前　言

此書具多目標性，各目標間相互關係密切不可分割。首先，這本書提供學習數學學生或教員素所忽略之重要一面。某種意義下，此書亦屬哲學類，係一種連續的工作，需要繼續下去。下面我將依次討論這些論點。

1.嚴格的說，數學與證明邏輯（ demonstrative logic ，實際上是數學的一支）之外的所有知識都是由推測（ conjectures)組成的。當然，包括許多推測，有高度可信可重視的推測，如物理科學上的若干定律是，有既不可信又不値得重視的推測，這樣的推測往往可以見之於報章雜誌令人憤慨。在這兩種推測之間，尙有各種各樣的推測，預感(hunches)及猜測（ guesses)。

我們獲得數學上的知識是經由證明推理（ demonstrative reasoning ），但假說的可靠性則來自逼眞推理（ plausible reasoning ）。數學上的證明係證明推理，但物理學家的歸納證據（ inductive evidence)，法官的情況證據（或間接證據）（ circumstantial evidence) 歷史學家引用典籍的證據，以及經濟學家的統計證據，皆屬逼眞推理。

此二種推理之間差別甚鉅，證明推理是安全的，無庸爭議的，也是終結的，但逼眞推理則是有冒險的，有爭議的也是暫時的。證明推理深入各門科學如數學然。但其本身（同數學本身一樣）不能產生任何關於自然界的重要新知識。關於世界的任何新知識的獲得都少不了逼眞推理，在日常生活中，我們所注重的只是這種推理而已。證明推理標準很嚴格；這些標準由證明推理之原理一邏輯學（形式或稱證明邏輯）加以編彙及闡明。逼眞推理之標準則較鬆弛，沒有一種講逼眞推理的理論可以與證明邏輯的淸楚相比，或像證明邏輯那樣受到一致的承認。

2.關於這兩種推理另有一點値得我們注意，大家都知道數學提供了學習證明推理的最佳機會，但是我不得不爭論的是，在目前學校的功課表中根本沒有學習逼眞推理的機會。我曾對各年級對數學有興趣的學生說：「我們必須學習證明，但也該學習猜測」。

這句話看來似乎有點矛盾，所以必須就若干方面加以說明，以免引起可

能的誤解。

數學被認爲是一種證明科學，但這只是其一面。已完成的數學，用已完成的形式表示出來，即係純粹證明性的，僅包括證明而已。但正在塑造中的數學如同人類的其他知識然，在證明之前必須假定一種數學上的定理，在你從頭到尾證明之前，必須靠猜測進行。換言之，必須綜合觀察與進行類推，而且必須一試再試。數學家創造性工作的結果固是一系證明推理，即一項證明 (proof)，但是這證明之能被想出來係出於逼眞的推測，或猜測而得。假使數學知識反映任何數學的創造，則猜測及逼眞推論必然在這門學問中有一席之地的。

我們已經說過推理有兩種：證明推理與逼眞推理。它們之間並不矛盾，反相輔相成。在嚴格的推理中，最主要的工作是在區別證明與猜測，區別有效論證與無效企圖。而在逼眞推理則係把猜測與猜測加以區別，把比較不合理的猜測與比較合理的猜測區別開來，倘若同時注意此二種的區別，則其分別愈著。

如果一個學生預備把數學作爲終生事業，他必須學習證明推理，這是他的職業也是他所習科學的標記，但如欲眞正成功，他須另加學習逼眞推理，可以助其創造工作的完成。一般的或業餘的學生，則也該知道一些證明推理，雖然直接使用這種推理的機會非常少，但是他必須擁有一種能力及標準可以在現代生活中比較各式各樣的漸定證據(alleged evidence)。然而他一生中卻無時無刻不與逼眞推理打交道，無論如何，一個有志氣的學習數學的學生，不論其將來之興趣何在，應該同時學習兩種推理，即證明的及逼眞的推理。

3. 我不相信學習猜測有不敗之途徑可循，即使有這麼一種方法，我也不知道。所以在下述文字裡讀者是無法找到行之一定成功的方法。逼眞推理的有效應用是種技術，如同其他技術一樣，從模仿與練習而得。對渴望學習逼眞推理之讀者，我將盡力而爲的幫助，但是我所能做的也不過是提供一些模仿的例子與練習的機會而已。

