面向自考、函授、电大、夜大、高职考生

新编高等数学自学指南

（下册）

李广民　冯晓慧　任春丽　编

西安电子科技大学出版社
2001

前　言

在学习高等数学中，不少人有过这样的体验：对于教材中的定理及其逻辑证明能够看懂，也能记住一些，但在独立做题时，常会有困惑之感，且会出错，而且错了也不知道错在哪里，为什么错。对于灵活性较大、综合性较强的题目，更觉得无从下手。尤其是参加成人教育学习的读者，学习课时较少，有些同学在学习中没有老师指导。为了帮助这部分学生深入理解高等数学的基本内容，熟悉各种题型，抓住重点，突破难点，掌握必要的解题方法与技巧，提高应试能力，顺利地通过自学考试，编者以《高等工科院校成人教育〈高等数学〉教学基本要求》为依据，编写了本书。

本书在选材、例题、习题的结构形式上尽量适应成人自学的特点。本书分为上、下两册，共计12章。上册包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分、定积分及其应用。下册包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程。

各章内容由以下四部分组成：

1. 本章要点。列出了本章的主要内容。包括基本概念、定理、性质及重要公式等。为了便于查阅、比较、记忆，绝大部分内容以表格形式给出。

2. 疑难解答。针对教学实践中基本概念、基本理论和基本运算中经常出现的概念性错误，以问答的形式给予解释。在阐述过程中侧重于基本概念的深化理解，澄清一些模棱两可的模糊认识，注意相关概念的区别与联系；对于一些重要概念和方法，也

给出了小结和归纳。

3. 例题分析。考虑到自学考试题型的特点，精选了极具启发性、针对性、典型性的例题。这些例题内容广泛，可归纳为四个类型：客观题、解答题、综合题及错解分析。本书把重点放在对典型例题的分析解答上，注重解题思路的分析，解题方法、解题技巧的总结与归纳，以尽量做到论证说理清楚，解题思路广阔。有些例题还根据实际问题给出了多种解法，体现了解题的灵活性。有不少例题还带有附注或应注意的问题。错解分析中的例题多数选自学生的课外作业和考试答卷，具有代表性和针对性。其目的是通过对错解的剖析，给出正确解法，使读者从正反两方面的对比中学会正确的思维方法，提高解题能力。

4. 自测习题。为了便于复习，每章后面选编了一定数量的习题并附有答案，这些习题尽可能适应自学考试的特点。

在附录中给出了初等数学中常用的公式，近年三套成人自学考试试题及解答，专升本试题及解答，西安电子科技大学高等数学期末考试试题两套及解答。

本书由李广民(1、2、7、11、12 章)，冯晓慧(5、6、9、10 章)，任春丽(3、4、8 章)编写。在本书的编写过程中，刘三阳、王金金先生和于力女士给予了热情的关心和指导。本书的出版还得到了西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，他们为本书的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，疏漏与错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2000.10

第 7 章

——向量代数与空间解析几何

7.1 本章要点

1. 向量代数

1）基本概念

向量的基本概念如下表所示：

	定　义	记　号
向　量	空间中有一定长度和方向的有向线段	$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$；$\overrightarrow{AB}$
零向量	长度为零的向量，其方向不定	$\boldsymbol{0}$
单位向量	长度为 1 的向量	$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$
向量的模	向量的长度	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$
向量的坐标	向量 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影 a_x，a_y，a_z	$\{a_x, a_y, a_z\}$
向量的方向余弦	向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴夹角 α，β，γ 的余弦	$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$

2）基本运算

设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

向量的基本运算公式如下表所示：

名　称	运 算 公 式	记　号
$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和	$\{a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\}$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差	$\{a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\}$	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$
λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积	$\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$	$\lambda\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积	$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积	$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

向量之间的位置关系如下表所示：

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

3）向量的方向余弦及两向量之间夹角的余弦

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ 的夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2. 空间解析几何

1）空间平面方程

空间平面方程式如下表所示：

名　　称	方　　　　程
点法式方程	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
一般式方程	$Ax+By+Cz+D=0$
截距式方程	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2）平面与平面之间的位置关系

