1} \\ {}^i \rho_{v2} \\ {}^i \rho_{v3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ({}^{i-1}l_{i-1,i})_1 \\ ({}^{i-1}l_{i-1,i})_2 \\ ({}^{i-1}l_{i-1,i})_3 \end{pmatrix}$$

或

$${}^{i-1}h_v = R_{i-1,i} {}^i \rho_v + {}^{i-1}l_{i-1,i} \quad (2.10)$$

从基座坐标系到 i 坐标系的转动变换为 3×3 矩阵 $R_{0,i}$, 则有

$$R_{0,i} = R_{0,1} R_{1,2} \cdots R_{i-1,i} \quad (2.11)$$

从基座坐标系到 i 坐标系的移动变换为移动矢量 $l_{0,i}$, 则有

$$l_{0,i} = l_{0,1} + l_{1,2} + \cdots + l_{i-1,i}$$

2.4 机构构形

在阐述机器人机构的运动学和动力学时, 常常用到机构构形这一概念。所谓机构构形, 指的是机构的结构及参数, 前者是指组成机构的构件 (或连杆) 的数目, 连杆各构件的关节 (运动副) 的类型和数目; 后者是指表征各构件特征的几何尺寸、惯量特性等。表示同一机构构形的方法不是唯一的, 它随运动学表示方法及动力学计算的不同而异。

现考虑一个无分支的简单开式链机构的构形, 它由 n 个构件组成, 连接机构构件的关节为具有一个自由度的五级运动副。则这类机构有 n 个关节和自由度。构件及关节都是从基础开始顺序编号, 连接 i 构件与 $i-1$ 构件的关节为关节 i , 标以 J_i (如图 2.5)。

坐标系统按 Denavit-Hatemberg 表示法, 则下面列出的一组数据是表示这一机构构形的方法之一:

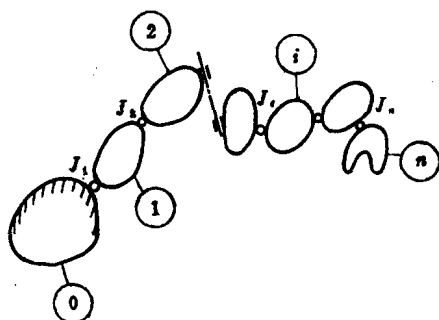


图 2.5

$n = \text{自由度数} = \text{构件数} = \text{关节数}$

m_i 为构件 i 的质量

I_i 为构件 i 的惯量张量, 它是相对于原点在质心 c_i 、各坐标轴与 i 坐标系对应轴平行的坐标系写出的。

机构的位形 (或位姿) 指的是各构件之间, 以及构件与惯性坐标系之间的相对位置和方位 (姿态)。在某一时刻 t 时, 机构的位形通常可用一组广义坐标来确定, 如

$$q_i(t) \quad i=1, \dots, n$$

用 n 维矢量形式表示, 则

$$q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$$

当 $J_i=0$ 时, $q_i=\theta_i$; $J_i=1$ 时, $q_i=d_i$ 。

某一时刻机构的速度表示为 $\dot{q}_i(t)$, 其中 $i=1, \dots, n$, 或用速度矢量表示为

$$\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$$

机构的初始状态, 由 $t=t_0$ 时的初始位形及初始速度可表示为

$$q(t_0) \text{ 或 } q_i(t_0) \quad i=1, \dots, n$$

$$\dot{q}(t_0) \text{ 或 } \dot{q}_i(t_0) \quad i=1, \dots, n$$

$$J_i = \begin{cases} 0, & \text{当 } J_i \text{ 关节为转动副时} \\ 1, & \text{当 } J_i \text{ 关节移动副时} \end{cases}$$

$$i=1, \dots, n$$

a_i, α_i, d_i (当 $J_i=1$ 时为 θ_i), $i=1, \dots, n$ 为连杆参数 c_i 构件 i 的质心

ρ_i 为关节 J_{i+1} (或 i 坐标系的原点 o_i) 到质心 c_i 的径矢 (在 i 坐标系中表示的)

l_i 为关节 J_i 到关节 J_{i+1} 的径矢 (在 i 坐标系中表示的)

