高等学校教材

# 工程微分几何

武汉水利电力大学 丁宇明 编

责任编辑：彭志豪

ISBN 7-120-00545-6/TV·712
定价： 9.75 元

高等学校教材

# 工程微分几何

武汉水利电力大学 丁宇明

水利电力出版社

(京)新登字115号

## 内 容 提 要

本书共13章，1～4章为曲线论，5～11章为曲面论，12章为曲线论和曲面论的工程图示及图解，13章为微分几何在工程技术中的应用。

本书从工科学生的数学基础出发，并根据工程技术领域中应用本学科的需要来安排章节体系和取舍内容，由浅入深、循序渐进，文字通俗易懂，配有较多插图，各章末还配有习题并附有习题解答。

本书可作工科院校有关专业高年级学生、研究生的教学用书，也可供工程技术人员参考。

高等学校教材

工 程 微 分 几 何

武汉水利电力大学 丁宇明 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市京东印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 21.25印张 484千字

1994年6月第一版 1994年6月北京第一次印刷

印数 0001— 590 册

ISBN 7-120-00545-6 TV·712

定价 9.75元

# 前　　言

微分几何是以无穷小分析（即微分）的方法来研究几何图形的性质，它的主要研究对象是曲线和曲面。在工程技术领域中曲线、曲面的应用实例是很多的，例如，机械设计和制造领域中诸如工具曲面，飞机、轮船、汽车的外壳曲面，轧钢辊面，空间啮合曲面，犁面，水轮机叶片，风扇叶片等；建筑设计和施工领域中诸如屋面，雨蓬，螺旋楼梯，桥梁，隧洞等的造型设计；水利水电工程领域中诸如溢流曲面，泄水孔洞的进口、出口过水曲面，水电站蜗壳曲面、尾水管曲面，泵站进水和出水流道曲面，渠道边坡的渐变曲面等。虽然，微分几何不是研究曲线、曲面的唯一方法，但是，它在曲线、曲面的研究领域中占有重要地位。

在50～60年代，微分几何课程几乎仅在理科数学专业中开设。70～80年代，随着我国"四个现代化"建设的发展，特别是随着计算机辅助设计（CAD）和计算机辅助制造（CAM）的发展，微分几何在工程技术领域中得到广泛应用，微分几何课程也在不少工科院校作为高年级学生的选修课和研究生的必修课。

本书是编者在武汉水利电力大学（原武汉水利电力学院）多年来讲授工程微分几何课时所编的讲义为基础，出版前在总结多年教学实践经验的基础上写成的。针对工科学生和工程技术人员学习理科类微分几何书籍较难理解、较难运用的问题，本书主要特点是：从工科学生的数学基础实际出发，并根据工程技术领域中应用本学科的需要来安排本书的章节体系和取舍内容。全书共13章，1～4章为曲线论，5～11章为曲面论，12章为曲线论和曲面论的工程图示及图解，13章为微分几何在工程技术中的应用。为了便于读者理解，书中编入了必要的理论分析、定理证明和公式推导等内容，但在叙述时注意由浅入深，循序渐进。文字上也力求通俗易懂，多配插图。全书共选取了68道例题，并在每章后附有习题（全书共有150道习题）。在选题上，从工科应用需要角度，例题中证明题和计算题并重，习题中则以计算题为主。读者应当把例题和习题看作为正文的必要补充，它们对于理解和运用工程微分几何来说是必不可少的。对于40～60学时的教学要求来说，习题在难度上和份量上都大致合适。为了便于自学，特别是工程技术人员学习微分几何，本书还附有各章的习题解答。显然，题解只是为了自学参考用的，不应当影响独立思考、解题。当然，本书中的习题解答不一定是标准的，一些题目往往有多种解题方法，还有些题目由于所选的参数不同，答案也可能不一样（在形式上不一样）。

本书由华中理工大学方一星同志主审，编者对主审人以及曾向本书提出过宝贵意见的同行专家和读者（包括历年来使用本书的研究生）表示感谢。

由于编者水平有限，书中错误之处在所难免，欢迎同行专家和读者批评指正。

编　者

1992年5月于珞珈山

# 目　　录

# 第一章 向 量 函 数

## 第一节 向量运算简述

向量分析是微分几何中研究曲线曲面的主要工具。在空间解析几何中，把既有大小又有方向的量称为**向量**或称为**矢量**，以坐标原点$O$为始点的向量$\overrightarrow{OP}$称为位置向量。在微分几何中，把位置向量称为**向径**或称为**矢径**，记为$\boldsymbol{r}$，即$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$。在本书中规定，向量、向径均用黑体字母表示。