在以後各章中，我將時常討論數學上的發現，不論大小的發現。我無法說明這些發現是怎麼樣完成的，因爲沒有人眞正知道。但是我試着塑造一些可能的歷史以饗讀者。我將著重發現的動機，引導其成功的逼眞推論，總之，凡應該模仿的每一件事物我都加以強調。當然，我將試著給予讀者留以深刻印象，這是身爲教師與作者的責任。但是對有關的論點，我是站在眞誠的立場，亦即以我認爲眞實且有助的事物來感動讀者。

每章之後，接著便是例子與評註，評註係針對太技術化或太難解的部份或主題之外的論點予以闡明。有些習題其目的在使讀者對本文中不夠詳細者，能有機會詳加考慮。但大部份的習題均予讀者以自行求取逼眞結論的機會。在對付每章之末所附的較難問題之前，讀者宜先仔細閱讀相關的部份同時亦宜瀏覽隣近的問題。其中有些可以提供答案的線索。爲了提供這些線索或故意把這些線索隱藏起來，俾對讀者之閱讀指導盡最大之助益，不但在問題的內容及形式上費了許多心血，而且在其排列上也煞費苦心。事實上，對於這些問題的安排所花費的時間與精神，並非局外人所能想像或以爲必需的。

爲使一般的讀者均能閱讀起見，每一個重要論點，都儘可能以簡明初等的例子加以說明。但是在某些例案欲充分明瞭故不得不用較複雜的例子來支持那些論點。事實上，我覺得應該舉些有歷史意義的，有眞正數學之美的，以及可以說明在其他科學上有同樣方法的，或日常生活的例子。

我講過的許多故事講法有變動其最後所取的形式可說係經一種非正式的心理實驗而得的結果。在不同的班級裡討論這個題目，常常有人發問打斷我的解說，其問題總不外乎〃在這種情況下，你怎麽辦呢？〃下文中有若干節係由學生的答案所提供之材料所寫成，或者有些說法也因聽衆的反應而有所修正。

簡言之，我是以一己研究及數學的經驗予讀者提供適當的機會自行做明智的模仿工作。

4.搜集在本書的逼眞推理之例子可做他用：幫助對一個被熱烈討論的哲學問題—歸納法之問題的瞭解。難題在於：歸納法有法則嗎？有些哲學家的答案是肯定的，但是大部份的科學家則持否定的看法。爲求有益的討論，這個問題需要問得不同，也應該加以不同的處理，不可信賴那些傳統的文字遊戲或標新立異的形式主義，應該與科學家的作業密切接觸配合。現在請注意歸納推理（inductive reasoning）是逼眞推理的一種特例，又請注意（現代的作家都忘了，但一些老作家如尤拉（Euler）及拉普拉斯（Laplace）則很淸楚的知道。）歸納證據在數學研究上的地位如同其在物理研究上一樣的重要。於是你可以注意到我們把出現於數學中的逼眞推理的例子加以觀察比較，即能對歸納推理有更多的認識。所以用歸納的方法來硏究歸納法的大門是敞開着的。

生理學家要研究一般問題時，例如遺傳學（genetics）問題，他必須選擇一些最適其實驗研究的某些特殊的動植物品種，當化學家擬研究如化學反應的速度問題時，他也必須選取一些與其問題有關實驗最方便的一些物質來

做。實驗材料的適當選擇對任何問題的歸納研究均極重要。依我的看法，數學在許多方面，是歸納推理之研究最適當的實驗材料。這種研究歸納推理的工作包含一種心理實驗在內：你必須去親身經驗你對一種推測的信心如何，因有各種不同根據而動搖的心理狀態。歸功於其固有的簡明清晰，數學題材在這種心理實驗上之有幫助要比其他學科的好的多。讀者可以在以後各章節中發現很多的機會可以使你這樣相信。

我以爲考慮逼眞推理，較之考慮歸納推理更爲哲學化，蓋前者爲普遍觀念而後者僅爲其特例。在我看來，書中所收的例子可導致對逼眞推理既確定且相當的令人滿意的看法，但是我無意把自己的觀念強加諸讀者。實際上，在上卷中我並未把這些看法敍述出來，我期望這些例子自己便足以說明。下卷的前四章，對逼眞的推理作較明顯及更一般性的討論，在那些章節中，我將前述逼眞推理的例子的模式作正式的敍述，試圖將這些模式系統化，研究其互相間的關係，以及對概率（probability）概念的關係。