设平面 Π_1，Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$，则

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

3）点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$到平面 Π 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4）空间直线方程

空间直线方程如下表所示：

名　　称	方　　程
一般式(交面式)	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
标准式(对称式)	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$
参数式	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0=mt \quad t\in(-\infty, +\infty) \\ z=z_0+nt \end{cases}$

5）直线与直线，直线与平面之间的位置关系

设平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，$L$，$L_1$，$L_2$ 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}=\{l, m, n\}$，$\boldsymbol{s}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$，则

$$L \parallel \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s} = 0 \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$$

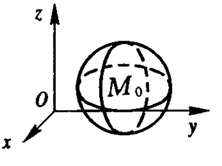
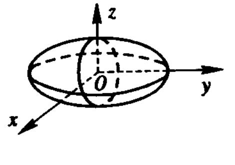
$$L \perp \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

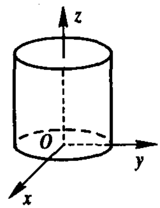
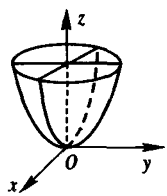
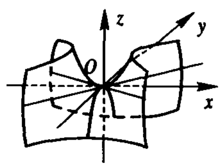
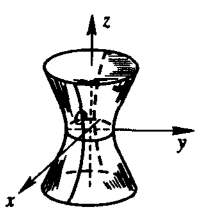
$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

6）常见的二次曲面

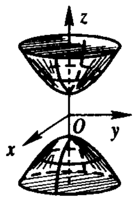
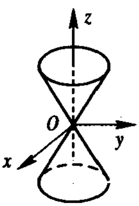
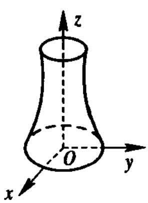
常见的二次曲面方程及图形如下表所示：

名称	方　　程	图　　形	在坐标面的截痕
球面	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 球心在 $M_0(a, b, c)$ 半径为 R	 	圆
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ a，b，c 为椭球面的半轴	 	椭圆

续表

名称	方　　程	图　　形	在坐标面的截痕
圆（椭圆）柱面	$x^2+y^2=R^2$ $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$		在 xOy 面上为圆（椭圆）
椭圆抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 当 $a=b$ 时，为旋转抛物面		在 xOy 面上为一点，在 xOz 面和 yOz 面上皆为开口向上的抛物线
双曲抛物面	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$，$(p>0, q>0)$		双曲线或抛物线
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		椭圆或双曲线

续表

名称	方　　程	图　　形	在坐标面的截痕
双叶双曲线	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$		椭圆或双曲线
(圆)锥面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 当 $a=b$ 时，为圆锥面		在 xOy 面上为一点，在 yOz 面和 xOz 面上各为两条相交直线
旋转曲面	曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转成曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$		在 xOy 面上为圆

7.2　疑难解答

问题 1　实数可以比较大小，向量能比较大小吗？

答　向量与数量是不同的．向量可以用有向线段来表示，向量除了有大小(模)之外，还有方向．正确表示一个向量，必须指

出它的大小(模)和方向两个要素. 由于向量有模和方向两个要素，因此，教材中没有也无法给出 $\boldsymbol{a}$ 大于 $\boldsymbol{b}$ 的概念. 可见，两向量是不能比较大小的. 如果要比较大小，只能比较两个向量的模 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 的大小.

问题 2　下列向量等式的几何意义是什么?

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$;

(3) $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

答　(1) 表示向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 依次首尾相接时，第一向量起点与第三向量终点相重合. 在几何上表示：以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 三向量为边构成三角形，或者 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共线.

(2) 由混合积的几何意义知，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为邻边构成的平行六面体的体积. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 表示体积为零，即三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面，或者至少有一个向量为零向量.

(3) 表示向量 $\boldsymbol{c}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合而得到，因此向量 $\boldsymbol{c}$ 平行于由向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 确定的平面，即 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 三向量共面.

问题 3　确定向量的坐标有哪些方法?

答　向量的坐标要根据所给定的条件来确定，一般有以下几种常用的方法：

(1) 如果已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标 $A(x_1, y_1, z_1)$ 及终点坐标 $B(x_2, y_2, z_2)$，则 $\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

(2) 如果已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的基本向量分解式 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$.