在空间直角坐标系中设$x$，$y$，$z$为向径$\boldsymbol{r}$在坐标轴上的分量；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为沿着三个坐标轴正向的**单位向量**或称**幺矢**，如图1-1所示，则向径$\boldsymbol{r}$可以写为

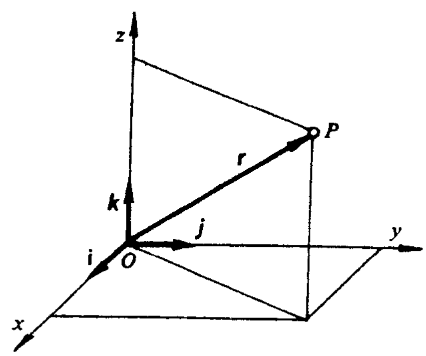


图 1-1

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$$

其模为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

向量运算主要有：

1. 向量的和与差

$$\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2=\{x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\} \tag{1-1}$$

2. 向量的数量积（或称数积，点积）

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\langle\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\rangle$$

或

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\end{aligned} \tag{1-2}$$

由数量积可知，两向量垂直（$\boldsymbol{r}_1\perp\boldsymbol{r}_2$）的充要条件是

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0 \tag{1-3}$$

3. 向量的向量积（或称矢积，叉积）

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\langle\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\rangle\boldsymbol{e}$$

式中 $\boldsymbol{e}$——单位向量，方向与$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$同向。

向量积也可写为

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right\} \tag{1-4}$$

由向量积可知，两向量平行（$\boldsymbol{r}_1/\!/\boldsymbol{r}_2$）的充要条件是

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0} \tag{1-5}$$

式中黑体字 **0** 表示零向量。两向量若线性相关，则也是两向量平行的充要条件，即

$$\lambda \boldsymbol{r}_1 + \mu \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0} \tag{1-6}$$

式中，系数$\lambda$, $\mu$不同时为零。

4. 三向量混合积

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3 = (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) \cdot \boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \tag{1-7}$$

或

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

由混合积可知，三向量$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$共面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = 0 \tag{1-9}$$

或为三向量线性相关，即

$$\lambda \boldsymbol{r}_1 + \mu \boldsymbol{r}_2 + \nu \boldsymbol{r}_3 = 0 \tag{1-10}$$

式中，系数$\lambda$, $\mu$, $\nu$不同时为零。

5. 三向量的二重向量积

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_2 (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}_1 (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3) \tag{1-11}$$

或

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1-12}$$

可利用向量运算的方法来证明一个很有用的恒等式，即**拉格朗日(Lagrange)恒等式**：

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_4) = (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_4) - (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3) \tag{1-13}$$

（证） 把各个向量都用分量表示，则不难验证拉格朗日恒等式，但此法运算较繁。下面利用三向量的二重向量积来证明。

设$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_4) &= \boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_4) \\ &= (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{r}_3) \cdot \boldsymbol{r}_4 \\ &= [(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3] \cdot \boldsymbol{r}_4 \\ &= [(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_2 - (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3)\boldsymbol{r}_1] \cdot \boldsymbol{r}_4 \\ &= (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_4) - (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_4)\end{aligned}$$

## 第二节 向 量 分 析

1. 向量函数的极限

为了讨论曲线和曲面的向量方程，现引进向量函数的概念。如同数学分析中的数量函数，可把向量作为随某一个（或两个）参数变化而改变其值和方向的变量。

**定义** 对应于闭区间〔$t_1$，$t_2$〕里的每一个 $t$ 值，若都有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$，则把 $\boldsymbol{r}$ 称为变量（即参数）$t$ 的**向量函数**（或称**矢函数**，或**变向量**，或**变矢**），记为$\boldsymbol{r}(t)$。

设向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 在$t_0$的某一邻域内有定义，$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$为定向量。若对于每一个任意的正数$\varepsilon$，必有一个正数$\delta$，使得当$0<|t-t_0|<\delta$时，有 $|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$，则可说，当$t\to t_0$时$\boldsymbol{r}(t)$趋近于$\boldsymbol{r}_0$，把定向量$\boldsymbol{r}_0$称为变向量$\boldsymbol{r}(t)$的极限，记为

$$\lim \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$$

显然，对于向量函数$\boldsymbol{r}(t)$，当$t\to t_0$时，若它的 3 个分量的极限

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t)=y_0, \quad \lim_{t\to t_0} z(t)=z_0$$