不知道這四章是否值得稱做哲學。如果是哲學，則必係低級的（low-brow）哲學，多半關於具體實例與人之具體行爲的瞭解，而甚少及於一般性的說明。當然，我更不知道我的觀點最後將受到如何的評判。但我深信這些例子對於學習歸納法或逼眞推理的學生是有用的，如果他沒有偏見，而且他希望形成的觀點能與觀察之事實密切配合。

5. 我一直認爲這本關於數學與逼眞推理的書是一個單位，而很自然的分成二部：數學中歸納法與類推法的應用（卷上），及逼眞推論之模式（卷下）。爲了學生方便起見，分成二冊發行，上卷與下卷完全獨立。我認爲讀者在讀下卷之前最好仔細的把上卷看完；因爲上卷所含的數學素材及應用歸納之方法來研究歸納法所用的資料遠比下卷爲多。已經受過相當數學訓練的讀者可以直接讀下卷，故分開發行有其方便之處。爲參考對照起見，上下卷之章數仍然連續不斷。沒有編索引是因爲編索引需把術語弄得遠較本書所認爲合適者爲嚴格，而且書前的目錄相信已足敷本書指引之用。

此書是我較前的著作叫做"「如何解它」（How to Solve It）"一書的繼續，對這題目有興趣的讀者可讀此二書，但其先後並無任何關係，此書雖係繼續前書之作品，但其安排並無連續性，故可分別閱讀。事實上，本書僅有極少部份要直接參考前書，在初讀時可以不必理會，但是間接有關部份則幾乎在每一頁均可發現，在若干頁上的每一句有時都可以在前書找到源頭。就事實而言，目前這本書提供了前書大量的習題與若干較高深的例示。因爲前書的篇幅及其初等的性質所限，故不能包括在內。

這本書與賽果（G. Szego）及作者在分析學（Analysis）中搜集各種問題而成的一個集子（見書目）亦有關係。在那本集子中的問題，都是經過仔細安排成組，故能互相支持，互相提示線索，共同包含某特定主題，予讀者有機會實踐解問題時的各種主要活動。本書處理問題的方法仿前書所作，此種聯繫並非不重要。

下卷中有二章討論概率論，其中一章係與作者幾年前所寫「概率算淺釋」（an elementary exposition of the calcnlns of probabilty）有些關係（見書目）。二書在概率之基本觀念與開始的論點上均相同，但在其他方面幾無接觸之處。

書中的若干觀點有些已見於在書目錄中所引，我的論文中 4，6，8，9，及10號諸文許多章節均已編入本書內，這些文字的重印得感謝 American Mathematical Monthly, Etudes de Philosophie des Sciences en Hommage a Ferdinand Genseth 及 Proceedings of the Interational Congress of Mathematicians 1950 之編者之同意。

本書大部份均可見於我授課的演講中，一部份且達數次之多。在某些部份及某方面，我仍然令其保持其口語之形式出現，我並不認為在印行一般數學書時，宜用這種形式，但目前的情形，則並無不當，至少也屬情有可原。

6. 下卷最後一章，討論發明與數學，與上述作者之前書甚有關連，此章亦指出一可能的續編。

逼眞推理之有效運用，在解題時關係極大，本書有許多例子解釋這種角色，但這只是解題的一方面，其他方面則仍需作類似的例示解說。

這裏所觸及的諸論點有許多需要進一步的工作。關於我對逼眞推理之觀點，應該會遭遇其他作者批判，所舉歷史上的實例也需要作更徹底的查究。對於發明與數學的觀點更需要儘量諸如實驗心理學[註] 等之方法加以考察。若干此種工作尚待繼續，但有些則可能屬於徒勞。

這本書不是教科書，但我希望它能及時影響現有的教科書學法，及其對問題之選擇。順着這些方向重寫題目較為平常的教科書不會沒有報償。

7. 衷心感謝普林斯頓大學出版社仔細地印行此書，尤其要感謝該社負責人小白雷先生（Mr. Herbert S. Baileg Jr.）關於若干觀點具同情之了解而賜予協助，也得感謝費珍太太（Mrs. Priscilla Feigen）的打字原稿之準備及貝倫博士（Dr. Jutius G. Baron）的校對。