(3) 当向量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 及方向角 α,β,γ 已知时，$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, |\boldsymbol{a}|\cos\beta, |\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}$.

(4) 当向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}=\{x, y, z\}$ 时，则 $\boldsymbol{a}=\{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$，其中 λ 的值要根据 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 及其方向来确定.

(5) 根据向量的数量积和向量积的性质来确定.

例 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，求向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

解 由 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线知必有 $\lambda\neq 0$，使得

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\{2\lambda,\ -\lambda,\ 2\lambda\}$$

又因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，故 $4\lambda+\lambda+4\lambda=-18$，即 $\lambda=-2$. 故 $\boldsymbol{b}=\{-4,\ 2,\ -4\}$.

问题 4　利用向量运算可以解决哪些问题?

答 通常可以解决以下四类问题：

(1) 判定两个向量的位置关系. 判别向量 a 与 b 平行的常见方法是：(i) 证明存在常数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；(ii) 证明：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；(iii) 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$，证明：$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

判别 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的常见方法是：证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

(2) 判别空间三点是否共线. 设 A，B，C 为空间三点，考虑 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ 是否等于零向量，若等于零向量，则 A，B，C 共线，否则三点不共线.

(3) 判别空间四点是否共面. 判定空间四点 A，B，C，D 共面，等价于判定三向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 共面，仅需且只需证明

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0.$$

(4) 求平行四边形、三角形的面积，求平行六面体、四面体的体积.

以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$；

以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$；

以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 $V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$；

以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的四面体的体积 $V=\frac{1}{6}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

问题 5　如何确定平面的法向量？

答　确定平面的法向量是建立平面方程的关键，平面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的确定应根据不同的条件采用不同的方法，常见的有以下几种：

(1) 如果已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在平面 Π 上的垂足 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则 $\boldsymbol{n}=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$；

(2) 如果平面 Π 与已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行，则 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$；

(3) 如果平面 Π 与已知直线 L(方向向量为 $\boldsymbol{s}$)垂直，则 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$；

(4) 如果平面 Π 过不共线的三点 A, B, C，则 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$；

(5) 如果平面 Π 与不平行的两条直线 L_1、L_2 平行(它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$)，则 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$；

(6) 如果平面 Π 过两点 A, B，且与一直线(或向量)平行，则当直线的方向向量(或向量)$\boldsymbol{s}$ 与$\overrightarrow{AB}$不平行时，有 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{AB}$；

(7) 如果平面 Π 过直线 L 及直线外一点 M_0，则 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}$，其中 $\boldsymbol{s}$ 为 L 的方向向量，M_1 为 L 上一点；

(8) 如果平面 Π 经过两点 M_1、M_2，且与已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 垂直，则 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\{A, B, C\}$，其中$\overrightarrow{M_1M_2}$不平行 $\{A, B, C\}$.

问题 6　怎样将直线的一般方程化为标准方程？

答　设直线 L 的一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{7-1}$$

将方程组(7－1)化为标准形式的关键是求出直线 L 的方向向量和找出直线 L 上的一个固定点.

L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\{l, m, n\}$$

求直线 L 上一个固定点，可先取定 x，y，z 中的某一个值，如先取 $x=x_0$，代入方程组(7 - 1)，可得二元方程组

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0 \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0 \end{cases} \tag{7 - 2}$$

解方程组(7 - 2)(这里要求方程组(7 - 2)有解，否则，可先取 $y=y_0$，或 $z=z_0$)，得直线 L 上的固定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

通过点向式，可以写出 L 的标准方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

问题 7　空间曲线可以用参数方程来表示，问曲面能否也用参数方程来表示?

答　空间曲面可以用参数方程来表示. 事实上，设曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z)=0$，则 Σ 可以用方程组

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (x, y) \in D$$

来表示，可把 x，y 看作参数，这就是 Σ 的参数方程.

一般地，空间曲线的参数方程是单参数方程，而空间曲面的参数方程为双参数方程. 其一般形式为

$$\begin{cases} x = \varphi(s, t), \\ y = \psi(s, t), \\ z = \omega(s, t), \end{cases} \qquad (s, t) \in D$$

例如，球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 有参数方程.