存在的话，则向量函数的极限存在，且为$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0$。

参照数学分析中对普通数量函数求极限所用的方法不难证明

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)\\
&\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)\\
&\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)\\
&\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)
\end{aligned}\right\}\tag{1-14}$$

式中 $\lambda(t)$——普通数量函数。

2. 向量函数的微分和积分

有了向量函数的极限概念，就可以引进向量函数的连续性概念和讨论它的导数、微分、积分。

给出一个向量函数$\boldsymbol{r}(t)$，在闭区间〔$t_1$，$t_2$〕中，当$t\to t_0$（$t_1<t_0<t_2$)时，若向量函数在$t_0$的极限值等于其函数值，即

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$$

则称向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 在$t_0$是连续的。若$\boldsymbol{r}(t)$ 在区间$t_1<t<t_2$内的每一点都连续，则称$\boldsymbol{r}(t)$在区间〔$t_1$，$t_2$〕内是连续的。

设向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 在闭区间〔$t_1$，$t_2$〕内连续，$t_0$和$t_0+\Delta t$ 均在此闭区间内，则当$\Delta t\to 0$时，极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在的话，则称$\boldsymbol{r}(r)$在$t_0$处可导，或可微，并把这个极限称为$\boldsymbol{r}(t)$在$t_0$处的**导向量**。若闭区间〔$t_1$，$t_2$〕内处处可导，则把极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

称为向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 的**导向量函数**，简称**导向量**，记为$\boldsymbol{r}'(t)$，或$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$。

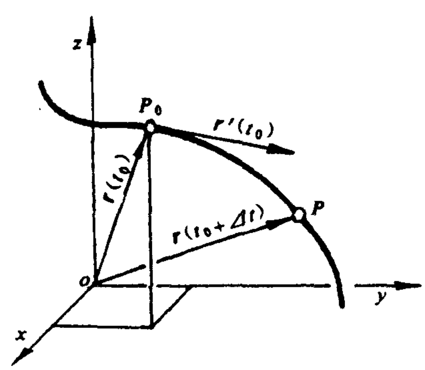


图 1-2

导向量的几何意义如图1-2所示。当$\Delta t\to 0$时，

曲线上点$P$无穷趋近于固定点$P_0$，割线$\overline{P_0P}$的极限位置即为曲线在点$P_0$的极限位置，即为曲线在点$P_0$处的切线。所以，曲线上点$P_0$处的导向量$\boldsymbol{r}'(t_0)$就是曲线在点$P_0$的切线方向。在点$P_0$处导向量若存在，则该点的曲线的切线也必然存在。

参照数学分析中普通数量函数的微导公式，不难证明向量函数的如下微导公式：

$$
\left.\begin{aligned}
&(\lambda\boldsymbol{r})' = \lambda'\boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{r}' \\
&(\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \pm \boldsymbol{r}_2' \\
&(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \cdot \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2' \\
&(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)' = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2' \\
&(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)' = (\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3') \\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{du}\frac{du}{dt} = \boldsymbol{r}'(u)u'(t) \qquad [\text{当}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u), u = u(t)\text{时}]
\end{aligned}\right\} \tag{1-15}
$$

以上各式中　$\lambda = \lambda(t)$——普通数量函数；

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$——向量函数。

根据极限定义还可得到

$$
\boldsymbol{r}'(t) = \{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\} \tag{1-16}
$$

类似于数学分析中普通数量函数的偏导数，可得到**偏导向量**。设

$$
\boldsymbol{r}(u,v) = \{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}
$$

则有偏导向量

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} = \left\{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right\} = \{x_u, y_u, z_u\} \\
\boldsymbol{r}_v &= \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \left\{\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right\} = \{x_v, y_v, z_v\}
\end{aligned}\right\} \tag{1-17}
$$

关于向量函数的积分，和普通数量函数的积分一样。向量函数的**不定积分**和**定积分**为

$$
\left.\begin{aligned}
&\int \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C} \\
&\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)
\end{aligned}\right\} \tag{1-18}
$$