史坦福大學　一九五三年五月　包利亞　謹識

「註」　此項探查工作業由史坦福大學心理學系開開始進行，在希卡（E. R. Hilgard）主持下的計劃之內，此計劃係由O. N. R.所資助。

敬告讀者

第七章第二節，在第七章引用時簡稱節 2 ，在其他各章時，則稱節 7.2 ，第十四章第五節第三款在第十四章之內則稱節5（3），在其他章則稱節 14.5(3) ，第十四章例題二十六，在同一章則稱例題26，在其他章則稱例題 14.26。

略具初等代數與初等幾何知識，即足以看懂本書之主要部份，如果再加上解析幾何與微積分，包括有限羣及無限羣的知識，則幾乎可以遍覽全書以及大部份的例題與評註，而不致於遭遇困難。但是在若干偶然的陳述，擬制的問題與某些評註中，或許需要更進一步的知識。通常在需要更進一步的知識時，會提醒讀者注意的。

程度高的讀者所忽略不讀的初等部份之損失，遠較程度差的讀者所跳讀的難懂部份爲多。

證明的細節部份，如果不太困難，可能常常不預示而予以省略，有挑剔習慣的讀者，只要面對這種不測事件的準備夠充分也就毋須指責其不當了。

所擬定待解的某些問題，可能非常簡易，但有些則有不尋常的困難。幫助解答的某些暗示，則以方括弧〔 〕示之。其前後的問題也會寓有線索在內，在若干章或第一部份或第二部份之前的例題的序言（introductory lines）中的文字應該特別仔細的閱讀。

解答有時很短：這種情形是假定讀者在對解答之前會亟欲依自己的方法求問題的答案。

只要讀者在問題上苦思過，即使解答不出來，還是會得到很多的好處。例如，他可以看解答，試將他認爲是解答的觀念分開，把書放在一邊，然後再將答案解出來。

有些地方，用了很多圖形，或者在導出的步驟中走碎步，目的是在使讀者明瞭圖形或公式如何演變而已。例如，圖 16.1 — 16.5 是。但是沒有一本書會有過多的圖形或公式的。讀者讀一篇文字或用〞大略的〞態度或用徹底的態度皆無不可，但欲徹底瞭解，則必須隨時將紙筆準備在手邊，就是說必須準備寫下或畫出任何書中已知或暗示的公式圖形，這樣做，較有機會看出圖形或公式的變化，各細節部份對產生答案的影響以及記住整個來龍去脈。

目　次

第一章 歸納法

觀察在即有純粹數學之稱的這部份數學中，無疑的也佔有很重要的地位，而現行的看法以爲觀察僅限於以對感官發生作用之物理世界爲對象。因爲我們認爲數僅屬於純粹理智的範疇，故鮮能瞭解何以在研究數的性質時，觀察及類似之實驗得以派上用場，然而，事實上，我在此將要以若干充分理由說明，今日所知的數之許多性質，大部份均係由觀察所發現，而且在其眞實性被嚴格的證明確定之前，許久便早已發現了。雖然有許多數的性質我們都非常熟悉，但迄今尚不能證明，唯有靠觀察才能獲得這些知識。因此，可以在猶未十分完全的數論中看到，濃厚的希望是寄託在觀察中。觀察也能引導我們繼續探求新的性質而致力於其證明。僅獲觀察支持而未證明的知識應與眞知仔細分別，我們通常說，這種知識係得自歸納法。但我們已看見僅靠歸納法因而導向錯覺的例案。所以我們不能接受僅由觀察或僅由歸納推理而得之有關數的知識爲眞知。事實上，我們應該利用這種發現的機會對已發現之性質作更進一步之研究，證明其眞或僞，不論結果如何，吾人總學得一點東西。對吾人有所裨益。 —— 尤拉（註 1） （Euler)（註1）尤拉，Opera Omnia, 叢書1，卷 2，第459 頁，Specimen de usu observationam in mathesipura)

1、 經驗與信念 (belief)

經驗修改（塑造）人類的信念，我們從經驗中學習，或者應該自經驗中學習，發揮經驗的最大效用就是人類的一項偉大工作，爲這項工作而努力貢獻，則係科學家的正當職業。

配稱這個名字的科學家應致力於自已知的經驗中抽繹出最正確的見解，並且搜集適當的經驗以建立關於某問題的正確見解。科學家處理經驗的步驟，通常稱爲歸納法（ induction ），歸納法特別顯明的例子可以在數學上的研究中找到，在下一節我們舉一個簡單的例子。