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, & \\ z = R\cos\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

锥面　$z^2=x^2+y^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t\cos\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ y = t\sin\theta, & \\ z = t, & -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

有些单参数方程，如

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

在 xOy 平面上表示曲线，而在空间则表示母线平行于 z 轴的柱面. 它表示柱面时，也可以写成

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & \alpha \leqslant t \leqslant \beta \\ y = \psi(t), & \\ z = s & -\infty < S < +\infty \end{cases}$$

这就是双参数方程的形式. 例如，半径为 R 的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ y = R\sin\theta, & \\ z = s & -\infty < S < +\infty \end{cases}$$

另外，含有单参数的方程组(有两个方程)

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0, \\ G(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

也是曲面的一种参数方程. 关于这种方程，可理解为当 t 固定时，它表示一条空间曲线；当 t 变动时，这条曲线也在变动，当 F、G 连续时，这条空间曲线形成一曲面. 这种把曲面看作曲线运动形成的观点对我们想象曲面的形状会有帮助.

7.3 例题分析

7.3.1 客观题

例 1 单项选择题：

(1) 下面说法正确的是______.

A) 任何向量都有确定的大小和方向

B) 任何向量除以自己的模，都是单位向量

C) 只有模为零的向量，才是零向量

D) 0 乘以任何向量都是数 0

(2) 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则必有______.

A) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ B) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ D) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

(3) 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模分别为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{4}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$______.

A) 1 B) $1+\sqrt{2}$

C) 2 D) $\sqrt{5}$

(4) 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模分别为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$ 及 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$______.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1

(5) 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 $A(4,0,5)$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{14}$，又 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{14}}$$

则 B 的坐标为______.

A) (10, −2, 1)　　B) (−10, −2, 1)

C) (10, 2, 1)　　D) (10, −2, −1)

(6) 过点 $P_0(2, 3, 5)$，且平行平面

$$\Pi: 5x-3y+2z-10=0$$

的平面方程为______.

A) $5x+3y+2z-11=0$　　B) $5x-3y+2z+11=0$

C) $5x-3y+2z-11=0$　　D) $5x+3y+2z+11=0$

(7) 准线为 xOy 平面上以原点为圆心，半径为 2 的圆周，母线平行于 z 轴的圆柱面方程是______.

A) $x^2+y^2=2$　　B) $x^2+y^2=4$

C) $x^2+y^2+4=0$　　D) $x^2+y^2+z^2=4$

(8) 设直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{k}=\frac{z}{4}$ 与平面 $2x-9y+3z-10=0$ 平行，则 k 是______.

A) 2　　B) 6

C) 8　　D) 10

(9) 已知三平面的方程分别为

Π_1: $x-5y+2z+1=0$,

Π_2: $3x-2y+3z+8=0$,

Π_3: $4x+2y+3z-9=0$.

则必有______.

A) Π_1 与 Π_2 平行　　B) Π_1 与 Π_3 垂直

C) Π_2 与 Π_3 垂直　　D) Π_2 与 Π_3 平行

(10) 设有直线 L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 L_2: $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为______.

A) $\frac{\pi}{6}$　　B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{3}$　　　　　　　　　　D) $\frac{\pi}{2}$

分析

(1) 由于零向量的方向不能确定，故 A)错；由于零向量的模长为零，而 0 不能作除数，因此 B)不正确；任何数与向量的乘积均为向量，0 与任何向量乘积是零向量，故 D)也错；由零向量的定义可知，模长为 0 的向量是零向量，故正确的是 C).

(2) 由于 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

由此可知 C)正确.

特别取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$，显见 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=0$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$. 对于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}$，则 A)，B)，D)均不成立. 故只有 C)成立.

(3) 因 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2|+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{4}=5$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，故应选 D).

(4) 因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\times\sqrt{2}\cos\theta=2$，所以 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$. 故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=2\times\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2$. 从而选 A).

(5) 设 $B(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AB}=\{x-4,y,z-5\}$，由向量的方向余弦公式有

$$\frac{x-4}{2\sqrt{14}}=\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \text{有 } x=10,$$