式中　$\boldsymbol{R}(t)$——向量函数$\boldsymbol{r}(t)$的原向量函数；

$\boldsymbol{C}$——常向量，即长度和方向均为固定的向量。

参照普通数量函数的积分公式，不难证明

$$
\left.\begin{aligned}
&\int [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]dt = \int \boldsymbol{r}_1(t)dt + \int \boldsymbol{r}_2(t)dt \\
&\int \lambda\boldsymbol{r}(t)dt = \lambda\int \boldsymbol{r}(t)dt \\
&\int \boldsymbol{v} \quad t)dt = \boldsymbol{v}\int \boldsymbol{r}(t)dt \\
&\int \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}(t)dt = \boldsymbol{v} \times \int \boldsymbol{r}(t)dt
\end{aligned}\right\} \tag{1-19}
$$

式中　$\lambda$——常数；

$\boldsymbol{v}$——常向量。

3. 向量函数的泰勒（Taylor）公式

在微分几何里讨论曲线、曲面的有关极限问题，例如第二章中讨论曲线的密切面时，常要利用向量函数的泰勒公式。

设向量函数$\boldsymbol{r}(t)$在$t_0$与$t_0+\Delta t$之间有连续的 $n$ 阶导向量$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$，则普通数量函数$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 在这里也有连续的 $n$ 阶导数$x^{(n)}(t)$ 、$y^{(n)}(t)$、$z^{(n)}(t)$。根据普通数量函数的泰勒公式得

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+x'(t_0)\Delta t+\frac{x''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\cdots\cdots+\frac{x^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}\Delta t^{n-1}+\frac{x^{(n)}(t_1)}{n!}\Delta t^n$$

$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+y'(t_0)\Delta t+\frac{y''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\cdots\cdots+\frac{y^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}\Delta t^{n-1}+\frac{y^{(n)}(t_2)}{n!}\Delta t^n$$

$$z(t_0+\Delta t)=z(t_0)+z'(t_0)\Delta t+\frac{z''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\cdots\cdots+\frac{z^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}\Delta t^{n-1}+\frac{z^{(n)}(t_3)}{n!}\Delta t^n$$

其中，$t_1$、$t_2$、$t_3$为 3 个在$t_0$和$t_0+\Delta t$之间的值，它们一般不相等。依次用$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$乘以上 3 式，并把等号两端相应项加起来，便可得到如下的向量函数泰勒公式：

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{\boldsymbol{r}''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\cdots\cdots+\frac{\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}\Delta t^{n-1}+\frac{\boldsymbol{R}_n}{n!}\Delta t^n \tag{1-20}$$

式中，$\boldsymbol{R}_n=x^{(n)}(t_1)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t_2)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t_3)\boldsymbol{k}$。　　$(t_1\neq t_2\neq t_3)$

式（1-20）表示向量函数$\boldsymbol{r}(t)$ 按参数 $t$ 的增量$\Delta t$的幂展开到 $n$阶的泰勒公式，$n$的数值根据精度要求而定。对于式（1-20）中的末项，可给出下面的另一种形式。由于$t_1$、$t_2$、$t_3$在$t_0$和$t_0+\Delta t$之间，当$\Delta t\to 0$时，$t_1$、$t_2$、$t_3$都趋近于$t_0$，故有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}_n&=\lim_{t_1\to t_0}x^{(n)}(t_1)\boldsymbol{i}+\lim_{t_2\to t_0}y^{(n)}(t_2)\boldsymbol{j}+\lim_{t_3\to t_0}z^{(n)}(t_3)\boldsymbol{k}\\&=x^{(n)}(t_0)\boldsymbol{i}+y^{(n)}(t_0)\boldsymbol{j}+z^{(n)}(t_0)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\end{aligned}$$

于是有

$$\boldsymbol{R}_n-\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{R}_n-\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)$$

向量函数$\boldsymbol{R}_n$与它的极限值$\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)$ 的差为无穷小向量$\boldsymbol{\varepsilon}$，即

$$\boldsymbol{R}_n-\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)=\boldsymbol{\varepsilon}$$

或

$$\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}$$

于是式（1-20）可写成如下常用的形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=&\boldsymbol{r}(t_0)+\boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t+\frac{\boldsymbol{r}''(t_0)}{2!}\Delta t^2+\cdots\cdots\\&+\frac{\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}\Delta t^{n-1}+\frac{\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)}{n!}\Delta t^n+\boldsymbol{\varepsilon}\Delta t^n\end{aligned} \tag{1-21}$$