2、提示的接觸 (Snggestive Contacts)

歸納往往自觀察開始，生物學家觀察鳥類生活，結晶學者（ cryslablographer ）則觀察晶體的形狀，對數論（ Theory of Nambers ）有興趣的數學家則觀察整數 1, 2, 3, 4, 5 的性質。

假設你希望因觀察鳥類生活而獲得某些有趣的結果，你必須對鳥類有些熟悉，或對之有興趣，或許甚至於你該喜歡鳥類。同樣，如果要觀察數學，你應該有興趣，而且要懂得一些。你該能區別偶數與奇數，你該知道平方數 1, 4, 9, 16, 25, ………以及質數 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ………（最好是把〃1〃看做〃單一體〃（ unity ）勿將它劃入質數）只憑這點知識，你也可以觀察到若干有趣的事情。

有時候，你會遇到這樣的關係式

$$3+7=10, \quad 3+17=20, \quad 13+17=30$$

而發現其中相似之處，令你吃驚的是這些數字 3, 7, 13, 及17都是質數。二質數之和必等於偶數，事實上，10，20與30皆爲偶數。其他的偶數又是怎麽樣的呢？它們是否也是如此？二奇數之和的第一個偶數當然是，

$$6=3+3$$

6 以上，則有

$$\begin{aligned} 8 &= 3+5 \\ 10 &= 3+7=5+5 \\ 12 &= 5+7 \\ 14 &= 3+11=7+7 \\ 16 &= 3+13=5+11 \end{aligned}$$

是否能永遠這樣繼續下去？無論如何，已觀察到之特別實例提示一個一般的述詞：任何大於 4 的偶數均係二質數之和。2 與 4 就是例外，不能分成二個奇數之和，由此我們復可得下列更嚴謹的述詞：任何既非質數，又非質數之平方之數必係二奇質數之和。

此結論係由推測而得，推測則由歸納法得來，亦即因觀察之暗示，而由特殊例子所指示。

這些指示均相當薄弱，只有薄弱的理由去相信這種推測，我們可以在史實中找到一些慰藉，因爲二百餘年前發現此推測之數學家哥巴哈(Goldbach)並未能提供強有力的理由來支持其主張。

這種推測對嗎？今日尚無人能回答，儘管有若干大數學家曾爲此竭智殫

精，但今日之金巴哈推測，猶如在尤拉時代然，仍屬〃雖然許多數的性質我們都很熟悉，但仍不能證明其爲眞僞〃之狀態。

現在我們回頭看看，設法把上述理由中的步驟當做典型歸納方法，以明瞭其意義。

首先，注意雷同之處，3, 7, 13, 及17均係質數，10, 20, 及30則均係偶數，三方程3 + 7 = 10，3 + 17 = 20，13 + 17 = 30彼此類似。

其次，便是推廣步驟，從3, 7, 13, 及17等例子可以推到所有的奇質數，從10，20及30則可推到所有的偶數，然後可得一般化之關係：

偶數 = 質數 + 質數

這樣我們獲得了一個表現清楚一般述詞，這個述詞僅僅是一種推測，而且是試驗性的推測，這就是說這種述詞尚未證明，決不可冒稱爲眞，不過是求眞理的嘗試而已。

無論如何，這種推測，具有和經驗，和〃事實〃（the facts）和〃眞實〃（reality）上的暗示性的接觸點（Suggestive points of contact），對於特別的偶數如 10, 20, 30, 以及 6, 8, 12, 14, 16, 等此推測均爲眞。

由於以上的討論，可以大略地勾出歸納法初步階段的大綱。

3、 支持的接觸（Supporting Contacts）

對於未經證明之推測不可輕予置信，即使已爲很多權威所主張，或由自己所提，你該設法證明其眞僞，並試驗之。

我們可以用一些新的偶數來試驗金巴哈推測，鑑定其是否二質數之和，例如以60來試，用尤拉所說的〃準實驗〃（quasi-experiment）方法，60是偶數，但是其和係二質數之和嗎？下式是否成立？