$$l_i = [a_i \quad d_i \sin \alpha_i \quad d_i \cos \alpha_i]^T$$

在研究动力学问题时，机构构形作为原始数据输入，而机构的初始状态作为初始条件。

2.5 运动关系

为了表示各构件的运动情况，引用下述符号（如图2.6）

c_i 为*i*构件的质心。 v_{c_i} 为*i*构件质心的速度矢量。 w_{c_i} 为*i*构件质心的加速度矢量。 v_i 为*i*坐标系原点 o_i 的速度矢量。 w_i 为*i*坐标系原点 o_i 的加速度矢量。 ω_i 为*i*构件的角速度矢量。 ε_i 为*i*构件的角加速度矢量。 e_i 为*i*坐标系 $o_i z_i$ 轴的单位矢量。即 J_{i+1} 关节运动副轴的单位矢量， l_i 为 o_{i-1} 到 o_i 的径矢。 ρ_i 为 o_i 到 c_i 的径矢。 h_i 为 o_{i-1} 到 c_i 的径矢， $h_i = l_i + \rho_i$ 。

以上矢量都是在绝对坐标系上表示的。若上述符号的左上角标以“*i*”，如 ${}^i v_{c_i}$ 、 ${}^i w_{c_i}$ 、 ${}^i v_i$ 、 ${}^i w_i$ 、 ${}^i \varepsilon_i$ 、 ${}^i e_i$ 、 ${}^i l_i$ 、 ${}^i \gamma_i$ 、 ${}^i \rho_i$ 、 ${}^i \omega_i$ 等，则说明是在*i*坐标系中表示的同一矢量。若左上角标以“*i+1*”，则说明是在*i+1*坐标系中表示的同一矢量。各构件的速度、加速度可写成下列递推式：

$${}^i v_{c_i} = {}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i \rho_i \quad (2.12)$$

$${}^i w_{c_i} = {}^i w_i + {}^i \varepsilon_i \times {}^i \rho_i + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i \rho_i) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1} w_{c_{i+1}} &= {}^{i+1} w_{i+1} + {}^{i+1} \varepsilon_{i+1} \times {}^{i+1} \rho_{i+1} \\ &\quad + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times ({}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{i+1} \rho_{i+1}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

若 J_{i+1} 关节是转动副，则

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = R_{i+1,i} ({}^i \omega_i + \dot{q}_{i+1} {}^i e_i) \quad (2.15)$$

$${}^{i+1} \varepsilon_{i+1} = R_{i+1,i} ({}^i \varepsilon_i + \ddot{q}_{i+1} {}^i e_i + \dot{q}_{i+1} {}^i \omega_i \times {}^i e_i) \quad (2.16)$$

$${}^{i+1} w_{i+1} = R_{i+1,i} ({}^i w_i + {}^{i+1} \varepsilon_{i+1} \times {}^{i+1} l_{i+1} + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times ({}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{i+1} l_{i+1})) \quad (2.17)$$

若 J_{i+1} 关节是移动关节，则

$${}^{i+1} \omega_{i+1} = R_{i+1,i} {}^i \omega_i \quad (2.18)$$

$${}^{i+1} \varepsilon_{i+1} = R_{i+1,i} {}^i \varepsilon_i \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} {}^{i+1} w_{i+1} &= R_{i+1,i} ({}^i w_i + \ddot{q}_{i+1} {}^i e_i) + {}^{i+1} \varepsilon_{i+1} \times {}^{i+1} l_{i+1} + {}^{i+1} \omega_{i+1} \times ({}^{i+1} \omega_{i+1} \times {}^{i+1} l_{i+1}) \\ &\quad + 2 {}^{i+1} \omega_{i+1} \times (R_{i+1,i} \dot{q}_{i+1} {}^i e_i) \end{aligned} \quad (2.20)$$

式中： ${}^i l_i$ 、 ${}^i \rho_i$ 是构件的不变常数， ${}^i e_i$ 是*i*坐标系中 z_i 轴的单位矢量，即

$${}^i e_i = [0 \ 0 \ 1]^T$$

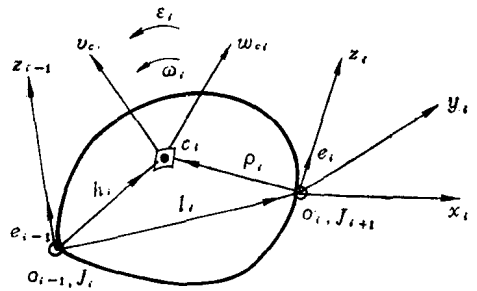


图 2.6

2.6 作用力和力矩

现考虑作用在第*i*构件上的作用力和力矩（如图2.7）。