## 第三节　特 殊 向 量 函 数

1.定长变向量

长度固定而方向不断变化的向量称为**定长变向量**。例如，表示球面上一条曲线的变向量$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，它的长度等于球半径，为固定，而它的方向不断改变，如图1-3所示。

**定理1.1**　向量函数$\boldsymbol{r}(t)$为定长变向量的充要条件是

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$$

（证）　必要性：若$\boldsymbol{r}(t)$为定长，则$|\boldsymbol{r}(t)|=C$（常数），或$\boldsymbol{r}^2(t)=C^2$。对此式两端求导，得$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0$，于是可得$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0$。

充分性：若$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0$，则有$(\boldsymbol{r}^2)'=0$。对此式两端积分，得$\boldsymbol{r}^2=C$（积分常数），于是可得$|\boldsymbol{r}(t)|=C$，即向量$\boldsymbol{r}(t)$的模为常数，向量为定长。

图1-3所表示的球面曲线满足定理1.1，因为球面曲线上任一点的切线方向$\boldsymbol{r}'(t)$必垂直于该点处的向径$\boldsymbol{r}(t)$。

2.定向变向量

方向固定而长度不断变化的向量称为**定向变向量**。例如一条始点与原点重合而方向固定的直线，如图1-4所示。

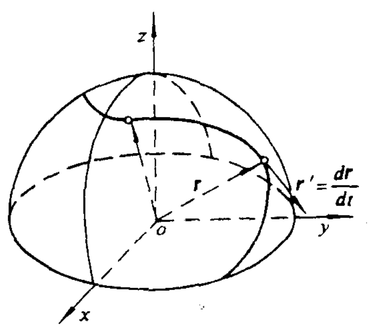


图 1-3

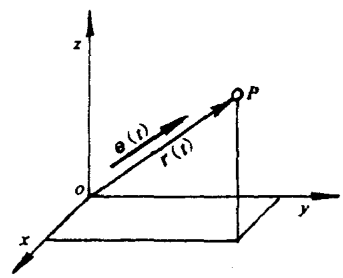


图 1-4

**定理1.2**　向量函数$\boldsymbol{r}(t)$为定向变向量的充要条件是

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$$

（证）　为了利用定理1.1来证明，设$\boldsymbol{e}(t)$为平行于已知变向量$\boldsymbol{r}(t)$的单位向量(幺矢)，$\lambda(t)$为数量函数。于是，已知的变向量$\boldsymbol{r}(t)$可写为

$$\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t) \qquad (*)$$

必要性：若$\boldsymbol{r}(t)$为定向，则$\boldsymbol{e}(t)$必为常单位向量，与参数$t$无关，可写为$\boldsymbol{e}$。对式（*）求导，得

$$\boldsymbol{r}'(t)=[\lambda(t)\boldsymbol{e}]'=\lambda'(t)\boldsymbol{e}$$

于是　$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}\times\lambda'(t)\boldsymbol{e}=\lambda(t)\lambda'(t)(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e})=\boldsymbol{0}$

充分性：对式（*）求导（注意，此处未假定$\boldsymbol{r}(t)$为定向，故$\boldsymbol{e}$不是常向量），可得

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)$$

于是 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t)\times[\lambda'(t)\boldsymbol{e}(t)+\lambda(t)\boldsymbol{e}'(t)]$

$$=\lambda\lambda'\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}+\lambda^2\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'$$
$$=\lambda^2\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'$$

若$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{0}$，上式中因为$\lambda\neq0$，故必有$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{0}$。根据拉格朗日恒等式，有

$$(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}')^2=(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}')\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}')=\boldsymbol{e}^2\cdot\boldsymbol{e}'^2-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}^2\cdot\boldsymbol{e}'^2-(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}')^2$$

因为$\boldsymbol{e}(t)$为单位向量，即为定长变向量，根据定理1.1知，$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}'=0$。又因$\boldsymbol{e}^2=1$，故上式变为

$$(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}')^2=\boldsymbol{e}'(t)^2=\boldsymbol{0}$$

或

$$\boldsymbol{e}'(t)=0$$

对上式两端积分，得

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{C}$$

上式中$\boldsymbol{C}$为积分常向量，说明$\boldsymbol{e}(t)$的方向为固定。因为开始时设$\boldsymbol{e}/\!/\boldsymbol{r}(t)$，所以$\boldsymbol{r}(t)$也为固定方向。