60 = 3 + 質數 ？

57不是質數，是否

60 = 5 + 質數 ？

答案還是否定，因爲55不是質數，繼續試下去，上述推測便會出現，下一步試驗產生

60 = 7 + 53

53是質數。這樣，金巴哈的推測又多了一個實例印證。

相反的結果完全註定了金巴哈推測的失敗命運，如果將已知之偶數，如60者試以所有之質數，都不能分解成二個質數之和，於是便發現此推測之不可靠，若僅試以60，則猶未得肯定之結論，當然你絕對不能祇用單一的實例

來證明定理的眞僞。很自然的，你會將此種印證視爲有利的表示(favorable sign)，支持其推測而給予較高的信任，當然其輕重還得看你個人的判斷。

讓我們再回頭看一下，60這個數字，在試以35, 7,等質數之下，還可以繼續試以30以下之數(顯然的，無需超過等於60/2的30，因爲和60者，二質數之一必不能大於30)。因此，可得所有分解60爲二質數之情形如下：

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$$

我們可以用系統化的方法一個接一個的檢查其他的偶數，其結果列表如下：

$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$
$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$$
$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$$
$$26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13$$
$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$
$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 7$$

上述實例都可以印證推測之成立，每一個延長上表的印證都增強此推測，使它更可靠，並益增其合理性。當然這種印證的累積並不能證明這個推測的成立。

我們該檢查搜集到的觀察材料，比較並組合之，然後尋找可能隱藏其內的若干線索，在這個實例的表中，欲發現主要線索非常困難，但是仔細檢視此表，可更淸楚瞭解推測的意義，從此表可看出其中偶數可爲若干種二質數之和(6只有一種，30有三種)，偶數 $2n$ 的代表數似乎隨 n 呈不規則增加，金巴哈的推測表示不論此表拉長到任何程度，代表數永遠不會降低到零。

可以將已檢查的特殊實例分成兩組：一是先於推測公式化之前者，一是

後來者，前者暗示此推測，後者則支持之，二種例案均提供某些推測與〃事實〃的接觸點，上表未能區別暗示與〃支持〃的接觸點。

現在我們回來看前述推理，設法在其中找到典型歸納的脈絡。

有了一個推測的構想，便得設法證明其眞僞，我們的推測係由判斷爲眞的若干特殊例證所提示而成之一般述詞，再審查更多的特殊例證，如果印證結果推測均成立，則其可信性愈增。

在我看來，我們僅以合理的人通常做的事物爲對象，在這樣做的時候，我們的原則是：推測的一般述詞每因新的特例所印證而愈爲可信，這是歸納法的基本原則嗎？

4、 歸納的態度

在個人生活方面，我們常常依賴幻覺，換句話說，我們不敢審查某些易於被經驗所駁倒的見解，因爲怕失去情感的平衡。有些場合依賴幻覺並非不聰明，但在科學上，我們必須有一種不同的態度，即歸納的態度。這種態度的目標是要儘可能的使我們的見解與經驗相符合，這就需要對所謂事實加以選擇，需要立刻從觀察昇到一般化，再從最高的一般化降到最具體的觀察。需要在數千種不同的情形中說〃可能〃及〃或許〃，還需要許多其他的事物，特別是下列三種：

第一，我們應該隨時修正我們的見解。

第二，如果，有不得不改變的理由時，我們應該改變一種見解。

第三，我們不該在沒有充分的理由支持下隨便改變我們的見解。

這幾點看來不怎麽驚人，但是要融合於生活言行中卻需要不平常的素養。

第一點必須具有〃理智之勇氣〃，你要有勇氣修正你的信念，伽利略（Galileo）向當代的偏見及亞里斯多德（Aristotle）的權威挑戰，就是一種偉大的理智之勇。

第二點所需具備的條件是〃智慧之誠〃（intellectual honestv），固執於顯然已被經驗所推翻的推測，只因爲是自己的見解就是不誠。

第三點則需要〃理智的約束〃，改變見解不經過嚴格的審查驗證，例如只爲了一時風尙，則屬愚蠢之事。但是我們旣無時間且無能力仔細審驗吾人之每一項見解，因此，最聰明的方法是保留日常的工作，問題及疑問待諸修正，而抱〃不相信隨便一件事物，只問值得問的問題〃之觀念。

智慧之勇，智慧之誠及理智的約束便是科學家的道德修養。

第一章例題與評註

1. 試求下列序列逐項所遵守之法則

$$11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71,\ 101,\ 131\cdots$$

2. 考量下表

$$\begin{aligned}
1 &= 0+1\\
2+3+4 &= 1+8\\
5+6+7+8+9 &= 8+27\\
10+11+12+13+14+15+18 &= 27+64
\end{aligned}$$

求此例題所暗示之一般法則，以適當之數學記號表示並證明之。

3. 觀察逐次和之值

$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \cdots$

有無簡明之法則？

4. 觀察相隣和之值

$1,\ 1+8,\ 1+8+27,\ 1+8+27+64,\ \cdots$

有無簡明之法則？

5. 三角形三邊之長各爲 l, m 及 n。l, m, n 均爲正整數，$l \leqq m \leqq n$，試求以已知 n 作邊之不同三角形之個數。〔設 $n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$〕試求 n 與三角形個數間關係之一般法則。

6. 序列 5, 15, 25, … (尾數爲 5 之數) 之首三項可以被 5 除盡，以次各項是否亦可以 5 除盡？

序列 3, 13, 23 … (尾數爲 3 之數) 之首三項均係質數，以次各項是否亦均係質數？

7. 依形式計算得

$$(1+1!x+2!x^2+3!x^3+4!x^4+5!x^5+6!x^6+\cdots)^{-1}$$
$$=1-x-x^2-3x^3-13x^4-71x^5-461x^6\cdots$$

此暗示關於下列右手乘冪級數之係數之二種推測：(1)均係負數；(2)均係質數，此二推測均可信否？

8. 設

$$\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^{-1}=A_0+\frac{A_1x}{1!}+\frac{A_2x^2}{2!}+\cdots$$

若 $n = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$A_n' = 11 -1\ 2\ 3\ 4\ 14\ 38\ 216\ 600\ 6240$

試求一推測

9. 法國大數學家**費瑪特**認爲序列

5, 17, 257, 65537, …,

其一般項係 $2^{2^n}+1$，他發現首四項（已知者），對應之 $n=1, 2, 3$ 及 4，均係質數，他推測以下各項亦均係質數，雖然他並未證明，對於其推測，他極爲有信心，向華柏斯及其他英國數學家挑戰，但尤拉發現 $2^{32}+1$ 項，對應之 $n=5$，並非質數，可以用 641 除盡。（註 2）見本章前面所載尤拉一節引文"但我們已看到僅靠歸納法因而導向錯誤的例案"。

10. 在證明金巴哈推測之 $2n=60$ 時，依次試以 n 小於30之質數 p，也可以試以 n 在30與60之間的質數 p'，n 大時那一種方法較爲便捷？

11. 在某字典，關於"歸納法""試驗"及"觀察"之解釋如下："歸納法是從特例中抽繹出一般法則，或係證明一般述詞之諸事實之產物"。"試驗是一種求證假說之程序""觀察是對自然界現象之因果或相互關係之一種精確的注視及紀錄"。

上述解釋是否適用於節 2 及節 3 所討論之諸問題？

12. 是與否　在試驗由於新發現而得某些推測的一般法則之結論時，數學家如同博物學家一樣，向自然發問："我不知道這是否成立，它成立嗎？"如果結論顯然被駁斥，則此法則不眞，如果被證明，則有可能爲眞，自然可以回答是與否，但一個是聲音低到幾乎聽不見，一個是如雷貫耳，其"是"是一時的，其"否"是肯定的。

13. 經驗與行爲　人類之行爲受經驗之修正，人類之見解亦然。見解與行爲並非各自獨立，行爲常係見解之結果，見解則係潛在之行爲，雖然你能看見他人的行爲，但你摸不着他的見解，行爲之觀察較見解容易得多，人人皆知"灼傷的孩子怕火"（a burnt child dreads the fire）的意思正如我們說"經驗修正人類之行爲"。

當然，它也能修正動物之行爲。

隣居有一隻劣狗見人就咬，但我發現了一個很容易保護自己的辦法，如果我俯身作取石打狗狀，該狗立即帶吠落荒而逃，所有其他的狗都不這樣，故很容易猜測什麽樣的經驗會令此狗有此行爲。

動物園中的熊會乞食，那是因爲有遊客在場時，其可笑的姿態帶來一把

（註2）尤拉，Opera Omnia，叢書1，卷2，1—5頁Hardy Wright，數論，14—15頁