3. 平行于固定平面的向量

从几何直观显然可知，变向量$\boldsymbol{r}(t)$平行于某个固定平面$\pi$，也就是曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在一个经过原点$o$的平面$\pi$上，如图1-5所示。

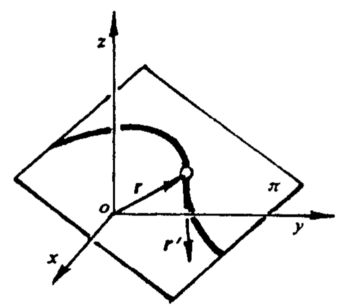

图 1-5

**定理1.3** 变向量$\boldsymbol{r}(t)$平行于某一固定平面的充要条件是

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$$

（证） 本定理有两种情况，第一种情况是，若$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$，则由定理1.2知，$\boldsymbol{r}$为定向变向量，此时只需作一平面平行于$\boldsymbol{r}(t)$即可。因为，这时混合积

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{r}''=0$$

第二种情况是，若$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$。下面证明在这种情况下，定理1.3也正确。

必要性：设平面$\pi$的法向量为$\boldsymbol{n}$。若$\boldsymbol{r}(t)/\!/\pi$，则有$\boldsymbol{r}(t)\perp\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{n}=0 \qquad (a)$$

因为$\pi$为固定平面，所以$\boldsymbol{n}$为固定向量，即$\boldsymbol{n}$为常向量。对式（$a$）求导，得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0 \qquad (b)$$

再对式（$b$）求导，得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''(t)=0 \qquad (c)$$

式（$a$）、（$b$）、（$c$）表示法向量$\boldsymbol{n}$同时垂直于向量$\boldsymbol{r}(t)$、$\boldsymbol{r}'(t)$、$\boldsymbol{r}''(t)$，则此三向量必共面，它们的混合积$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$。

充分性：若混合积$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$，则三向量必共面，设此平面为$\pi$。向量$\boldsymbol{r}/\!/\pi$，而因为$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{r}\nparallel\boldsymbol{r}'$，所以变向量$\boldsymbol{r}''$可以是另两个向量$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$的线性组合，如图1-6所示，即

$$\boldsymbol{r}''=\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}' \qquad (d)$$

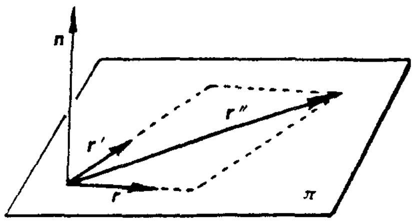


图 1-6

式中，$\lambda(t)$、$\mu(t)$为数量函数。另外，由于$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$，设$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{n}$(图1-6)，则 $\boldsymbol{n}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$所组成的平面$\pi$，并且由于$\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$ 为变向量，所以这里 $\boldsymbol{n}$ 相应也为变向量。于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}' &= (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')' = \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}''\\ &= \boldsymbol{r}\times(\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}') = \mu\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}' = \mu\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

上式表明，$\boldsymbol{n}'$ 和$\boldsymbol{n}$为线性相关，$\boldsymbol{n}'$ 与$\boldsymbol{n}$共线，即$\boldsymbol{n}' /\!/ \boldsymbol{n}$。于是有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{0}$$

根据定理1.2，$\boldsymbol{n}$ 为定向变向量。这说明，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面$\pi$ 为固定。又由于$\boldsymbol{r}(t)$ 垂直于$\boldsymbol{n}$(图1-6)，故$\boldsymbol{r}(t)$ 必平行于固定平面$\pi$。

## 第四节 向 量 方 程

### 1. 直线的向量方程

设$L$为空间任意直线，$P_0$是它上面的任意固定点，则向径$\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OP_0}$。有时，可以直接用向径$\boldsymbol{r}_0$来代表空间点$P_0$，把$P_0$点说成是$\boldsymbol{r}_0$点。又设$\boldsymbol{v}$为平行于直线$L$方向的向量，若点$P$是直线$L$上的任意（流动）点，它的向径$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{op}$。由图1-7可看到，$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，式中 $t$ 为参数。

因为$\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，所以

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v} \qquad -\infty<t<+\infty \tag{1-22}$$

上式即为直线的向量参数方程。

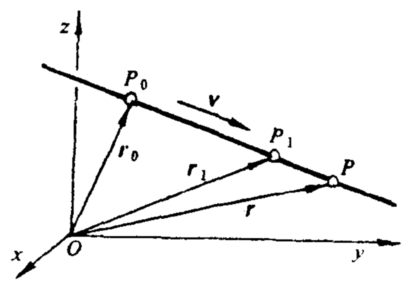


图 1-7

设点$P_1$是直线$L$上的另一个固定点，它的向径为$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OP_1}$，则式（1-22）中的方向向量$\boldsymbol{v}$可由$\overrightarrow{P_0P_1}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$给出，即$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$。于是直线的向量参数方程又可以写为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0) \qquad -\infty<t<+\infty \tag{1-23}$$

若方向向量 $\boldsymbol{v}$的方向数已知，即$\boldsymbol{v}=\{l,\ m,\ n\}$，则直线的向量参数方程也可以写为

$$\boldsymbol{r}=\{x_0+tl,\ y_0+tm,\ z_0+tn\} \tag{1-24}$$

### 2. 曲线的向量方程

在微分几何中空间曲线包括平面曲线和挠曲线。曲线上所有点都在空间同一平面内，则称为（空间的）**平面曲线**，例如倾斜于三条坐标轴的圆；反之，则称为**挠曲线**，例如螺旋线。

把向量函数$\boldsymbol{r}(t)$看作为空间动点$P$的向径，即$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}$，则参数 $t$ 在闭区间$[t_1,t_2]$内变动时，动点$P$的轨迹一般是一条空间曲线，如图1-8所示，它的向量参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2 \tag{1-25}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \tag{1-26}$$

曲线方程也可以直接写为参数式

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \tag{1-27}$$

**例 1.1** 试写出圆柱螺旋线的向量参数方程，如图1-9所示。

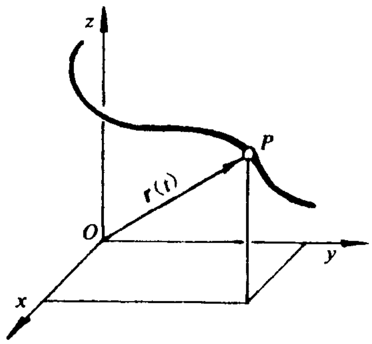


图 1-8

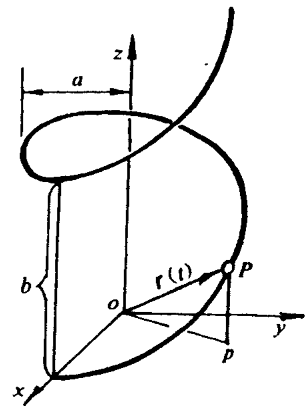


图 1-9

（解） 根据圆柱螺旋线的形成条件得到向量参数方程

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{pP}$$

$$= a\cos t \cdot \boldsymbol{i} + a\sin t \cdot \boldsymbol{j} + bt \cdot \boldsymbol{k}$$

或有 $\boldsymbol{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\} \quad (-\infty < t < +\infty)$

式中 $a$ ——螺旋半径；

$b$ ——导程；

$t$ ——（角度）参数。

3. 简单曲线

若曲线$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$在闭区间〔$t_1$，$t_2$〕内有连续导向量函数$\boldsymbol{r}'(t)$，即有连续的切线，且在$t_0$处（$t_0$在闭区间内）$\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$，则曲线$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$在$t_0$的某一邻域内确定一条和$t$一一对应的曲线段，称为**简单曲线段**，或称光滑曲线段，或正则曲线段。在简单曲线段上的点称为**正常点**，或称正则点。在曲线段上，$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$的点称为**弧立点**，或称奇点。因为当$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$时，其原函数$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0 =$ 常向量，这时向径的终点所描绘的曲线退化为一个点。为了避开弧立点的情况，今后所讨论的曲线段均为简单曲线段，即总假设$\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$。

下面讨论参数方程和相交曲面方程这两种不同形式给出曲线为简单曲线段的条件。

第一种方程形式，即参数方程给出的曲线为简单曲线段的条件。设曲线段$L$的参数方程为

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

若曲线$L$满足

（1）普通数量函数$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$在区间〔$t_1$，$t_2$〕内为单值，且一阶导数存在，继续。

（2）导数$x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$在区间〔$t_1$，$t_2$〕内至少有一个不为零，即有